

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



**Моисеев Александр Николаевич**

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
СИСТЕМ И СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМИ НЕПУАССОНОВСКИМИ  
ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант  
доктор технических наук, профессор  
Назаров Анатолий Андреевич

Томск – 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>7</b>
<b>ГЛАВА 1 ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОТОКИ ОДНОРОДНЫХ СОБЫТИЙ .....</b>	<b>26</b>
1.1 Высокоинтенсивный рекуррентный поток событий .....	26
1.2 МАР-поток .....	34
1.2.1 Способы задания МАР-потока и их эквивалентность.....	34
1.2.2 Анализ высокоинтенсивного МАР-потока.....	40
1.3 Высокоинтенсивный полумарковский поток событий .....	45
1.4 Резюме .....	52
<b>ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМИ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ .....</b>	<b>54</b>
2.1 Анализ СМО с обслуживанием фазового типа .....	56
2.2 Метод выделения первого скачка.....	68
2.3 Метод динамического просеивания .....	74
2.3.1 Просеянный поток.....	75
2.3.2 Метод динамического просеивания (просеянного потока) .....	77
2.4 Исследование СМО GI/GI/ $\infty$ методом динамического просеивания.....	80
2.5 Исследование СМО с входящим МАР-поток.....	86
2.6 Исследование СМО с входящим полумарковским потоком .....	92
2.7 Асимптотический анализ третьего порядка .....	99
2.7.1 Асимптотический анализ третьего порядка для СМО с входящим рекуррентным потоком .....	100
2.7.2 Асимптотический анализ третьего порядка для СМО с входящим МАР-поток.....	105
2.7.3 Асимптотический анализ третьего порядка для СМО с входящим	

полумарковским потоком .....	108
2.8 Метод начальных моментов .....	114
2.9 Резюме .....	118
<b>ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКИХ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМИ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ .....</b>	<b>120</b>
3.1 Модель многофазной системы обслуживания .....	120
3.2 Исследование многофазной СМО $GI/(GI/\infty)^K$ методом выделения первого скачка .....	121
3.3 Метод многомерного динамического просеивания .....	129
3.4 Исследование системы $GI/(GI/\infty)^K$ методом многомерного динамического просеивания .....	133
3.5 Исследование многофазной системы $MAR/(GI/\infty)^K$ .....	139
3.6 Исследование многофазной системы $SM/(GI/\infty)^K$ .....	145
3.7 Применение метода начальных моментов для исследования многофазной системы массового обслуживания $GI/(M/\infty)^K$ .....	152
3.8 Резюме .....	157
<b>ГЛАВА 4 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКИХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМИ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ .....</b>	<b>158</b>
4.1 Модель сети массового обслуживания .....	158
4.2 Анализ СеМО с рекуррентным входящим потоком на основе уравнений первого скачка .....	160
4.3 Применение метода многомерного динамического просеивания к исследованию СеМО .....	166
4.4 Анализ СеМО с рекуррентным входящим потоком методом многомерного динамического просеивания .....	168
4.5 Анализ СеМО с входящим MAR-потоком .....	172

4.6 Анализ СеМО с полумарковским входящим потоком.....	175
4.7 Методика расчета оптимального числа приборов в узлах сети с конечным числом каналов.....	178
4.7.1 Постановка задачи.....	178
4.7.2 Вероятность попадания гауссовского вектора в гиперэллипсоид равной плотности .....	179
4.7.3 Оптимальное число приборов.....	187
4.8 Асимптотический анализ третьего порядка .....	188
4.8.1 Асимптотический анализ третьего порядка для СеМО с входящим рекуррентным потоком .....	189
4.8.2 Асимптотический анализ третьего порядка для СеМО с входящим МАР-потоком.....	191
4.8.3 Асимптотический анализ третьего порядка для СеМО с входящим полумарковским потоком.....	194
4.9 Исследование СеМО с экспоненциальным обслуживанием методом начальных моментов .....	196
4.10 Резюме .....	202

## **ГЛАВА 5 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ..... 205**

5.1 Общие вопросы численного анализа области применимости асимптотических результатов .....	205
5.2 Определение области применимости асимптотических результатов для высокоинтенсивных случайных потоков событий .....	210
5.2.1 Рекуррентный поток.....	210
5.2.2 МАР.....	213
5.2.3 Полумарковский поток .....	215
5.3 Область применимости асимптотических результатов для однофазных СМО .....	218
5.3.1 СМО с обслуживанием фазового типа.....	218

5.3.2 Сравнение начальных моментов для СМО с экспоненциальным обслуживанием .....	219
5.3.3 Анализ области применимости асимптотических результатов для СМО с рекуррентным входящим потоком .....	220
5.3.4 Система MAP/GI/∞.....	225
5.3.5 Система SM/GI/∞.....	228
5.4 Область применимости асимптотических результатов для многофазных СМО .....	230
5.4.1 Сравнение моментов для многофазной системы с экспоненциальным обслуживанием .....	230
5.4.2 Анализ области применимости для многофазной системы GI/(GI/∞) <sup>K</sup> .....	232
5.4.3 Система MAP/(GI/∞) <sup>K</sup> .....	235
5.4.4 Система SM/(GI/∞) <sup>K</sup> .....	237
5.5 Область применимости асимптотических результатов для сетей массового обслуживания .....	239
5.5.1 Сравнение моментов для сети с экспоненциальным обслуживанием .....	239
5.5.2 Анализ области применимости асимптотических результатов для СеМО GI–(GI/∞) <sup>K</sup> .....	241
5.5.3 СеМО MAP–(GI/∞) <sup>K</sup> .....	244
5.5.4 СеМО SM–(GI/∞) <sup>K</sup> .....	247
5.6 Оптимальное число приборов.....	250
5.7 Резюме .....	252

## **ГЛАВА 6 КОМПЛЕКС ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОГРАММ И АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ..... 254**

6.1 Объектная модель слоя предметной области задач имитации функционирования систем и сетей обслуживания .....	256
--	-----

6.1.1 Основные элементы имитационной модели сети массового обслуживания.....	257
6.1.2 Модельное время и события системы.....	259
6.1.3 Базовые объекты и основной алгоритм моделирования .....	261
6.1.4 Моделирование событий .....	262
6.1.5 Элементы системы моделирования .....	264
6.2 Архитектура приложения с расширяемой элементной базой предметной области.....	268
6.3 Компоненты сбора и обработки статистической информации .....	276
6.4 Руководство пользователя программы имитационного моделирования процессов массового обслуживания .....	279
6.4.1 Задание исходных данных.....	279
6.4.2 Выполнение расчетов и анализ результатов.....	285
6.5 Алгоритмы численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем и сетей обслуживания .....	290
6.5.1 Вычисление параметров гауссовской аппроксимации.....	291
6.5.2 Построение ряда распределения на основе аппроксимации третьего порядка .....	294
6.5.3 Вычисление моментов первого и второго порядков для сети GI– $(M/\infty)^K$ .....	297
6.6 Резюме .....	299
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>301</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>306</b>

## Введение

**Актуальность работы.** Модели теории массового обслуживания [16, 35], сформулированные впервые [169] в начале XX века и предназначавшиеся для решения задач в области телефонии, в настоящее время используются для анализа систем и решения большого спектра задач в различных областях: телефонная сотовая связь [30, 199], телекоммуникационные сети [22, 34, 125], системы распределенной обработки информации [42, 100, 132], вычислительные системы [60, 131], колл-центры [150, 157], социально-экономические модели [33, 46, 101, 214], производственные системы и модели управления запасами [64, 77, 146], системы управления транспортными потоками [19, 53, 135] и т.д.

Особое место в теории массового обслуживания занимают такие модели как многофазные системы [16, 190, 236] и сети обслуживания [56, 189, 250]. Данные модели позволяют составлять математическое описание и производить анализ более сложных объектов реального мира, представляющих собой комплексы систем обслуживания произвольной конфигурации. Теория массового обслуживания [16, 35] предлагает достаточно много различных подходов к решению задач, однако большинство методик, как правило, относится к так называемым марковским моделям, когда входящий поток простейший, а время обслуживания имеет экспоненциальное распределение. Выработка же некоторых общих подходов к исследованию немарковских моделей массового обслуживания в настоящее время является актуальной.

Как следует из самого названия – «системы обслуживания», рассматриваемые модели описывают процессы обработки (обслуживания) некоторых заявок (требований, сообщений, клиентов). Говоря о характерных отличительных признаках моделей обслуживания, следует описать их основные элементы. Для моделей массового обслуживания характерно наличие *входящего потока* заявок, математическая модель которого, как правило, представляется в виде случайного потока событий [209] (точечного случайного

процесса). Вторым важным элементом системы массового обслуживания (далее – СМО) является группа (блок) обслуживающих приборов (серверов). Число приборов в одной СМО может варьироваться от 1 (такие системы называют одноканальными или однолинейными) до некоторого конечного числа (многоканальные или многолинейные системы) либо может быть неограниченным (бесконечнолинейные системы). Кроме числа обслуживающих приборов важной характеристикой обслуживания является математическая модель закона обслуживания, которая обычно описывается функцией распределения неотрицательной случайной величины, определяющей длительность обслуживания заявки на приборе. Для моделей с ограниченным числом приборов существует задача выбора структуры системы и дисциплины обслуживания заявок, поступающих в то время, когда все обслуживающие приборы заняты. Для решения этой задачи в СМО может присутствовать буфер, накапливающий такие заявки. При этом объем буфера и дисциплина обслуживания заявок внутри него могут существенно различаться от системы к системе. В этой связи различают два типа систем – с очередями, когда заявки в буфере располагаются линейно и поступают на приборы по мере их освобождения, и системы с повторными вызовами или RQ-системы [143, 144], в которых заявки, не получившие немедленного обслуживания, через некоторый интервал времени делают новые попытки занять прибор. Одна из первых попыток систематизации и классификации различных типов систем обслуживания принадлежит D.G. Kendall [188]. Предложенная им нотация позволяет достаточно кратко описать элементы системы обслуживания. Так, к примеру, обозначение M/M/1 описывает модель СМО с входящим простейшим потоком, экспоненциальным обслуживанием и одним прибором. В дальнейшем различные авторы расширяли нотацию Кендалла, вводя в рассмотрение объем буфера, особенности входящего потока или обслуживания (например, заявки различных типов [152, 159], кратные заявки и параллельное обслуживание [195, 218] и т.д.). Общепринятые обозначения, которые используются в настоящей работе для входящего потока заявок:

M – простейший (пуассоновский) поток;

GI – рекуррентный поток;

MAP – MAP-поток (Markovian Arrival Process);

SM – полумарковский поток (Semi-Markov).

Для закона обслуживания будут применяться всего два обозначения:

M – экспоненциальное распределение;

GI – неэкспоненциальное распределение с заданной функцией распределения вероятностей.

Многофазные СМО [16, 115, 151, 190, 236] являются моделями, представляющими последовательную обработку заявок. Такая СМО представляет собой линейную последовательность из систем обслуживания, называемых фазами обслуживания, выходящий поток каждой из которых (кроме последней) является входящим для следующей системы в цепочке. В таких системах заявка входящего потока поступает на первую фазу обслуживания, по окончании пребывания на которой передается на вторую фазу и так далее, пока не закончит обслуживание на последней фазе многофазной СМО, после чего покидает систему. Для обозначения многофазных систем обычно применяется «каскадный» стиль (см., например, [190]), так как в литературе чаще всего рассматриваются системы с двумя фазами обслуживания. В настоящей работе рассмотрены многофазные СМО с произвольным количеством фаз и неограниченным числом приборов на каждой фазе, поэтому для их обозначения будет использоваться свернутый «каскадный» стиль вида  $A/(B/\infty)^K$ . Здесь  $A$  – обозначение, характеризующее входящий поток,  $B$  – закон обслуживания, символ  $\infty$  означает неограниченное число обслуживающих приборов на каждой фазе,  $K$  – число фаз обслуживания. Например, в п. 3.4 представлен анализ многофазной СМО вида  $GI/(GI/\infty)^K$ , имеющей конечное число фаз, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, на каждой фазе имеется неограниченное число приборов, а обслуживание определяется заданной для каждой фазы функцией распределения случайной величины продолжительности обслуживания. Ниже иногда будет использоваться термин «однофазная

СМО» для обозначения обычной системы обслуживания, чтобы подчеркнуть ее отличие от многофазной СМО.

Сети массового обслуживания (далее – СеМО) [59, 189, 250] являются еще более сложными моделями, в которых отдельные СМО связаны между собой некоторым образом. В открытой СеМО заявка входящего потока поступает в одну из СМО сети, по окончании обслуживания на которой может перейти в другую СМО сети, либо повторить обслуживание в той же СМО, либо покинуть сеть, что определяется законом маршрутизации. Системы, из которых состоит СеМО, называют узлами сети. В настоящей работе рассматриваются только открытые СеМО с марковской маршрутизацией [147], неограниченным числом приборов в каждом узле и разделением входящего потока по узлам сети на основе заданных вероятностей. В связи с этим мы применяем следующую нотацию:  $A-(B/\infty)^K$ , где  $A$  – обозначение, характеризующее входящий поток,  $B$  – закон обслуживания, символ  $\infty$  означает неограниченное число обслуживающих приборов в каждом узле,  $K$  – число узлов сети. Например, в п. 4.6 представлен анализ СеМО вида  $SM-(GI/\infty)^K$ , имеющей конечное число узлов, на вход которой поступает полумарковский поток заявок, в каждом узле имеется неограниченное число приборов, обслуживание определяется заданной для каждого узла функцией распределения длительности обслуживания.

В диссертации представлен анализ сетей обслуживания, а также однофазных и многофазных СМО с неограниченным числом приборов, произвольным обслуживанием и непуассоновскими входящими потоками (рекуррентный поток [35, 65], MAP [160, 225], полумарковский [209]). Поскольку прямое аналитическое исследование описываемых выше моделей в большинстве случаев не представляется возможным, в данной работе исследование сосредоточено на анализе функционирования таких систем в условиях высокой интенсивности входящего потока [212]. Более подробно модели высокоинтенсивных потоков событий описаны в Главе 1.

Ниже представлен краткий обзор имеющихся к настоящему времени

публикаций в рассматриваемой области, а также применимости указанных моделей на практике.

Общие вопросы, связанные с теорией массового обслуживания, достаточно подробно описаны и широко представлены в виде учебных пособий и монографий [16, 35, 60, 114, 124, 134, 137, 209]. Многофазные системы и сети обслуживания являются более сложными моделями, и их исследование, как правило, представлено в специальной научной литературе. С достаточно подробными обзорами литературы в этой области можно познакомиться в [5, 8, 56, 208, 250].

Модели массового обслуживания с неограниченным числом приборов (или, по-другому, бесконечнолинейные СМО и СеМО) занимают важное место в моделировании реальных систем. Многие задачи могут быть сформулированы таким образом, что количество обслуживающих приборов будет являться действительно неограниченным либо настолько большим, что верхний предел загрузки системы практически не будет достигнут [33, 101]. Это могут быть, например, такие экономические модели, в которых договора кредитных или страховых организаций с физическими лицами выступают в роли заявок [214]. Очевидно, что число договоров в подобных системах ограничивать нецелесообразно.

Также модели с неограниченным числом приборов применяют в качестве моделей для многолинейных СМО в тех случаях, когда вероятность достижения загрузки всех каналов обслуживания предельно мала [207, 232, 235]. Например, подобные модели целесообразно применять при исследовании процессов в телекоммуникационных сетях, узлы которых представляют собой совокупность большого числа вычислительных (обрабатывающих) устройств. В качестве подобных узлов могут выступать вычислительные кластеры, многоядерные суперкомпьютеры, специализированные узлы маршрутизации с большим числом элементов.

Кроме того, даже для систем с потерями, когда число приборов конечно, модели с неограниченным числом приборов позволяют решать ряд задач. Ре-

результаты анализа модели с неограниченным числом приборов позволяют оценить возможную нагрузку на узлы системы и принять меры по предотвращению ее перегрузки или минимизации потерь передаваемых пакетов информации в системах с конечным числом приборов. Такие задачи являются актуальными при проектировании новых сетей связи и обработки данных. Решение одной из таких задач, а именно – определение оптимального числа приборов в системе, представлено в п. 4.7. Теоретические вопросы связи между бесконечнолинейными моделями и моделями с ограниченным числом приборов освещаются в [245, 247].

Исследования моделей с неограниченным числом приборов достаточно широко представлены в научной литературе [156, 177, 182, 202, 203, 205, 208, 233, 249]. Для однофазных СМО многие задачи решены, и их решения вошли в классические учебники по теории массового обслуживания [16, 35 и др.], однако для многофазных систем и сетей обслуживания такие исследования представлены в узком классе моделей с пуассоновскими входящими потоками и/или с экспоненциальным обслуживанием [56, 72, 139, 177, 161, 170, 186, 198], либо для систем и сетей специфической конфигурации [73, 76, 148, 149, 173, 200]. Часто исследование СеМО проводят путем аппроксимации каких-либо «неудобных» распределений (времени обслуживания или длительности интервалов между заявками во входящем потоке) удобным – экспоненциальным, эрланговским, детерминированным и т.п. [191, 208, 242], которые позволяют проводить исследование с помощью классических методов многомерных марковских процессов.

Развитие техники, телефонии, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи привело к необходимости создания и применения более адекватных математических моделей процессов передачи данных, так как циркулирующие в них потоки перестали соответствовать пуассоновской модели [231]. Для моделирования потоков с независимыми интервалами, имеющими неэкспоненциальное распределение, активно применяется модель рекуррентного потока событий [65]. Кроме того, установлено [181, 187, 194],

что реальные потоки в современных информационно-вычислительных системах обычно являются коррелированными [44]. Для их моделирования широко применяются модели МАР-потока [153, 204, 225] и полумарковского потока событий [162, 167, 227, 243, 244].

Многофазные системы обслуживания применяются как самостоятельные модели, так и в качестве способа декомпозиции СеМО определенного типа (см., например, [179]). В настоящее время число публикаций, посвященных исследованию многофазных СМО, неуклонно растет, однако большинство работ в этой области посвящено исследованию моделей с пуассоновским входящим потоком, либо систем с двумя фазами обслуживания, либо систем специфической конфигурации: [31, 34, 142, 172, 174, 175, 190].

Современные телекоммуникационные сети и системы распределенной обработки информации предполагают большой объем передаваемой информации и высокую пропускную способность каналов передачи. Таким образом, в этих системах количество пакетов данных, поступающих на обработку в единицу времени, очень велико. В терминах теории массового обслуживания в таких случаях говорят о высокой интенсивности [212] входящего потока. В частности, в работе [42] модель высокоинтенсивного потока применяется для моделирования потока входящих сообщений многофазной системы распределенной обработки данных. Некоторым аналогом моделей массового обслуживания с высокоинтенсивными входящими потоками в смысле их практического применения к анализу современных телекоммуникационных систем можно считать активно развиваемые в последнее время модели с неординарными потоками [155, 204, 226], то есть потоками с групповым поступлением заявок. Более подробно вопросы применения различных моделей СеМО на практике освещены в [5, 7].

Условие высокой интенсивности входящего потока для моделей с неограниченным числом приборов относится к классу широко применяемых в теории массового обслуживания так называемых условий высокой загрузки («heavy traffic») [184, 193, 237, 251, 252]. Полученные в этой области резуль-

таты для различных типов систем и сетей обслуживания [12–14, 66, 145, 168, 173, 178, 183, 197, 228, 234, 252], как правило, основаны на диффузионной аппроксимации исследуемого случайного процесса числа заявок в системе. Представленные в настоящей работе результаты в виде гауссовской аппроксимации стационарного распределения исследуемого процесса, с одной стороны, согласуются с результатами указанных исследований, но с другой, предлагают универсальную методику анализа моделей с неограниченным числом приборов, которая позволяет достаточно единообразно решать задачи не только для систем с различными типами входящих потоков и произвольным временем обслуживания, но и для более сложных моделей – таких как многофазные СМО и сети обслуживания. Более того, указанная методика позволяет получать аппроксимации высоких (третьего и выше) порядков, которые являются более точными, чем гауссовские, и обеспечивают достаточно малую погрешность аппроксимации и при небольшой интенсивности входящего потока.

Таким образом, задачи анализа моделей массового обслуживания с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и непуассоновскими входящими потоками являются актуальными научными проблемами.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационных исследований является важная научная проблема разработки, развития и применения математических методов исследования немарковских моделей систем и сетей массового обслуживания с неограниченным числом приборов, непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием. В качестве моделей непуассоновских потоков рассматриваются рекуррентный, MАР, полумарковский потоки событий.

Задачи исследования:

1) разработать математические модели высокоинтенсивных непуассоновских случайных потоков событий, таких как рекуррентный, MАР, полу-

марковский поток, на их основе построить модели систем и сетей обслуживания с входящими высокоинтенсивными потоками. Для моделей высокоинтенсивных непуассоновских потоков событий получить выражения для асимптотических распределений вероятностей числа событий, наступивших в потоке на интервале времени фиксированной длины;

2) для многомерных моделей обслуживания, таких как многофазные системы и сети обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах, разработать метод их исследования, который позволит выполнять анализ этих моделей при непуассоновских входящих потоках и неэкспоненциальном обслуживании;

3) разработать модификацию метода выделения первого скачка, которая позволит выполнять анализ многофазных систем и сетей обслуживания с рекуррентным входящим потоком и неэкспоненциальным обслуживанием;

4) модифицировать метод асимптотического анализа, предназначенный для исследования систем массового обслуживания, на случай анализа моделей с высокоинтенсивными входящими потоками, в том числе и для многомерных моделей обслуживания;

5) получить выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок в системах с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков;

б) получить выражения для многомерных стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок на фазах многофазной системы с неограниченным числом приборов и неэкспоненциальным обслуживанием на фазах при различных типах входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков;

7) получить выражения для многомерных стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок в узлах сети обслуживания с марковской маршрутизацией, неограниченным числом приборов и неэкспоненциальным обслуживанием в узлах при различных типах входящих высоко-

коинтенсивных непуассоновских потоков;

8) разработать методику, позволяющую применять результаты анализа моделей сетей обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах к моделям с конечным числом каналов, для последующего использования в практических целях;

9) разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного и имитационного моделирования сетей обслуживания с неограниченным числом приборов, с его помощью установить область применимости полученных асимптотических результатов.

**Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем:**

1. Впервые построены математические модели высокоинтенсивных непуассоновских случайных потоков событий, таких как рекуррентный, МАР, полумарковский поток, и на их основе – модели систем и сетей обслуживания с входящими высокоинтенсивными потоками. Для моделей высокоинтенсивных непуассоновских потоков событий получены выражения для асимптотических распределений вероятностей числа событий, наступивших в потоке на интервале времени фиксированной длины.

2. Впервые разработан и предложен метод многомерного динамического просеивания, предназначенный для исследования многофазных систем и сетей обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах, который в отличие от существующих подходов позволяет выполнять анализ многомерных моделей с непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием.

3. Разработана модификация метода выделения первого скачка для многофазных систем и сетей обслуживания с рекуррентным входящим потоком, обобщающая известную для однофазных СМО методику исследования на случай многомерных моделей.

4. Метод асимптотического анализа, предназначенный для исследования

математических моделей систем обслуживания, модифицирован для применения в анализе моделей с высокоинтенсивными входящими потоками, в том числе и в анализе многомерных моделей обслуживания.

5. С использованием разработанных методов и модификаций впервые получены выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок в системах с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков.

6. Для многофазных СМО с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков с использованием разработанных методов и модификаций впервые получены выражения для многомерных стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок на фазах системы.

7. Для сетей обслуживания с марковской маршрутизацией, неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков с использованием разработанных методов и модификаций впервые получены выражения для многомерных стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок в узлах сети.

8. Разработана методика расчета оптимального числа приборов в узлах сетей обслуживания с конечным числом каналов на основе результатов анализа моделей сетей с неограниченным числом приборов в узлах. Данная методика позволяет решать важные практические задачи, например, при проектировании распределенных вычислительных систем.

9. С использованием разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа и имитационного моделирования сетей обслуживания с неограниченным числом приборов установлена область применимости полученных асимптотических результатов.

**Методы исследования.** Для проведения диссертационных исследований широко применялся аппарат следующих дисциплин: математический анализ, теория вероятностей, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, методы математической статистики, имитационное моделирование, объектно-ориентированное проектирование и программирование, программная инженерия.

Проблема исследования рассматриваемых немарковских моделей массового обслуживания решается применением предлагаемых в работе методов, которые условно можно поделить на две группы. Методы первой группы посвящены решению проблемы построения уравнений, определяющих распределение вероятностей числа заявок в системе или узлах сети. Здесь развиваются метод многомерных марковских процессов с дискретной компонентой, метод выделения первого скачка для систем и сетей с рекуррентным входящим потоком, а также – оригинальный метод многомерного динамического просеивания.

Для решения всех составленных уравнений применяется и развивается метод асимптотического анализа [103, 111] в предельном условии растущей интенсивности входящего потока, что приводит к единообразию формулировок и доказательств представленных теорем. Это также приводит к основному выводу о том, что в условии высокой интенсивности входящего потока распределения числа заявок в системах или узлах сетей являются асимптотически гауссовскими (многомерными гауссовскими), для которых принципиальным различием являются только выражения для вычисления основных параметров – математического ожидания (вектора средних) и дисперсии (матрицы ковариаций), зависящие от вида модели.

Также с помощью указанного метода асимптотического анализа в работе получены аппроксимации более высокого (третьего) порядка, которые являются более точными по сравнению с гауссовскими.

Для оценки области применимости полученных асимптотических результатов используются методы имитационного моделирования [70, 79, 238]

и математической статистики [11, 123, 241]. С этой же целью выполнены исследования начальных моментов [111] для систем и сетей с экспоненциальным обслуживанием и непуассоновскими входящими потоками. Проведенный численный анализ позволяет определить область применимости асимптотических результатов. Указанный анализ произведен с использованием представленного в диссертации комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Впервые в теории массового обслуживания предложен метод многомерного динамического просеивания, который позволяет производить исследование многомерных моделей с неограниченным числом приборов, таких как многофазные системы и сети обслуживания. Данный метод является существенным вкладом в теорию массового обслуживания, так как, в отличие от существующих подходов, позволяет решать задачи анализа многомерных моделей обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах для случаев непуассоновских входящих потоков и неэкспоненциального обслуживания.

Предложен модифицированный на многомерный случай метод выделения первого скачка. Данная модификация может являться альтернативой методу многомерного динамического просеивания при исследовании математических моделей многофазных СМО и сетей обслуживания для случаев рекуррентного входящего потока.

Предложена методика применения результатов исследования сетей с неограниченным числом приборов в узлах для важной практической задачи проектирования сетей с конечным числом каналов. Разработанная методика позволяет определять оптимальное число приборов в каждом узле сети, обеспечивающее заданный уровень информационной надежности сети в целом.

Результаты диссертационной работы, в том числе конкретные формулы расчета параметров распределений могут использоваться для анализа функционирования любых реальных систем, адекватными математическими моде-

лями которых являются системы и сети массового обслуживания с неограниченным числом приборов.

Разработанный комплекс имитационного моделирования и численного анализа позволяет выполнять расчет параметров вероятностных законов распределений для числа заявок в системе (сети), получать соответствующие эмпирические распределения, построенные на основе результатов имитационного моделирования, производить расчет оптимального числа приборов в узлах сети.

Указанные результаты успешно применялись при решении ряда практических задач проектирования вычислительных систем при выполнении проектов группы компаний ИНКОМ (г. Томск).

**Достоверность полученных результатов** подтверждается математически корректными выводами и доказательствами теорем, представленными в работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей, как между собой, так и с известными в теории массового обслуживания результатами, а также многочисленными экспериментами с применением имитационного моделирования и численного анализа.

**Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.** Автор лично участвовал в получении всех результатов, изложенных в работе, а именно в разработке и применении методов исследования моделей обслуживания с неограниченным числом приборов, выводе всех формул, доказательстве всех представленных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания, выполнении статистического и численного анализа полученных результатов.

**Связь работы с крупными научными проектами.** Значительная часть результатов, изложенных в работе получена в рамках выполнения проекта

№ 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» Федерального агентства по образованию [121] и научно-исследовательской работы № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности в 2014–2015 гг. [58].

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 49 работ, в том числе: 2 монографии, 18 статей в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций, получены 2 свидетельства о регистрации электронного ресурса, 27 работ опубликованы в трудах Международных и Всероссийских конференций. 8 работ включены в международную базу научного цитирования Scopus, из них 5 – в базу Web of Science.

**Апробация работы.** Основные результаты работы и отдельные ее положения докладывались и обсуждались на 21 научной конференции Международного и Всероссийского уровня.

Результаты работы использовались при реализации ряда проектов группы компаний ИНКОМ (г. Томск) в 2012–2014 гг.

Диссертация выполнена в рамках общего направления исследований научной школы по теории массового обслуживания Томского государственного университета. С другими, близкими по тематике исследованиями в области анализа систем массового обслуживания и случайных потоков, можно ознакомиться в работах томских ученых [36–39, 68, 69, 99, 105, 106, 108, 110,

127 и др.].

### **Структура работы.**

В Главе 1 описаны модели высокоинтенсивных непуассоновских потоков событий различных типов: рекуррентный, MAP, полумарковский, выполнен их асимптотический анализ. Показано, что распределения вероятностей числа событий, наступивших в таких потоках в течение интервала времени фиксированной длины, при достаточно большой интенсивности потока аппроксимируются нормальными распределениями. Характеристики этих распределений получены в Главе 1 и используются в дальнейшем при анализе СМО и СеМО.

В Главе 2 представлен анализ однофазных СМО, выполненный различными методами исследования: методом многомерных марковских процессов – для систем с обслуживанием фазового типа, методом выделения первого скачка – для систем с входящим рекуррентным потоком, методом динамического просеивания – для систем с произвольным типом входящего потока и произвольным обслуживанием. Показано, что в условиях высокой интенсивности входящего потока распределения вероятностей числа заявок в рассматриваемых системах в стационарном режиме функционирования являются асимптотически нормальными, получены параметры соответствующих нормальных распределений для каждого типа системы.

Также в этой главе представлен анализ СМО вида  $GI/PH/\infty$ , выполненный методом начальным моментов, который позволяет аналитически получить допредельные выражения для первых и вторых моментов числа заявок в системе с обслуживанием фазового типа. Этот результат помогает определять область применимости полученных в других разделах асимптотических аппроксимаций путем сравнения допредельных и асимптотических моментов между собой. Показано, что аналитические выражения для математического ожидания (моментов первого порядка) числа заявок в системе в допредельном и асимптотическом случаях полностью совпадают.

В п. 2.7 выполнена процедура асимптотического анализа более высокого (третьего) порядка. Получены соответствующие аппроксимации характеристических функций числа заявок в стационарном режиме функционирования бесконечнолинейных систем обслуживания с различными типами входящих высокоинтенсивных потоков. В результате получена более точная аппроксимация стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе, что подтверждается численными экспериментами, представленными в Главе 5.

В Главе 3 изложены аналогичные Главе 2 исследования, выполненные для многофазных систем массового обслуживания. Для этого в п. 3.2 представлена модификация метода выделения первого скачка на случай анализа многомерного совместного распределения числа заявок, находящихся на обслуживании на фазах СМО. В п. 3.3 представлен метод многомерного динамического просеивания, который является развитием метода динамического просеивания на многомерный случай анализа многофазных СМО и сетей обслуживания. Показано, что асимптотическое стационарное распределение числа заявок на фазах систем различного типа в условиях высокой интенсивности входящего потока является многомерным гауссовским. Параметры этого гауссовского распределения для каждого вида многофазной СМО получены в разделах Главы 3, соответствующих различным типам входящего потока.

Также в этой главе представлен анализ многофазной СМО с экспоненциальным обслуживанием, выполненный методом начальных моментов. Полученные аналитические допредельные выражения для начальных моментов для данного типа систем позволяют оценить область применимости полученных гауссовских аппроксимаций. В частности, в п. 3.7 показано, что аналитические выражения для вектора математических ожиданий в допредельном и асимптотическом случаях полностью совпадают.

В Главе 4 представлено исследование сетей массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием в узлах,

на вход которых поступают высокоинтенсивные потоки заявок. Показано, что стационарное совместное распределение числа заявок в узлах сетей данного типа асимптотически является многомерным гауссовским. Получены параметры этого гауссовского распределения для сетей с различными типами входящих потоков. Исследование выполнено методом выделения первого скачка и методом многомерного динамического просеивания, которые представлены в Главе 3 для исследования многофазных СМО и которые, как оказалось, практически без дополнительных модификаций применимы к сетям массового обслуживания.

Также в этой главе выполнен анализ модели СеМО с экспоненциальным обслуживанием, который позволяет аналитически получить допредельные выражения для начальных моментов состояний сети и оценить область применимости полученных в других разделах асимптотических результатов на основе сравнения моментов в допредельном и асимптотическом случаях. Полученные допредельные и асимптотические выражения для вектора математических ожиданий полностью совпадают. Сравнение же вторых моментов представлено численно в Главе 5.

В п. 4.7 представлено одно из значимых применений результатов выполненных исследований на практике. Здесь рассматривается вопрос применения результатов исследования моделей с неограниченным числом приборов к реальным системам, в которых число каналов ограничено. С этой целью производится вычисление так называемого оптимального числа приборов в узлах сети, которое позволяет обеспечить уровень потерь заявок в сетях с отказами, не превышающий величину, которая определяется наперед заданным уровнем информационной надежности. Анализ производится на основе применения гауссовской аппроксимации и построения гиперэллипсоида равной плотности. В п. 4.7.3 представлены формулы для расчета оптимального числа приборов в узлах сети.

В п. 4.8 изложены результаты применения процедуры асимптотического анализа более высокого (третьего) порядка для сетей обслуживания с различ-

ными типами входящих высокоинтенсивных потоков. В результате анализа получены более точные аппроксимации многомерного стационарного распределения вероятностей числа заявок в узлах сети, что подтверждается численными экспериментами, представленными в Главе 5.

В Главе 5 представлен численный анализ области применимости результатов, полученных в Главах 1–4. Анализ произведен на основе вычисления расстояний Колмогорова [123, 196] между распределениями вероятностей, построенными на основе асимптотических аппроксимаций, и эмпирическими распределениями, полученными на основе имитационного моделирования соответствующих систем и сетей. Кроме того, для моделей с экспоненциальным обслуживанием и обслуживанием фазового типа проведено сравнение асимптотических дисперсий с их допредельными значениями, а для задачи определения оптимального числа приборов с использованием имитационного моделирования выполнен анализ относительных частот отказов в моделях с ограниченным числом приборов.

В Главе 6 представлено описание разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания. Комплекс включает в себя программное приложение для имитационного моделирования систем и сетей обслуживания, а также алгоритмы расчета характеристик их функционирования на основе полученных в Главах 1–4 теоретических результатов. Приложение для имитационного моделирования реализовано на основе разработанной объектной модели и в соответствии с предлагаемой в работе архитектурой приложений с расширяемой элементной базой предметной области.

## Глава 1 Высокоинтенсивные случайные потоки однородных событий

В данной главе представлены модели высокоинтенсивных потоков событий, которые применяются в дальнейшем в качестве входящих потоков для исследуемых систем и сетей массового обслуживания. Помимо описания моделей потоков представлен и их анализ, а именно – исследование числа событий, наступивших в потоке за определенный интервал времени.

В работе рассматриваются модели рекуррентного, МАР и полумарковского потоков. Высокая интенсивность этих потоков обеспечивается за счет того, что в каждой из моделей интенсивность потока представляется в виде  $N\lambda$ , где  $\lambda$  – фиксированная величина, а параметр  $N$  имеет большие значения (в теоретических исследованиях предполагается, что  $N \rightarrow \infty$ ). Величину  $N$  будем называть *параметром высокой интенсивности* потока, а асимптотическое условие роста интенсивности  $N \rightarrow \infty$  будем называть *условием высокой интенсивности потока* (входящего потока – при анализе СМО и СеМО). На практике интенсивность  $N\lambda$  рассматривается как единая величина с достаточно большими, но конечными значениями (см. Главу 5).

### 1.1 Высокоинтенсивный рекуррентный поток событий

Рассмотрим рекуррентный поток событий [114], в котором длины  $\tau$  интервалов между наступлением последовательных событий независимы и одинаково распределены. Функцию распределения значений  $\tau$  опишем следующим образом. Представим  $\tau$  в виде  $\tau = \frac{\xi}{N}$ , где  $\xi$  – некоторая неотрицательная случайная величина с функцией распределения  $A(z)$  и конечными моментами первого и второго порядка; величина  $N > 0$  – параметр высокой интенсивности потока, смысл которого описан выше. Тогда для функции распределения длин интервалов  $\tau$  имеем:

$$P\{\tau < x\} = P\left\{\frac{\xi}{N} < x\right\} = P\{\xi < Nx\} = A(Nx).$$

Пусть  $\bar{a} = M\{\tau\}$  – средняя длина интервала между моментами наступления событий, тогда  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{a}}$  – это интенсивность наступления событий в рекуррентном потоке, причем

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{M\{\tau\}} = \frac{1}{M\left\{\frac{\xi}{N}\right\}} = N \cdot \frac{1}{M\{\xi\}} = N\lambda,$$

где

$$\lambda = \frac{1}{M\{\xi\}} = \frac{1}{\int_0^{\infty} [1 - A(z)] dz}. \quad (1.1)$$

Так как  $N$  имеет смысл большого параметра, то заданный таким образом поток событий будем называть высокоинтенсивным рекуррентным потоком или HIGI-потоком (High Intensive General Independent).

Рекуррентный поток событий является стационарным потоком восстановления, поэтому мы не будем отдельно задавать функцию  $A_1(x)$  распределения длины первого интервала в потоке, так как она полностью определяется [65, 136] функцией распределения для остальных интервалов:

$$A_1(x) = \lambda \int_0^x [1 - A(z)] dz.$$

Обозначим через  $m(t)$  число событий, наступивших в HIGI-потоке за время  $t$ , а через  $z(t)$  – длину интервала от момента  $t$  до момента наступления следующего события. Рассмотрим двумерный случайный процесс  $\{m(t), z(t)\}$ . Распределение вероятностей его значений обозначим через

$$P(m, z, t) = P\left\{m(t) = m, z(t) < \frac{z}{N}\right\}.$$

Применяя формулу полной вероятности, для этого распределения можно записать равенство:

$$P(m, z, t + \Delta t) = P(m, z + N\Delta t, t) - P(m, N\Delta t, t) + P(m-1, N\Delta t, t)A(z) + o(\Delta t),$$

из которого получаем уравнение Колмогорова

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(m, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(m, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(m, 0, t)}{\partial z} + A(z) \frac{\partial P(m-1, 0, t)}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее будем использовать обозначение:  $\frac{\partial P(m, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(m, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$ .

Просуммируем уравнение (1.2) по  $m = \overline{0, \infty}$ , получим:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=0}^{\infty} P(m, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{m=0}^{\infty} P(m, z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \sum_{m=0}^{\infty} P(m, 0, t) + A(z) \frac{\partial}{\partial z} \sum_{m=1}^{\infty} P(m-1, 0, t). \quad (1.3)$$

Здесь  $\sum_{m=0}^{\infty} P(m, z, t) = P\left\{z(t) < \frac{z}{N}\right\}$  – распределение вероятностей значений слу-

чайного процесса  $z(t)$ , которое в стационарном режиме обозначим через  $R(z)$ .

В результате в (1.3) получаем:

$$0 = \frac{dR(z)}{dz} - \frac{dR(0)}{dz} + A(z) \frac{dR(0)}{dz}$$

или

$$\frac{dR(z)}{dz} = \frac{dR(0)}{dz} [1 - A(z)]. \quad (1.4)$$

Отсюда

$$R(z) = \frac{dR(0)}{dz} \int_0^z [1 - A(x)] dx.$$

Причем  $R(\infty) = 1$ , а  $\int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx = \frac{1}{\lambda}$ . В результате получаем  $\frac{dR(0)}{dz} = \lambda$ , и ре-

шение (1.4) имеет вид:

$$R(z) = \lambda \int_0^z [1 - A(x)] dx. \quad (1.5)$$

Вернемся к уравнению (1.2). Умножим его справа и слева на величину  $e^{jum}$ , где  $j = \sqrt{-1}$ , а  $u$  – некоторая переменная, и просуммируем по  $m = \overline{0, \infty}$ .

Тогда, введя обозначение

$$H(u, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, z, t),$$

для этой функции получим:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} [A(z)e^{ju} - 1]. \quad (1.6)$$

Это уравнение решим методом асимптотического анализа [111].

**Асимптотический анализ первого порядка.** В уравнении (1.6) выполним замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u, z, t) = F_1(w, z, t, \varepsilon),$$

получим:

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z)e^{j\varepsilon w} - 1]. \quad (1.7)$$

Обозначим  $F_1(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, z, t, \varepsilon)$ . Функцию  $F_1(w, z, t)$  здесь и далее в работе будем называть *асимптотическим решением* уравнения (1.7). Докажем следующее утверждение относительно этой функции.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\lambda$  и  $R(z)$  определяются выражениями (1.1) и (1.5) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $F_1(w, z, t)$  уравнения (1.7) имеет вид

$$F_1(w, z, t) = R(z)e^{jw\lambda t}. \quad (1.8)$$

*Доказательство* выполним в 2 этапа.

*Этап 1.* В уравнении (1.7) выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим:

$$0 = \frac{\partial F_1(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1].$$

Это уравнение имеет вид, аналогичный (1.4). Следовательно, функцию  $F_1(w, z, t)$  можно представить в виде

$$F_1(w, z, t) = R(z)\Phi_1(w, t), \quad (1.9)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Выполним в (1.7) предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , получим:

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [e^{j\varepsilon w} - 1].$$

Подставим сюда выражение (1.9), воспользуемся разложением  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , поделим обе части на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . С учетом того, что  $R'(0) = \lambda$ , получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = jw\lambda \Phi_1(w, t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_1(w, 0) = 1$ , получаем решение

$$\Phi_1(w, t) = e^{jw\lambda t}.$$

Подставим это выражение в (1.9), получим (1.8). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** В уравнении (1.6) выполним замену

$$H(u, z, t) = H_2(u, z, t)e^{juN\lambda t}, \quad (1.10)$$

получим следующее уравнение относительно функции  $H_2(u, z, t)$ :

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H_2(u, z, t)}{\partial t} + ju\lambda H_2(u, z, t) = \frac{\partial H_2(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0, t)}{\partial z} [A(z)e^{ju} - 1]. \quad (1.11)$$

Выполним здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u, z, t) = F_2(w, z, t, \varepsilon), \quad (1.12)$$

тогда уравнение (1.11) переписывается в виде:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w\lambda F_2(w, z, t, \varepsilon) = \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z)e^{j\varepsilon w} - 1]. \quad (1.13)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.2.** Пусть  $\lambda$  и  $R(z)$  определяются выражениями (1.1) и (1.5) соответственно,

$$\kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2), \quad (1.14)$$

где  $a$  и  $\sigma^2$  – конечные математическое ожидание и дисперсия случайной ве-

личины с функцией распределения  $A(x)$ . Тогда асимптотическое решение  $F_2(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, z, t, \varepsilon)$  уравнения (1.13) имеет вид

$$F_2(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}. \quad (1.15)$$

*Доказательство* выполним в три этапа.

*Этап 1.* В уравнении (1.13) выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим:

$$\frac{\partial F_2(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0.$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и (1.4), следовательно, функция  $F_2(w, z, t)$  может быть представлена в виде

$$F_2(w, z, t) = R(z) \Phi_2(w, t), \quad (1.16)$$

где  $\Phi(w, t)$  – некоторая функция.

*Этап 2.* Решение уравнения (1.13) запишем в виде разложения

$$F_2(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [R(z) + j\varepsilon w f(z)] + O(\varepsilon^2), \quad (1.17)$$

где  $f(z)$  – некоторая функция. Подставим это выражение в (1.13), с использованием разложения  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , получаем:

$$j\varepsilon w \lambda \Phi_2(w, t) R(z) = \Phi_2(w, t) \left\{ \frac{dR(z)}{dz} + j\varepsilon w \frac{df(z)}{dz} + \left( \frac{dR(0)}{dz} + j\varepsilon w \frac{df(0)}{dz} \right) (A(z) - 1 + j\varepsilon w A(z)) \right\} + O(\varepsilon^2).$$

Учитывая (1.4), приведя подобные и сократив обе части на  $j\varepsilon w$ , получим

$$\lambda R(z) = \frac{df(z)}{dz} + \frac{df(0)}{dz} (A(z) - 1) + \lambda A(z) + O(\varepsilon).$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $f(z)$ :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{df(0)}{dz} [1 - A(z)] - \lambda [A(z) - R(z)]. \quad (1.18)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по  $z$  от 0 до  $\infty$ , получим:

$$f(\infty) - f(0) = \frac{df(0)}{dz} \cdot \frac{1}{\lambda} - \lambda \left( \int_0^{\infty} [1 - R(z)] dz - \int_0^{\infty} [1 - A(z)] dz \right).$$

Здесь  $f(0) = 0$  в силу (1.17) и краевого условия

$$F_2(w, 0, t, \varepsilon) = H(u, 0, t) e^{-juN\lambda t} = e^{-juN\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, 0, t) = 0.$$

Вычислим интеграл

$$\delta = \int_0^{\infty} [1 - R(z)] dz = \int_0^{\infty} z dR(z).$$

Подставив сюда (1.4), получаем:

$$\delta = \lambda \int_0^{\infty} z [1 - A(z)] dz.$$

Отсюда с помощью несложных преобразований получаем:

$$\delta = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} z^2 dA(z) = \frac{\lambda a_2}{2},$$

где  $a_2$  – второй начальный момент случайной величины с функцией распределения  $A(x)$ . В итоге получаем

$$\frac{df(0)}{dz} - \lambda f(\infty) = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{\infty} z^2 dA(z) - \lambda = \frac{\kappa}{2}, \quad (1.19)$$

где величина  $\kappa$  определяется по формуле (1.14).

*Этап 3.* В (1.13) сделаем предельный переход при  $z \rightarrow +\infty$ . Учтем, что

$$F_2(w, z, t, \varepsilon) = H(u, z, t) e^{-ju\lambda Nt} = e^{-ju\lambda Nt} \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, z, t),$$

где  $\lim_{z \rightarrow \infty} P(m, z, t) = P(m, t)$  есть маргинальное распределение, которое не зави-

сит от  $z$ , и, таким образом,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial F(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} = 0$ . Учитывая это и применяя раз-

ложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ , из (1.13) получаем:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda F_2(w, \infty, t, \varepsilon) = \frac{\partial F_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left( j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3) \right).$$

Подставим сюда (1.17):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda \Phi_2(w, t) + (j\varepsilon w)^2 \lambda f(\infty) \Phi_2(w, t) = \\ = \Phi_2(w, t) \left( j\varepsilon w \lambda + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \lambda + (j\varepsilon w)^2 \frac{df(0)}{dz} \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Приводя подобные и сокращая на  $\varepsilon^2$ , получаем:

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = (jw)^2 \Phi_2(w, t) \left( \frac{1}{2} \lambda + \frac{df(0)}{dz} - \lambda f(+\infty) \right) + O(\varepsilon).$$

Учитывая (1.19) и переходя к  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w, t) (\lambda + \kappa).$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия  $\Phi_2(w, 0) = 1$ , которое получается из условия

$$P(m, z, 0) = \begin{cases} R(z) & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m > 0, \end{cases}$$

имеет вид

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

где величина  $\kappa$  определяется по формуле (1.14). Отсюда в силу (1.16) имеем:

$$F_2(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

что и требовалось доказать.

Возвращаясь к функции  $H(u, z, t)$ , выполнив в (1.15) замены, обратные к (1.12) и (1.10), получаем, что при достаточно больших значениях  $N$  имеет место аппроксимация

$$H(u, z, t) \approx R(z) \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa) t \right\}.$$

$h(u, t) = \lim_{z \rightarrow +\infty} H(u, z, t)$  есть характеристическая функция для исследуемого процесса  $m(t)$  – числа событий, наступивших в высокоинтенсивном рекуррентном потоке за интервал времени длины  $t$ . При достаточно больших значениях  $N$  она имеет вид характеристической функции нормальной случайной величины:

$$h(u, t) \approx \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa)t \right\}, \quad (1.20)$$

то есть распределение для  $m(t)$  аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t$ .

## 1.2 МАР-поток

В работах [46, 115, 116] была предложена модель так называемых МС-потоков (от Markov Chain) – дважды стохастических потоков событий, управляемых цепью Маркова. Позднее М. Ньютсом и Д. Лукантони в работах [204, 225] для подобных потоков было предложено другое название «Markovian Arrival Process» (МАР) и соответствующая форма задания, которая активно используется в современной научной литературе. Как указано в [154] и доказано в [40], МАР-потоки по сути являются МС-потоками, однако, аббревиатура МАР в настоящее время более распространена среди специалистов по теории массового обслуживания, чего и будем придерживаться в настоящей работе.

Модель МАР широко применяется для моделирования потоков информации в спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетях связи и представляет один из видов коррелированных потоков событий. Вопросы применения и анализа МАР-потоков представлены в [41, 158, 187, 194].

Ниже представлены два эквивалентных способа задания МАР, а затем выполнен асимптотический анализ высокоинтенсивного МАР-потока.

### 1.2.1 Способы задания МАР-потока и их эквивалентность

**Классическая модель МАР-потока.** По Д. Лукантони и М. Ньютсу

[204, 225] МАР-поток определяется следующим образом. Пусть заданы неотрицательные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ , а также вероятности  $p_{kv}(0)$  и  $p_{kv}(1)$  для  $k, v = 1, 2, \dots, K$ . Имеется однородный марковский случайный процесс  $k(t)$  с конечным множеством состояний  $\{1, 2, \dots, K\}$  и непрерывным временем  $t$ . Если  $k(t) = k$ , то за время  $dt$  может произойти следующее:

1) с вероятностью  $\lambda_k p_{kv}(0)dt$  процесс  $k(t)$  переходит в состояние  $v \neq k$ , а событие в МАР-потоке не наступает;

2) либо с вероятностью  $\lambda_k p_{kv}(1)dt$  процесс  $k(t)$  переходит в состояние  $v$  (при этом возможно  $v = k$ ), и событие в МАР-потоке наступает;

3) либо с вероятностью  $1 - \lambda_k dt$  ничего не произойдет.

Обычно для всех значений  $k = 1, 2, \dots, K$  полагают  $p_{kk}(0) = 0$ , тогда для вероятностей  $p_{kv}(0)$  и  $p_{kv}(1)$  выполняются условия нормировки

$$\sum_{v=1}^K [p_{kv}(0) + p_{kv}(1)] = 1.$$

Пусть  $m(t)$  – число событий, наступивших в МАР-потоке за время  $t$ , тогда, обозначив

$$P(m, k, t) = P\{m(t) = m, k(t) = k\}$$

для  $m = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, K$ , можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей  $P(m, k, t)$  двумерного марковского процесса  $\{m(t), k(t)\}$ . Записав по формуле полной вероятности систему равенств

$$\begin{aligned} P(m, k, t + \Delta t) = & P(m, k, t)(1 - \lambda_k \Delta t) + \Delta t \sum_v P(m, v, t) \lambda_v p_{vk}(0) + \\ & + \Delta t \sum_v P(m - 1, v, t) \lambda_v p_{vk}(1) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial P(m, k, t)}{\partial t} = -P(m, k, t) \lambda_k + \sum_v P(m, v, t) \lambda_v p_{vk}(0) + \sum_v P(m - 1, v, t) \lambda_v p_{vk}(1). \quad (1.21)$$

Введем следующие матричные обозначения: вектор-строка  $\mathbf{P}(m, t) = [P(m, 1, t), \dots, P(m, K, t)]$  и матрицы  $\mathbf{D}_0 = [d_{kv}(0)]_{k, v=1, \dots, K}$ ,

$\mathbf{D}_1 = [d_{kv}(1)]_{k,v=1,\overline{K}}$ , элементы которых определяются следующим образом:

$$d_{kv}(0) = \begin{cases} -\lambda_k, & k = v, \\ \lambda_k p_{kv}(0), & k \neq v. \end{cases}$$

$$d_{kv}(1) = \lambda_k p_{kv}(1), \quad k, v = 1, 2, \dots, K.$$

Тогда систему (1.21) можно записать в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{P}(m, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(m, t) \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}(m-1, t) \mathbf{D}_1. \quad (1.22)$$

Начальное условие имеет вид:

$$\mathbf{P}(m, t_0) = \begin{cases} \mathbf{0}, & m > 0, \\ \boldsymbol{\theta}, & m = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

где  $\boldsymbol{\theta}$  – вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений марковского процесса  $k(t)$ , а  $\mathbf{0}$  – вектор-строка из нулей. Вектор  $\boldsymbol{\theta}$  является решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta} \mathbf{e} = 1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Здесь  $\mathbf{e}$  – вектор-столбец, состоящий из единиц. Пару матриц  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$  называют [153] представлением МАР-потока.

**Другой способ задания МАР-потока.** На протяжении ряда последних лет в научных публикация томской школы по теории массового обслуживания применяется другой способ задания МАР-потока [111], указание на который впервые встречается в [117]. Основная проблема описанного выше классического подхода заключается в том, что прямая интерпретация элементы матриц  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{D}_1$  в практическом смысле вызывает некоторые затруднения. Для этого приходится снова возвращаться к трем матрицам: одна – из элементов  $\lambda_k$ , вторая – из элементов  $p_{kv}(0)$  и третья – из элементов  $p_{kv}(1)$ . К тому же указанный процесс  $k(t)$  является либо достаточно специфической цепью Маркова с непрерывным временем, которая позволяет при переходах сохранять то же состояние, либо весьма частным случаем полумарковского процесса.

Ученые томской школы, следуя Коксу и теории дважды стохастических потоков [165, 192], применяют следующий способ задания МАР-потока. Пусть имеется однородная эргодическая цепь Маркова  $k(t)$  с непрерывным временем, принимающая значения  $1, 2, \dots, K$ , определяемая матрицей  $\mathbf{Q}$  инфинитезимальных характеристик  $q_{kv}$ . Пусть также заданы неотрицательные величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ , определяющие условные интенсивности наступления событий в МАР-потоке для каждого состояния цепи  $k(t)$ , а также совокупность условных вероятностей  $d_{kv}$  того, что в потоке наступает событие в момент, когда цепь  $k(t)$  меняет свое состояние с  $k$  на  $v$  (предполагается, что  $k \neq v$  и  $d_{kk} = 0$ ). Цепь  $k(t)$  называется управляющей цепью Маркова для рассматриваемого МАР-потока.

Если  $k(t) = k$ , то за время  $dt$  может произойти следующее:

1) с вероятностью  $\lambda_k dt$  в потоке наступает событие, при этом цепь Маркова  $k(t)$  не меняет своего состояния;

2) с вероятностью  $q_{kv} dt$  цепь Маркова  $k(t)$  переходит из состояния  $k$  в другое состояние  $v$  ( $v \neq k$ ) и при этом с вероятностью  $d_{kv}$  в потоке наступает событие;

3) с вероятностью  $1 - \lambda_k dt + q_{kk} dt$  ничего не происходит.

Пусть  $m(t)$  – число событий, наступивших в МАР-потоке за время  $t$ . Для двумерной цепи Маркова  $\{m(t), k(t)\}$  определим её распределение вероятностей  $P(m, k, t) = P\{m(t) = m, k(t) = k\}$ .

Для вероятностей  $P(m, k, t)$  можно записать следующие равенства:

$$P(m, k, t + \Delta t) = P(m, k, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + P(m - 1, k, t)\lambda_k \Delta t + \sum_{v \neq k} [P(m - 1, v, t)d_{vk} + P(m, v, t)(1 - d_{vk})]q_{vk} \Delta t + o(\Delta t),$$

откуда, получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(m, k, t)}{\partial t} = [P(m - 1, k, t) - P(m, k, t)]\lambda_k + \sum_v [P(m - 1, v, t)d_{vk} + P(m, v, t)(1 - d_{vk})]q_{vk}. \quad (1.25)$$

Введем следующие матричные обозначения:

- вектор-строка  $\mathbf{P}(m, t) = [P(m, 1, t), \dots, P(m, K, t)]$ ;
- $\mathbf{Q}$  – матрица инфинитезимальных характеристик  $q_{kv}$ ;
- $\mathbf{\Lambda}$  – диагональная матрица с элементами  $\lambda_k$  по главной диагонали;
- $\mathbf{D}$  – матрица из элементов  $d_{kv}$  при  $k \neq v$  и  $d_{kk} = 0$ .

Тогда систему (1.25) можно переписать в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{P}(m, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(m, t)[\mathbf{Q} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{D} \circ \mathbf{Q})] + \mathbf{P}(m-1, t)[\mathbf{\Lambda} + \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}], \quad (1.26)$$

с начальным условием

$$\mathbf{P}(m, t_0) = \begin{cases} \mathbf{0}, & m > 0, \\ \boldsymbol{\theta}, & m = 0. \end{cases}$$

Здесь с помощью знака « $\circ$ » обозначено адамарово (поэлементное) произведение матриц.

Заметим, что уравнения (1.22) и (1.26) имеют одинаковую структуру и различаются лишь коэффициентами, что подтверждает эквивалентность обоих описанных способов задания МАР-потока.

**Формулы перехода и частные случаи.** Для дальнейших исследований удобно воспользоваться следующими формулами, позволяющими переходить от одного способа задания МАР-потока к другому.

Нетрудно видеть, что матрицы  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{D}_1$  классического способа задания выражаются через матрицы  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{D}$  следующим образом:

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{Q} - [\mathbf{\Lambda} + \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}], \quad (1.27)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}. \quad (1.28)$$

Переход от классического способа задания к матрицам  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{D}$  следует непосредственно из формул (1.27), (1.28). Очевидно, что матрица  $\mathbf{Q}$  вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1.$$

Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{\Lambda}$  равны элементам главной диагонали матрицы  $\mathbf{D}_1$ :

$$\lambda_k = (\mathbf{D}_1)_{kk}, k = 1, \dots, K.$$

Элементы матрицы  $\mathbf{D}$  могут быть получены по формулам

$$d_{kv} = \frac{(\mathbf{D}_1)_{kv}}{q_{kv}}, k \neq v,$$

$$d_{kk} = 0$$

для всех  $k, v = 1, 2, \dots, K$ .

Используя описанный способ задания МАР-потока, достаточно легко перейти к уравнениям для его частных случаев, таких как ММРР-поток, синхронный МАР, рекуррентный поток фазового типа и др. Например, так как для ММРР [171] (Markov Modulated Poisson Process) все элементы матрицы условных вероятностей  $\mathbf{D}$  равны 0, то получаем

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{\Lambda}.$$

Для синхронного МАР-потока [111] все элементы матрицы  $\mathbf{\Lambda}$  условных интенсивностей равны 0, а элементы  $d_{kv} = 1$  для всех  $k \neq v$  ( $d_{kk} = 0$  по-прежнему). Следовательно, в этом случае

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{Q}_{diag}, \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{diag},$$

где  $\mathbf{Q}_{diag}$  – диагональная матрица с элементами  $q_{kk}$  на главной диагонали.

Аналогичным образом для ВМАР-потоков событий [155], то есть для неординарных МАР-потоков с групповым наступлением событий (поступлением пачки заявок в системах массового обслуживания), можно определить две эквивалентные формы задания, для которых также несложно установить формулы перехода.

Таким образом, при решении задач исследователь имеет возможность выбрать наиболее удобную для него форму задания МАР- или ВМАР-потока и быть уверенным в том, что полученные результаты имеют эквивалентную форму записи в другой нотации. В настоящей работе для единообразия везде используется классический способ задания МАР-потока [204, 225].

### 1.2.2 Анализ высокоинтенсивного МАР-потока

Рассмотрим модель высокоинтенсивного МАР-потока. Пусть МАР-поток задан представлением [153] в виде  $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$ , где  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{D}_1$  – квадратные матрицы порядка  $M$ , а скалярный мультипликатор  $N$  есть параметр высокой интенсивности (см. начало Главы 1). Управляющий этим потоком процесс Маркова  $k(t)$  имеет  $M$  состояний. Интенсивность (fundamental rate) МАР-потока, заданного таким образом, составляет  $N\lambda$ , где величина  $\lambda$  определяется выражением

$$\lambda = \boldsymbol{\theta}\mathbf{D}_1\mathbf{e}. \quad (1.29)$$

Здесь – векторы  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\mathbf{e}$  описаны выше (см. формулу (1.24)). Заданный таким образом МАР-поток будем называть высокоинтенсивным марковским потоком событий или НИМАР-потоком (от High Intensive Markovian Arrival Process). В работе [39] рассматривается модель МАР-потока с высокой интенсивностью, но редкими изменениями состояния.

Обозначим через  $m(t)$  число событий, наступивших в рассматриваемом потоке за интервал времени длительности  $t$ . Рассмотрим двумерный случайный процесс  $\{m(t), k(t)\}$ . Для его распределения вероятностей  $P(m, k, t) = \mathbf{P}\{m(t) = m, k(t) = k\}$  уравнение (1.22) примет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{P}(m, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(m, t)\mathbf{D}_0 + \mathbf{P}(m-1, t)\mathbf{D}_1 \quad (1.30)$$

с начальным условием (1.23). Здесь вектор-строка  $\mathbf{P}(m, t) = [P(m, 1, t), \dots, P(m, M, t)]$ .

Введя частичные характеристические функции

$$H(u, k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, k, t),$$

используя обозначения  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{H}(u, t) = [H(u, 1, t), \dots, H(u, M, t)]$ , из (1.30)

получаем уравнение

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t)[\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{ju} - 1)] \quad (1.31)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u, t_0) = \mathbf{0}. \quad (1.32)$$

Выполним решение уравнения (1.31) методом асимптотического анализа [111] в предельном условии высокой интенсивности потока.

**Асимптотический анализ первого порядка.** В выражениях (1.31)–(1.32) произведем следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon).$$

Тогда задача (1.31)–(1.32) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{j\varepsilon w} - 1)], \quad (1.33)$$

$$\mathbf{F}_1(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \quad (1.34)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_1(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.3.** Пусть  $\mathbf{0}$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.24) и (1.29) соответственно. Тогда асимптотическое решение задачи (1.33)–(1.34) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{0} e^{jw\lambda t}. \quad (1.35)$$

*Доказательство* выполним в два этапа.

*Этап 1.* Положим в (1.33)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{F}_1(w, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это равенство с первым уравнением (1.24), можно сделать вывод, что  $\mathbf{F}_1(w, t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{0} \Phi_1(w, t), \quad (1.36)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция, которая в силу (1.34) удовлетворяет условию  $\Phi_1(w, t_0) = 1$ .

*Этап 2.* Умножим (1.33) на вектор  $\mathbf{e}$ , подставим (1.36), поделим результат на  $\varepsilon$  и выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда с учетом того, что  $\mathbf{D}\mathbf{e} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{0}\mathbf{e} = 1$ , получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = \Phi_1(w, t) jw\lambda,$$

решение которого с учетом начального условия дает

$$\Phi_1(w, t) = e^{jw\lambda t}.$$

Подставляя данное выражение в (1.36), получаем (1.35). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Обозначим через  $\mathbf{H}_2(u, t)$  векторную функцию, удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) e^{juN\lambda t}. \quad (1.37)$$

Подставляя это выражение в (1.31)–(1.32), получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(u, t) ju\lambda = \mathbf{H}_2(u, t) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{ju} - 1)], \\ \mathbf{H}_2(u, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Выполним в (1.38) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon). \quad (1.39)$$

С использованием этих обозначений (1.38) переписывается в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) j\varepsilon w\lambda = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{j\varepsilon w} - 1)], \\ \mathbf{F}_2(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.40)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_2(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.4.** *Пусть*

$$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}, \quad (1.41)$$

где вектор-строка  $\mathbf{g}$  является решением линейного матричного уравнения

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \mathbf{0}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1), \quad (1.42)$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица. Тогда асимптотическое решение задачи (1.40) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \mathbf{0} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}. \quad (1.43)$$

*Доказательство* этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* В (1.40) выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(w, t)\mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_2(w, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (1.24) следует, что  $\mathbf{F}_2(w, t)$  можно записать в виде

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \boldsymbol{\theta}\Phi_2(w, t), \quad (1.44)$$

где  $\Phi_2(w, t)$  – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию  $\Phi_2(w, t_0) = 1$ .

*Этап 2.* С учетом (1.44) функцию  $\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$  представим в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t)[\boldsymbol{\theta} + j\varepsilon w \mathbf{g}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (1.45)$$

где  $\mathbf{g}$  – некоторая вектор-строка, а  $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$  – вектор-строка, состоящая из величин порядка малости  $\varepsilon^2$  и выше. Подставим (1.45) и разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$  в первую строку (1.40), получим

$$j\varepsilon w \lambda \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{D} + j\varepsilon w \boldsymbol{\theta}\mathbf{D}_1 + j\varepsilon w \mathbf{g}\mathbf{D} + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Учитывая, что  $\boldsymbol{\theta}\mathbf{D} = \mathbf{0}$  и выполняя в этом равенстве предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем матричное уравнение относительно вектора  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \boldsymbol{\theta}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1),$$

которое совпадает с (1.42).

*Этап 3.* Умножая обе части уравнения (1.40) на вектор  $\mathbf{e}$ , используя (1.45) и разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3),$$

в результате несложных преобразований с учетом обозначения (1.41X) получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \Phi_2(w, t) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) \right\}.$$

Решение этого уравнения при имеющемся начальном условии  $\Phi_2(w, t_0) = 1$  да-

ет выражение

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

подставляя которое в (1.44), получаем (1.43). *Теорема доказана.*

**Замечание.** Решением неоднородной системы уравнений (1.42), вообще говоря, является семейство векторов вида

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + C\boldsymbol{\theta}, \quad (1.46)$$

где  $\mathbf{g}$  – частное решение неоднородной системы, а  $C\boldsymbol{\theta}$  – общее решение однородной системы  $\mathbf{gD} = \mathbf{0}$  в силу первого равенства (1.24) (здесь  $C$  – произвольная константа). Однако нетрудно убедиться, что при подстановке любого из решений (1.46) выражение (1.41) для величины  $\kappa$  дает одно и то же значение в силу (1.24) и (1.29).

Вернемся к функции  $\mathbf{H}(u, t)$ . Выполнив в (1.43) замены, обратные к (1.39) и (1.37), получаем, что при достаточно больших значениях  $N$

$$\mathbf{H}(u, t) \approx \boldsymbol{\theta} \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa)t \right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция

$$h(u, t) = \mathbf{H}(u, t)\mathbf{e}$$

величины  $m(t)$  – числа событий, наступивших в высокоинтенсивном МАР-потоке, в указанных предельных условиях имеет вид характеристической функции гауссовского распределения

$$h(u, t) \approx \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa)t \right\}, \quad (1.47)$$

то есть распределение вероятностей числа событий в НИМАР-потоке, наступивших за время  $t$ , можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t$ .

### 1.3 Высокоинтенсивный полумарковский поток событий

Рассмотрим полумарковский поток однородных событий, заданный следующим образом. Пусть  $\{\xi_n, \tau_n\}$  – стационарный двумерный марковский процесс с дискретным временем [65]. Здесь  $\xi_n$  – дискретная компонента, принимающая значения от 1 до  $L$ ,  $\tau_n$  – непрерывная компонента, принимающая неотрицательные значения. Будем полагать, что эволюция процесса определяется элементами так называемой полумарковской матрицы  $\mathbf{A}(x) = [A_{lv}]_{l,v=1,L}$  следующим образом:

$$A_{lv}(x) = \mathbf{P} \left\{ \xi_{n+1} = v, \tau_{n+1} < \frac{x}{N} \mid \xi_n = l \right\}. \quad (1.48)$$

Здесь  $N$  – параметр высокой интенсивности потока (см. начало Главы 1).

Последовательность моментов времени  $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ , определяемая рекуррентным выражением  $t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}$  для  $n = 0, 1, \dots$ , называется полумарковским потоком событий, заданным полумарковской матрицей  $\mathbf{A}(x)$ . Процесс  $\xi_n = \xi(t_n)$  называют вложенной в полумарковский поток цепью Маркова.

Поскольку средняя длина интервалов  $\tau_n$  обратно пропорциональна  $N$ , то при  $N \rightarrow \infty$  интенсивность наступления событий в рассматриваемом потоке будет неограниченно расти. Такую модель потока событий будем называть высокоинтенсивным полумарковским или HISM-потоком (от High-Intensive Semi-Markov). В работе [37] представлена модель и анализ высокоинтенсивного полумарковского потока событий в условии предельно редких изменений его состояния.

Обозначим  $m(t)$  – число событий, наступивших в рассматриваемом потоке в течение интервала времени  $(0, t)$ . Пусть  $z(t)$  – длина интервала времени от момента  $t$  до момента наступления следующего события в потоке (остаточное время),  $l(t)$  – случайный процесс, значения которого на каждом из интервалов  $[t_n, t_{n+1})$ ,  $n = 0, 1, \dots$  постоянны и равны  $\xi_{n+1}$ :

$$l(t) = \xi_{n+1}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}). \quad (1.49)$$

Тогда многомерный случайный процесс  $\{m(t), l(t), z(t)\}$  будет марковским.

Для его распределения вероятностей

$$P(m, l, z, t) = \mathbb{P} \left\{ m(t) = m, l(t) = l, z(t) < \frac{z}{N} \right\}$$

можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Согласно формуле полной вероятности имеем:

$$P(m, l, z, t + \Delta t) = P(m, l, z + N\Delta t, t) - P(m, l, N\Delta t, t) + \\ + \sum_{v=1}^L P(m-1, v, N\Delta t, t) A_{vl}(z) + o(\Delta t).$$

Отсюда для  $l = \overline{1, L}$  получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(m, l, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(m, l, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(m, l, 0, t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^L \frac{\partial P(m-1, v, 0, t)}{\partial z} A_{vl}(z) \quad (1.50)$$

при начальных условиях

$$P(m, l, z, 0) = \begin{cases} \sum_{v=1}^L A_{vl}(z), & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m > 0. \end{cases}$$

Обозначим через  $R_l(z)$  совместное стационарное распределение вероятностей двумерного марковского процесса  $\{l(t), z(t)\}$ , причем

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m, l, z, 0) = \mathbb{P} \left\{ l(t) = l, z(t) < \frac{z}{N} \right\} = R_l(z).$$

Просуммируем уравнения (1.50) по  $m$  от 0 до  $\infty$ . При  $t = 0$  получаем

$$0 = R'_l(z) - R'_l(0) + \sum_{v=1}^L R'_v(0) A_{vl}(z).$$

Обозначим вектор-строку  $\mathbf{R}(z) = [R_1(z), \dots, R_L(z)]$ , тогда предыдущее уравнение запишется в виде

$$\mathbf{R}'(z) + \mathbf{R}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] = \mathbf{0}. \quad (1.51)$$

Отсюда получаем матричное дифференциальное уравнение относительно функции  $\mathbf{R}(z)$ :

$$\mathbf{R}'(z) = \mathbf{R}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)], \quad (1.52)$$

граничное условие для которого при  $z \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\mathbf{R}'(0) = \lambda \mathbf{r}, \quad (1.53)$$

где  $\lambda$  – некоторый коэффициент, вектор-строка  $\mathbf{r}$  есть стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова  $\xi_n$ . Этот вектор является решением уравнения Колмогорова  $\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{A}(z)$  есть стохастическая матрица, определяющая вероятности переходов вложенной цепи Маркова. Таким образом, решение уравнения (1.52) имеет вид

$$\mathbf{R}(z) = \int_0^z \mathbf{R}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)]dx. \quad (1.54)$$

Пусть  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty)$  есть стационарное распределение значений полумарковского процесса  $l(t)$ , тогда при  $z \rightarrow \infty$  из (1.54) получаем

$$\mathbf{R} = \int_0^{\infty} \mathbf{R}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)]dx = \lambda \int_0^{\infty} \mathbf{r}[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)]dx = \lambda \mathbf{r} \int_0^{\infty} [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)]dx = \lambda \mathbf{r} \mathbf{A}, \quad (1.55)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица с элементами  $A_{lv} = \int_0^{\infty} [P_{lv} - A_{lv}(x)]dx$ . В дальнейших исследованиях будем полагать, что матрица  $\mathbf{P}$  неразложима, а все значения  $A_{lv}$  конечны:  $A_{lv} < \infty, l, v = \overline{1, L}$ .

Умножая левую и правую части равенства (1.55) на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ , получим

$$\mathbf{R}\mathbf{e} = 1 = \lambda \mathbf{r}\mathbf{A}\mathbf{e},$$

откуда находим значение коэффициента  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{r}\mathbf{A}\mathbf{e}}. \quad (1.56)$$

Введем обозначение  $H(u, l, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, l, z, t)$ , тогда умножая (1.50)

на  $e^{jum}$  и суммируя по  $m$  от 0 до  $\infty$ , получаем

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, l, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, l, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(u, l, 0, t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^L e^{ju} \frac{\partial H(u, l, 0, t)}{\partial z} A_{vl}(z).$$

Используя обозначение для вектор-строки  $\mathbf{H}(u, z, t) = [H(u, 1, z, t), \dots, H(u, L, z, t)]$ , данное уравнение перепишем в виде:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} \left[ e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} \right]. \quad (1.57)$$

Дифференциальное матричное уравнение (1.57) будем решать асимптотически методом [111] в условии неограниченно растущей интенсивности рассматриваемого полумарковского потока, то есть при  $N \rightarrow \infty$ .

**Асимптотический анализ первого порядка.** Введем обозначения

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, z, t) = \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon).$$

Из (1.57) получаем

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ e^{jw\varepsilon} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} \right]. \quad (1.58)$$

**Теорема 1.5.** Пусть  $\mathbf{R}(z)$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.54) и (1.56) соответственно, тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon)$  уравнения (1.58) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w, z, t) = \mathbf{R}(z) e^{jw\lambda t}. \quad (1.59)$$

*Доказательство* проведем в два этапа.

*Этап 1.* Выполним в (1.58) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_1(w, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_1(w, t), \quad (1.60)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Выполним в (1.58) предельный переход  $z \rightarrow \infty$  и просуммируем все компоненты этого уравнения (для этого умножим справа обе его части на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ ). Получим:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ e^{j\varepsilon w} \mathbf{P} - \mathbf{I} \right] \mathbf{e}.$$

Воспользуемся разложением  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , поделим обе части на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Учитывая выражение (1.60), получим

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} \mathbf{Re} = jw \mathbf{R}'(0) \mathbf{Re} \Phi_1(w, t),$$

откуда с учетом (1.53) получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = jw \lambda \Phi_1(w, t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_1(w, 0) = 1$ , получаем решение

$$\Phi_1(w, t) = e^{jw \lambda t}.$$

Подставив это выражение в (1.60), получим (1.59). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Выполним в (1.57) замену

$$\mathbf{H}(u, z, t) = \mathbf{H}_2(u, z, t) e^{ju \lambda N t}, \quad (1.61)$$

получим:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, z, t)}{\partial t} + ju \lambda \mathbf{H}_2(u, z, t) = \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, 0, t)}{\partial z} [e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}]. \quad (1.62)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u, z, t) = \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon), \quad (1.63)$$

тогда (1.62) переписется в виде

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon) = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}]. \quad (1.64)$$

**Теорема 1.6.** Пусть  $\mathbf{R}(z)$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.54) и (1.56) соответственно,

$$\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e}, \quad (1.65)$$

где вектор-строка  $\mathbf{f}'_0$  удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{f}'_0 [\mathbf{I} - \mathbf{P}] = \lambda [\mathbf{rP} - \mathbf{R}], \\ \mathbf{f}'_0 \mathbf{Ae} = \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \end{cases} \quad (1.66)$$

$a_2 = \mathbf{rA}_2 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \int_0^\infty x^2 d\mathbf{A}(x)$ , причем все элементы матрицы  $\mathbf{A}_2$  конечны. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)$  уравнения (1.64) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}. \quad (1.67)$$

Доказательство проведем в три этапа.

*Этап 1.* Выполним в (1.64) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_2(w, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_2(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_2(w, t), \quad (1.68)$$

где  $\Phi_2(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Решение уравнения (1.64) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [\mathbf{R}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}(z)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (1.69)$$

где  $\mathbf{f}(z)$  – некоторая вектор-функция (строка). Подставляя это выражение в (1.64) и применяя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$ , после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} j\varepsilon w \lambda \Phi_2(w, t) \mathbf{R}(z) &= \Phi_2(w, t) \{ \mathbf{R}'(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(z) + \mathbf{R}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] + \\ &+ j\varepsilon w \mathbf{R}'(0) \mathbf{A}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + j\varepsilon w \mathbf{A}(z)] \} + \mathbf{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Учитывая (1.52)–(1.53), поделив обе части на  $j\varepsilon w$  и сокращая  $\Phi_2(w, t)$ , получаем

$$\lambda \mathbf{R}(z) = \mathbf{f}'(z) + \lambda \mathbf{rA}(z) + \mathbf{f}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{O}(\varepsilon). \quad (1.70)$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем дифференциальное уравнение относительно

неизвестной вектор-функции  $\mathbf{f}(z)$ :

$$\mathbf{f}'(z) = \mathbf{f}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)] - \lambda[\mathbf{rA}(z) - \mathbf{R}(z)],$$

интегрируя которое при начальном условии  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$ , получаем выражение

$$\mathbf{f}(z) = \int_0^z \{\mathbf{f}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] - \lambda[\mathbf{rA}(x) - \mathbf{R}(x)]\} dx. \quad (1.71)$$

Будем искать  $\mathbf{f}(z)$  в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\mathbf{f}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] - \lambda[\mathbf{rA}(x) - \mathbf{R}(x)]\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{f}'(0)[\mathbf{I} - \mathbf{P}] - \lambda[\mathbf{rP} - \mathbf{R}] = 0. \quad (1.72)$$

Вычитая левую часть этого равенства из подынтегрального выражения (1.71), с учетом (1.55) получаем

$$\mathbf{f}(\infty) = \mathbf{f}'(0)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{rA} - \lambda \int_0^{\infty} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] dx. \quad (1.73)$$

Можно показать, что  $\int_0^{\infty} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] dx = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{rA}_2$ , где  $\mathbf{A}_2 = \int_0^{\infty} x^2 d\mathbf{A}(x)$ . С уче-

том этого, умножая обе части (1.73) справа на единичный вектор  $\mathbf{e}$ , получим

$$[\mathbf{f}'(0)\mathbf{A} - \mathbf{f}(\infty)]\mathbf{e} = \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \quad (1.74)$$

где  $a_2 = \mathbf{rA}_2\mathbf{e}$ . Учитывая, что  $\mathbf{f}(\infty)\mathbf{e} = 0$  и обозначая  $\mathbf{f}'_0 = \mathbf{f}'(0)$ , из (1.72) и (1.74) получаем систему уравнений (1.66).

*Этап 3.* Выполним в (1.64) предельный переход  $z \rightarrow \infty$  и умножим обе части уравнения на  $\mathbf{e}$  справа, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{e} + j\varepsilon w \lambda \mathbf{F}_2(w, \infty, t, \varepsilon) \mathbf{e} &= \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [e^{j\varepsilon w} \mathbf{P} - \mathbf{I}] \mathbf{e} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \mathbf{e} (e^{j\varepsilon w} - 1) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Подставим сюда (1.69) и применим разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ ,

получаем:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} \mathbf{Re} + j\varepsilon w \lambda \Phi_2(w, t) \mathbf{Re} = \Phi_2(w, t) [\mathbf{R}'(0) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(0)] \mathbf{e} \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] + O(\varepsilon^3).$$

Приводя подобные, сокращая на  $\varepsilon^2$ , используя обозначение (1.65) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \Phi_2(w, t) \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa),$$

решая которое при начальном условии  $\Phi_2(w, 0) = 1$ , получаем:

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}.$$

Подставляя это выражение в (1.68), получаем (1.67). *Теорема доказана.*

Выполняя в (1.67) замены, обратные к (1.63) и (1.61), получаем следующую аппроксимацию функции  $\mathbf{H}(u, z, t)$  при достаточно больших значениях  $N$ :

$$\mathbf{H}(u, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa) t \right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция  $h(u, t)$  числа событий, наступивших в высокоинтенсивном полумарковском потоке в течение времени  $t$  удовлетворяет соотношению

$$h(u, t) = \mathbf{H}(u, \infty, t) \mathbf{e} \approx \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa) t \right\}. \quad (1.75)$$

То есть при достаточно больших значениях  $N$  распределение числа событий, наступивших в HISM-потоке за время  $t$ , может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t$ , где  $\lambda$  и  $\kappa$  определяются выражениями (1.56) и (1.65).

#### 1.4 Резюме

Как было показано в предыдущих разделах Главы 1, распределение ве-

роятностей числа событий, наступивших в течение интервала времени заданной длительности  $t$  в высокоинтенсивном потоке любого из рассмотренных типов, может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t$ , где параметр  $N$  определяет высокую интенсивность потока  $N\lambda$ , а величины  $\lambda$  и  $\kappa$  вычисляются по формулам, приведенным в Таблице 1.1 (пояснение обозначений можно найти в соответствующих разделах).

Таблица 1.1 – Формулы для вычисления параметров  $\lambda$  и  $\kappa$  моделей высокоинтенсивных потоков событий

Тип потока	Формула для параметра $\lambda$	Формула для параметра $\kappa$
рекуррентный	$\lambda = \frac{1}{a}$	$\kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2)$
МАР	$\lambda = \theta \mathbf{D}_1 \mathbf{e}$	$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}$
полумарковский	$\lambda = \frac{1}{\mathbf{rAe}}$	$\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e}$

Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в работах автора [83, 89, 113, 212, 213].

## **Глава 2 Исследование немарковских систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и высокоинтенсивными входящими потоками**

Исследования однофазных СМО, которым посвящена данная глава, достаточно широко представлены в учебной и научной литературе. В частности, для так называемых экспоненциальных моделей [16] выполнены прямые аналитические исследования для широкого класса одноканальных и многоканальных систем, а также для систем с неограниченным числом приборов. Более того, для СМО с неограниченным числом приборов имеются результаты для систем вида  $M/GI/\infty$  и  $G/GI/\infty$  [2, 16, 35], а также для ряда специфических систем (с кратными заявками, повторным обслуживанием, в случайной среде и т.п.) [156, 182, 202, 203, 205, 233, 249]. Однако в литературе так и не представлено общего подхода к анализу систем вида  $\bullet/\bullet/\infty$ , где в качестве входящего потока может выступать один из коррелированных потоков (например, МАР или полумарковский), а обслуживание – произвольное.

Обычно для анализа немарковских СМО применяются методы так называемой марковизации, когда исследуемый немарковский процесс каким-либо образом приводится к марковскому, для которого возможно составить (и решить) систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Чаще всего в качестве способа марковизации применяется метод дополнительной переменной (или переменных, если их требуется больше одной) [164, 180, 188], однако существуют и другие подходы, например, методика выделения первого скачка [16], которая также изложена в данной главе, специальные двумерные случайные процессы, описывающие количество заявок, время обслуживания которых в момент  $t$  не превышает заданную величину  $y$  [229, 230], другие оригинальные методики [59, 163].

Согласно классическим методам исследования для СМО с неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием, для марковизации исследуемого процесса числа заявок в системе требуется дополнить его ком-

понентами, содержащими необходимую информацию о входящем потоке (например, для рекуррентного входящего потока это будет остаточное время до следующего события), а также остаточными временами обслуживания каждой заявки, число которых изменяется в процессе функционирования системы и, вообще говоря, не ограничено. Исследование таких многомерных процессов с переменным числом компонент представляется затруднительным. Еще больше сложностей возникает при исследовании многофазных систем и сетей обслуживания – в этом случае для каждой СМО, входящей в состав комплекса требуется определять эти компоненты.

Подход, который предлагается в настоящей работе в качестве единой методики исследования однофазных и многофазных систем, а также сетей массового обслуживания – это совокупность методов динамического просеивания (просеянного потока) и асимптотического анализа, впервые подробно представленных в [103, 111] и получивших широкое применение при анализе СМО различного вида [34, 92, 98, 99, 110, 210 и др.].

В настоящей главе представлены исследования СМО с неограниченным числом приборов, высокоинтенсивными входящими потоками и произвольным обслуживанием, выполненные классическим методом многомерных марковских процессов для системы с обслуживанием фазового типа, методом выделения первого скачка для системы с рекуррентным входящим потоком, методом начальных моментов [111] для системы с экспоненциальным обслуживанием и методом динамического просеивания для систем  $HI/GI/\infty$ . В п. 2.8 приводится сравнительный анализ, а в п. 5.3 – численный анализ области применимости асимптотических результатов.

Обозначим через  $i(t)$  число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент времени  $t$ . В данной главе решается задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в системе в стационарном режиме ее функционирования при условии неограниченного роста интенсивности входящего потока.

## 2.1 Анализ СМО с обслуживанием фазового типа

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает высокоинтенсивный рекуррентный поток заявок, определяемый функцией распределения длин интервалов между последовательным поступлением заявок, заданной в форме  $A(Nx)$  (п. 1.1). Будем полагать, что для случайной величины, определяемой функцией распределения  $A(z)$ , математическое ожидание и дисперсия конечны, обозначим их следующим образом:

$$\int_0^{\infty} z dA(z) = a = \frac{1}{\lambda}, \quad \int_0^{\infty} (z - a)^2 dA(z) = \sigma^2.$$

Таким образом, интенсивность входящего потока будет составлять  $\lambda$ .

Поступающая в систему заявка занимает любой из свободных приборов. Длительность обслуживания заявки имеет распределение фазового типа (РН-распределение), заданное неприводимым представлением  $\{\mathbf{v}, \mathbf{Q}\}$  [16, 62]. Это означает следующее. Рассматривается цепь Маркова  $k(t)$  с пространством состояний  $\{0, 1, 2, \dots, K\}$ . В начале обслуживания для этой цепи выбирается начальное состояние из множества  $\{1, 2, \dots, K\}$  на основании заданного вероятностного вектора-строки  $\mathbf{v}$ . Далее, в цепи  $k(t)$  происходят изменения состояний в соответствии с заданным субгенератором  $\mathbf{Q}$  до тех пор, пока цепь не достигнет поглощающего состояния 0, интенсивности переходов в которое задаются вектором

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{Q}\mathbf{e}. \quad (2.1)$$

Время обслуживания интерпретируется как время, за которое описанная цепь Маркова  $k(t)$  перейдет в поглощающее состояние [15]. В таких системах массового обслуживания все промежуточные состояния соответствующей цепи Маркова из множества  $\{1, 2, \dots, K\}$  называют фазами обслуживания.

Так как считается, что матрица  $\mathbf{Q} + \mathbf{q}_0\mathbf{v}$  является неприводимой, среднее значение  $b$  времени обслуживания, заданного описанным выше образом, определяется равенством [16]

$$b = -\mathbf{v}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}.$$

Известно также [16], что функция распределения  $B(x)$  времени обслуживания для PH-распределения имеет вид

$$B(x) = 1 - \mathbf{v}e^{\mathbf{Q}x}\mathbf{e}.$$

Обозначим через  $i_k(t)$  количество заявок, обслуживаемых в системе в момент времени  $t$  на  $k$ -ой фазе ( $k = \overline{1, K}$ ), в векторной форме —  $\mathbf{i}(t) = [i_1(t) \ \dots \ i_K(t)]$ . Пусть также  $z(t)$  — длина интервала времени от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки входящего потока. Тогда  $(K + 1)$ -мерный случайный процесс  $\{\mathbf{i}(t), z(t)\}$  будет марковским. Для его распределения вероятностей, заданного в виде  $P(\mathbf{i}, z, t) = P\left\{\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}, z(t) < \frac{z}{N}\right\}$

можно записать равенство

$$\begin{aligned} P(\mathbf{i}, z - N\Delta t, t + \Delta t) = & [P(\mathbf{i}, z, t) - P(\mathbf{i}, N\Delta t, t)] \prod_{k=1}^K (1 + i_k Q_{kk} \Delta t) + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, N\Delta t, t) v_k A(z) + \\ & + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k, z, t) (i_k + 1) Q_{k0} \Delta t + \sum_{k=1}^K \sum_{l \neq k}^K P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l, z, t) (i_k + 1) Q_{kl} \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{e}_k$  — вектор,  $k$ -ая компонента которого равна единице, а остальные — нулю,  $i_k, v_k, Q_{k0}, Q_{kl}$  — элементы векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{v}, \mathbf{q}_0$  и матрицы  $\mathbf{Q}$  соответственно.

Из этого равенства для стационарного распределения  $P(\mathbf{i}, z, t) = P(\mathbf{i}, z)$ ,

обозначив  $\left. \frac{\partial P(\mathbf{i}, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial P(\mathbf{i}, 0)}{\partial z}$ , можно записать систему уравнений Колмо-

рова

$$\begin{aligned} N \frac{\partial P(\mathbf{i}, z)}{\partial z} - N \frac{\partial P(\mathbf{i}, 0)}{\partial z} + P(\mathbf{i}, z) \sum_{k=1}^K i_k Q_{kk} + N \sum_{k=1}^K \frac{\partial P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, 0)}{\partial z} v_k A(z) + \\ + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k, z) \cdot (i_k + 1) Q_{k0} + \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l, z) \cdot (i_k + 1) Q_{kl} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

для всех неотрицательных значений  $\mathbf{i}$  и  $z$  (здесь предполагается  $P(\mathbf{i}, z, t) = 0$ , если хотя бы одна компонента вектора  $\mathbf{i}$  отрицательна).

Для многомерной частичной характеристической функции

$$H(\mathbf{u}, z) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} P(i_1, \dots, i_K, z) \exp \left\{ j \sum_{k=1}^K u_k i_k \right\},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор с компонентами  $u_k$ ,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, из уравнения (2.2) получаем равенство

$$\begin{aligned} N \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} - N \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} Q_{kk} + NA(z) \sum_{k=1}^K e^{ju_k} \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} v_k - \\ - j \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K e^{-ju_k} e^{ju_l} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} Q_{kl} - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} e^{-ju_k} Q_{k0} = 0, \end{aligned}$$

которое в силу (2.1) перепишем в виде следующего уравнения:

$$\frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} \left[ A(z) \sum_{k=1}^K v_k e^{ju_k} - 1 \right] - \frac{j}{N} \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} e^{-ju_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{ju_l} - 1) = 0. \quad (2.3)$$

Подставим в это уравнение  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и обозначим  $R(z) = H(\mathbf{0}, z)$ , получим уравнение

$$R'(z) + R'(0)[A(z) - 1] = 0, \quad (2.4)$$

решение которого имеет вид

$$R(z) = \lambda \int_0^z (1 - A(x)) dx, \quad (2.5)$$

где

$$\lambda = 1 / \int_0^{\infty} x dA(x) = 1 / \int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx.$$

Здесь выполняется равенство  $R'(0) = \left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} \right|_{\substack{\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ z=0}} = \lambda$ .

Аналитическое решение уравнения (2.3) в допредельной ситуации при конечных значениях  $N$  вряд ли возможно, поэтому найдем его асимптотическое решение при  $N \rightarrow \infty$  методом асимптотического анализа [111]. Обозначив

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H(\mathbf{u}, z) = F(\mathbf{w}, z, \varepsilon), \quad (2.6)$$

уравнение (2.3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F(\mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F(\mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) \sum_{k=1}^K v_k e^{j\varepsilon w_k} - 1 \right] - \\ & - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial F(\mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial w_k} e^{-j\varepsilon w_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{j\varepsilon w_l} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обозначив асимптотическое решение этой задачи  $F(\mathbf{w}, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\mathbf{w}, z, \varepsilon)$ , докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $R(z)$  имеет вид (2.5), а вектор  $\mathbf{x}$  с компонентами  $x_k$  определяется равенством

$$\mathbf{x} = -\lambda \mathbf{v} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (2.8)$$

Тогда асимптотическое решение  $F(\mathbf{w}, z)$  уравнения (2.7) имеет вид

$$F(\mathbf{w}, z) = R(z) \exp \left\{ \sum_{k=1}^K j w_k x_k \right\}.$$

*Доказательство.* В уравнении (2.7) выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получим уравнение:

$$\frac{\partial F(\mathbf{w}, z)}{\partial z} + \frac{\partial F(\mathbf{w}, 0)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0,$$

которое имеет вид, аналогичный (2.4), следовательно, решение этого уравнения можно записать в виде

$$F(\mathbf{w}, z) = \Phi(\mathbf{w}) R(z). \quad (2.9)$$

Для нахождения функции  $\Phi(\mathbf{w})$  в уравнении (2.7) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим равенство

$$\frac{\partial F(\mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} \sum_{k=1}^K v_k (e^{j\varepsilon w_k} - 1) - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial F(\mathbf{w}, \infty, \varepsilon)}{\partial w_k} e^{-j\varepsilon w_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{j\varepsilon w_l} - 1) = 0.$$

Выполнив в этом равенстве несложные преобразования, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно записать

$$\frac{\partial F(\mathbf{w}, 0)}{\partial z} \sum_{k=1}^K v_k w_k - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial F(\mathbf{w}, \infty)}{\partial w_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l = 0.$$

Подставляя сюда произведение (2.9), получим

$$R'(0) \sum_{k=1}^K v_k w_k - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial \Phi(\mathbf{w}) / \partial w_k}{\Phi(\mathbf{w})} \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l = 0. \quad (2.10)$$

Функцию  $\Phi(\mathbf{w})$  запишем в виде

$$\Phi(\mathbf{w}) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^K j w_k x_k \right\},$$

тогда в силу (2.10), можно записать равенство

$$\lambda \sum_{k=1}^K v_k w_k + \sum_{k=1}^K x_k \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l = 0,$$

из которого следует, что величины  $x_k$  являются решением системы уравнений

$$\lambda v_l + \sum_{k=1}^K x_k Q_{kl} = 0.$$

В матричной форме эта система имеет вид

$$\lambda \mathbf{v} + \mathbf{xQ} = \mathbf{0},$$

Откуда следует, что выполняется равенство (2.8). *Теорема доказана.*

Так как величины  $x_k$  имеют смысл нормированного величиной  $N$  среднего значения числа заявок, обслуживаемых в системе на  $k$ -ой фазе, то нормированное суммарное среднее значение  $\kappa_1$  составляет

$$\kappa_1 = \mathbf{x}\mathbf{e} = -\lambda \mathbf{vQ}^{-1} \mathbf{e} = \lambda (-\mathbf{vQ}^{-1} \mathbf{e}) = \lambda b, \quad (2.11)$$

что естественно совпадает с суммарным средним значением числа заявок в системе и в допредельной ситуации, которое можно найти, применяя формулу Литтла [201].

Выполним более детальное исследование числа заявок в рассматриваемой системе GI/PN/ $\infty$ . В исходном уравнении (2.3) выполним замену

$$H(\mathbf{u}, z) = H_2(\mathbf{u}, z) \exp \left\{ \sum_{k=1}^K j u_k N x_k \right\},$$

тогда для функции  $H_2(\mathbf{u}, z)$  получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, z)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} \left[ A(z) \sum_{k=1}^K v_k e^{ju_k} - 1 \right] + \\ & + H_2(\mathbf{u}, z) \sum_{k=1}^K x_k e^{-ju_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{ju_l} - 1) - \frac{j}{N} \sum_{k=1}^K \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} e^{-ju_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{ju_l} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь  $H_2(\mathbf{u}, z)$  является частичной многомерной характеристической функцией значений центрированных случайных процессов  $i_k(t) - Nx_k$ .

Применяя метод асимптотического анализа, в уравнении (2.12) аналогично (2.6) выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_2(\mathbf{u}, z) = F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon),$$

получим уравнение для функции  $F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) \sum_{k=1}^K v_k e^{j\varepsilon w_k} - 1 \right] + \\ & + F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon) \sum_{k=1}^K x_k e^{-j\varepsilon w_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{j\varepsilon w_l} - 1) - \\ & - j\varepsilon \sum_{k=1}^K \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial w_k} e^{-j\varepsilon w_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{j\varepsilon w_l} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначим  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{w})$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.2.** *Предельное при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $z \rightarrow \infty$  решение  $\Phi_2(\mathbf{w})$  уравнения (2.13) имеет вид*

$$\Phi_2(\mathbf{w}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K w_k G_{kl} w_l \right\}, \quad (2.14)$$

где матрица  $\mathbf{G} = \{G_{kl}\}$  является решением уравнения

$$\mathbf{G}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{G} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \text{diag}\{\mathbf{x}\} - \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

*Доказательство.* Решение  $F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon)$  уравнения (2.13) запишем в виде следующего разложения:

$$F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon) = \Phi(\mathbf{w}) \left\{ R(z) + \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k f_k(z) \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (2.16)$$

В уравнении (2.13), разложив экспоненты, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K v_k j \varepsilon w_k \right] + \\ & + F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon) \sum_{k=1}^K x_k \sum_{l=1}^K Q_{kl} j \varepsilon w_l = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

которое в силу (2.10) перепишем в виде

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K v_k j \varepsilon w_k \right] + \lambda F_2(\mathbf{w}, z, \varepsilon) \sum_{k=1}^K v_k j \varepsilon w_k = O(\varepsilon^2)$$

Подставляя сюда разложение (2.16), нетрудно показать, что функции  $f_k(z)$  удовлетворяют уравнениям

$$f'_k(z) + f'_k(0)[A(z) - 1] + \lambda v_k [A(z) - R(z)] = 0,$$

поэтому

$$f'_k(0) - \lambda f_k(\infty) = \lambda^2 v_k \int_0^{\infty} [A(z) - R(z)] dz.$$

Можно показать, что

$$\int_0^{\infty} [A(z) - R(z)] dz = \frac{\lambda^2 \sigma^2 - 1}{2\lambda},$$

поэтому для функций  $f_k(z)$  выполняются равенства

$$f'_k(0) - \lambda f_k(\infty) = \frac{1}{2} \lambda (\lambda^2 \sigma^2 - 1) v_k. \quad (2.17)$$

В уравнении (2.13) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , а экспоненты разложим с точностью до  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, \varepsilon)}{\partial z} \sum_{k=1}^K v_k \left[ j \varepsilon w_k + \frac{(j \varepsilon w_k)^2}{2} \right] + F_2(\mathbf{w}, \infty, \varepsilon) \sum_{k=1}^K x_k (1 - j \varepsilon w_k) \sum_{l=1}^K Q_{kl} \left[ j \varepsilon w_l + \frac{(j \varepsilon w_l)^2}{2} \right] - \\ & - j \varepsilon \sum_{k=1}^K \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, \infty, \varepsilon)}{\partial w_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} j \varepsilon w_l = O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставляя сюда разложение (2.16) и выполняя несложные преобразования, получим равенство

$$\sum_{k=1}^K w_k [f'_k(0) - \lambda f_k(\infty)] \sum_{l=1}^K v_l w_l - \sum_{k=1}^K x_k w_k \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l - \sum_{k=1}^K \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}) / \partial w_k}{\Phi_2(\mathbf{w})} \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l = 0,$$

которое в силу (2.17) перепишем в виде

$$-\sum_{k=1}^K \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}) / \partial w_k}{\Phi_2(\mathbf{w})} \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l + \frac{1}{2} \lambda (\lambda^2 \sigma^2 - 1) \sum_{k=1}^K v_k w_k \sum_{l=1}^K v_l w_l - \sum_{k=1}^K x_k w_k \sum_{l=1}^K Q_{kl} w_l = 0.$$

Подставляя сюда выражение (2.14) для функции  $\Phi_2(\mathbf{w})$ , получим равенство

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^K w_m \sum_{k=1}^K G_{mk} \sum_{n=1}^K Q_{kn} w_n + \sum_{n=1}^K w_n \sum_{k=1}^K G_{kn} \sum_{m=1}^K Q_{km} w_m + \lambda (\lambda^2 \sigma^2 - 1) \sum_{m=1}^K v_m w_m \sum_{n=1}^K v_n w_n - \\ - \sum_{m=1}^K x_m w_m \sum_{n=1}^K Q_{mn} w_n - \sum_{n=1}^K x_n w_n \sum_{m=1}^K Q_{nm} w_m = 0, \end{aligned}$$

из которого можно записать  $K^2$  равенств для всех  $m, n = \overline{1, K}$ :

$$\sum_{k=1}^K G_{mk} Q_{kn} + \sum_{k=1}^K G_{kn} Q_{km} + \lambda (\lambda^2 \sigma^2 - 1) v_m v_n - x_m Q_{mn} - x_n Q_{nm} = 0.$$

В матричном виде получаем уравнение относительно матрицы  $\mathbf{G}$  в виде

$$\mathbf{GQ} + \mathbf{Q}^T \mathbf{G} = \text{diag}\{\mathbf{x}\} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \text{diag}\{\mathbf{x}\} - \lambda (\lambda \sigma^2 - 1) \mathbf{v}^T \mathbf{v},$$

совпадающее с (2.15). Теорема доказана.

Нормированная дисперсия  $\kappa_2$  числа заявок в системе GI/PH/ $\infty$  определяется равенством

$$\kappa_2 = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e}. \quad (2.18)$$

Для нее справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Нормированная дисперсия  $\kappa_2$  числа заявок в системе GI/PH/ $\infty$  равна

$$\kappa_2 = \lambda b + \lambda (\lambda^2 \sigma^2 - 1) \beta,$$

где параметр  $\beta$  определяется равенством

$$\beta = \int_0^{\infty} (\mathbf{v} e^{\mathbf{Q}z} \mathbf{e})^2 dz = \int_0^{\infty} [1 - B(z)]^2 dz. \quad (2.19)$$

*Доказательство.* Решение  $\mathbf{G}$  уравнения (2.15) запишем в виде

$$\mathbf{G} = \text{diag}\{\mathbf{x}\} + \lambda (\lambda^2 \sigma^2 - 1) \mathbf{G}_1, \quad (2.20)$$

подставляя которое в (2.15) получим уравнение для матрицы  $\mathbf{G}_1$

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{G}_1 = -\mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Полученное уравнение относится к классу матричных уравнений вида

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C},$$

для которых в [9] сформулирована теорема о том, что единственным решением такого уравнения является матрица  $\mathbf{X}$  вида

$$\mathbf{X} = -\int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C} e^{\mathbf{B}t} dt,$$

поэтому решение  $\mathbf{G}_1$  уравнения (2.21) можно записать в виде

$$\mathbf{G}_1 = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{Q}^T t} \mathbf{v}^T \mathbf{v} e^{\mathbf{Q}t} dt.$$

В силу полученного равенства и равенств (2.18) и (2.20) можно записать

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T [\text{diag}\{\mathbf{x}\} + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \mathbf{G}_1] \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \text{diag}\{\mathbf{x}\} \mathbf{e} + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \mathbf{e}^T \mathbf{G}_1 \mathbf{e} = \\ &= \mathbf{x} \mathbf{e} + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \mathbf{e}^T \int_0^{\infty} e^{\mathbf{Q}^T t} \mathbf{v}^T \mathbf{v} e^{\mathbf{Q}t} dt \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.11) получаем

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \lambda b + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T e^{\mathbf{Q}^T t} \mathbf{v}^T) (\mathbf{v} e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{e}) dt = \lambda b + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \int_0^{\infty} (\mathbf{v} e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{e})^T (\mathbf{v} e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{e}) dt = \\ &= \lambda b + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \int_0^{\infty} (\mathbf{v} e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{e})^2 dt = \lambda b + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \beta, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где параметр  $\beta$  определяется равенством (2.19). *Теорема доказана.*

Таким образом, для системы GI/PН/ $\infty$  в условиях высокой интенсивности входящего потока распределение числа заявок в системе аппроксимируется гауссовским распределением с математическим ожиданием  $N\kappa_1$  и дисперсией  $N\kappa_2$ , где параметры  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  определяются равенствами

$$\kappa_1 = \lambda b, \quad \kappa_2 = \lambda b + \lambda(\lambda^2 \sigma^2 - 1) \beta$$

и зависят лишь от первого и второго моментов длин интервалов входящего рекуррентного потока, а также среднего значения  $b$  и параметра  $\beta$  из (2.19) для времени обслуживания, что указывает на возможность сохранения вида этих параметров и для произвольных функций  $B(x)$  распределения времени обслуживания в системах GI/GI/ $\infty$ .

**Определение начальных моментов числа заявок в системе.** Для определения области применимости полученной аппроксимации в Главе 5 будет производиться сравнение начальных моментов допредельного и асимптотического распределений числа заявок в системе. Для этого найдем начальные моменты допредельного распределения числа заявок в системе.

Частичная характеристическая функция  $H(\mathbf{u}, z)$   $(K + 1)$ -мерного случайного процесса  $\{\mathbf{i}(t), z(t)\}$  является решением уравнения (2.3), которое для удобства перепишем в виде

$$\frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} \left[ A(z) \sum_{k=1}^K v_k e^{ju_k} - 1 \right] - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} e^{-ju_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{ju_l} - 1) = 0, \quad (2.23)$$

где для удобства скалярный сомножитель  $1/N$  записан в значениях элементов матрицы  $\mathbf{Q}$ . Если в этом уравнении положить  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и обозначить

$$H(\mathbf{0}, z) = R(z),$$

то для функции  $R(z)$  получается уравнение (2.4), решение которого имеет вид

$$R(z) = \lambda \int_0^z (1 - A(x)) dx.$$

Известно [111], что начальные моменты случайной величины определяются значениями производных от характеристической функции в нуле. Используя это свойство, продифференцируем уравнение (2.23) по  $u_m$ ,  $m = \overline{1, K}$ , получим равенства

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_m \partial z} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_m \partial z} \left[ A(z) \sum_{k=1}^K v_k e^{ju_k} - 1 \right] + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} A(z) j e^{ju_m} v_m - \\ & - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_m \partial u_k} e^{-ju_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{ju_l} - 1) - \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_m} e^{-ju_m} \sum_{l=1}^K Q_{ml} (e^{ju_l} - 1) + \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} e^{-ju_k} Q_{km} e^{ju_m} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Полагая в этих уравнениях  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и обозначая

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = ja_m(z),$$

получим систему уравнений

$$a'_m(z) + a'_m(0)[A(z) - 1] + \lambda A(z)v_m + \sum_{k=1}^K a_k(z)Q_{km} = 0$$

относительно компонент  $a_m(z)$  вектора-строки  $\mathbf{a}(z) = [a_1(z), \dots, a_K(z)]$ , который в силу этой системы удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{a}'(z) + \mathbf{a}'(0)[A(z) - 1] + \lambda A(z)\mathbf{v} + \mathbf{a}(z)\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

При  $z \rightarrow \infty$ , обозначая  $\mathbf{a}(\infty) = \mathbf{a}$ , из (2.25) относительно вектора  $\mathbf{a}$  получим уравнение

$$\lambda \mathbf{v} + \mathbf{a}\mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{a} = -\lambda \mathbf{v}\mathbf{Q}^{-1}. \quad (2.26)$$

Компоненты  $a_m$  вектора  $\mathbf{a}$  имеют смысл среднего значения числа заявок, обслуживаемых в системе на  $m$ -ой фазе РН-обслуживания.

Среднее значение  $\kappa_1$  числа заявок в системе (первый момент) определяется равенством

$$\kappa_1 = \mathbf{a}\mathbf{e} = -\lambda \mathbf{v}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e} = \lambda(-\mathbf{v}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}) = \lambda b, \quad (2.27)$$

что естественно совпадает с результатом, полученным из теоремы Литтла [201].

Для нахождения значения второго момента необходимо найти вектор  $\mathbf{a}'(0)$  из уравнения (2.25). Для этого в уравнении (2.25) выполним преобразование Лапласа – Стильтеса, обозначив

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dA(z) = A^*(\alpha), \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\mathbf{a}(z) = \mathbf{a}^*(\alpha).$$

Получим равенство

$$\mathbf{a}^*(\alpha)(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{a}'(0)[1 - A^*(\alpha)] - \lambda A^*(\alpha)\mathbf{v}. \quad (2.28)$$

Будем полагать, что матрица  $\mathbf{Q}$  имеет только простые отрицательные действительные характеристические числа  $\alpha_l$ , собственные векторы (столбцы) для которых обозначим как  $\mathbf{X}_l$ , ( $l = \overline{1, K}$ ). Так как

$$(\alpha_l \mathbf{I} + \mathbf{Q})\mathbf{X}_l = \mathbf{0},$$

то в силу (2.28) выполняются равенства

$$\mathbf{a}^*(\alpha_l)(\alpha_l \mathbf{I} + \mathbf{Q})\mathbf{X}_l = 0 = \mathbf{a}'(0)[1 - A^*(\alpha_l)]\mathbf{X}_l - \lambda A^*(\alpha_l)\mathbf{v}\mathbf{X}_l, \quad l = \overline{1, K},$$

поэтому вектор  $\mathbf{a}'(0)$  является решением системы уравнений

$$\mathbf{a}'(0)\mathbf{X}_l = \lambda \frac{A^*(\alpha_l)}{1 - A^*(\alpha_l)}\mathbf{v}\mathbf{X}_l, \quad l = \overline{1, K}. \quad (2.29)$$

Обозначив через  $\mathbf{y}$  вектор-строку с компонентами

$$y_l = \lambda \frac{A^*(\alpha_l)}{1 - A^*(\alpha_l)}\mathbf{v}\mathbf{X}_l,$$

а через  $\mathbf{X}$  – матрицу, столбцами которой являются собственные векторы  $\mathbf{X}_l$ , получаем решение системы (2.29) в виде

$$\mathbf{a}'(0) = \mathbf{y}\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.30)$$

Векторы  $\mathbf{a}$  из (2.26) и  $\mathbf{a}'(0)$  из (2.30) будут использованы ниже для определения значения второго момента числа заявок в системе GI/PH/ $\infty$ .

В равенстве (2.24) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , обозначив  $H(\mathbf{u}, \infty) = H(\mathbf{u})$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_m \partial z} \sum_{k=1}^K v_k (e^{ju_k} - 1) + j \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} e^{ju_m} v_m - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u})}{\partial u_m \partial u_k} e^{-ju_k} \sum_{l=1}^K Q_{kl} (e^{ju_l} - 1) - \\ & - \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_m} e^{-ju_m} \sum_{l=1}^K Q_{ml} (e^{ju_l} - 1) + \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_k} e^{-ju_k} Q_{km} e^{ju_m} = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения второго момента числа заявок в системе продифференцируем это равенство по  $u_n$ , а сумму всех слагаемых, которые при  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  равны нулю, обозначим  $g(\mathbf{u})$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & j \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_m \partial z} v_n + j \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_n \partial z} v_m + \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u})}{\partial u_m \partial u_k} Q_{kn} - j \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_m} Q_{mn} + \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u})}{\partial u_n \partial u_k} Q_{kn} - j \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_n} Q_{nm} + g(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned}$$

Положив в этом равенстве  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и обозначая

$$\left. \frac{\partial^2 H(\mathbf{u})}{\partial u_m \partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = j^2 A_{mk},$$

получим систему уравнений относительно  $A_{mk}$

$$\sum_{k=1}^K A_{mk} Q_{kn} + \sum_{k=1}^K A_{nk} Q_{km} = a_m Q_{mn} + a_n Q_{nm} - a'_m(0)v_n - a'_n(0)v_m,$$

которую перепишем в матричном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{a}\}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \text{diag}\{\mathbf{a}\} - \mathbf{v}^T \mathbf{a}'(0) - [\mathbf{a}'(0)]^T \mathbf{v}. \quad (2.31)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – матрица вторых смешанных начальных моментов  $A_{mk}$ . Для перехода к центральным моментам  $\mathbf{G}$  в уравнении (2.31) выполним замену

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{a}^T \mathbf{a}.$$

Принимая во внимание равенство (2.26), для матрицы  $\mathbf{G}$  получим уравнение

$$\mathbf{G}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{G} = \mathbf{C},$$

где  $\mathbf{C} = \text{diag}\{\mathbf{a}\}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \text{diag}\{\mathbf{a}\} + [\lambda \mathbf{a} - \mathbf{a}'(0)]^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T [\lambda \mathbf{a} - \mathbf{a}'(0)]$ .

Применяя интегральную форму записи решения таких уравнений [9], матрицу  $\mathbf{G}$  вторых частичных смешанных центральных моментов запишем в виде

$$\mathbf{G} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{Q}^T t} \mathbf{C} e^{\mathbf{Q}t} dt,$$

тогда скалярная дисперсия  $\kappa_2$  числа заявок в системе GI/PH/ $\infty$  в допредельном случае будет равна

$$\kappa_2 = \mathbf{e}^T \left( \int_0^{\infty} e^{\mathbf{Q}^T t} \mathbf{C} e^{\mathbf{Q}t} dt \right) \mathbf{e}. \quad (2.32)$$

Параметр интенсивности входящего потока  $N$  присутствует в этом выражении в элементах матрицы  $\mathbf{Q}$ , а также в векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'(0)$ , входящих в матрицу  $\mathbf{C}$ .

## 2.2 Метод выделения первого скачка

В работе [16] описано применение метода выделения первого скачка [65]

для исследования системы GI/GI/∞. Пусть на вход системы поступает рекуррентный поток заявок, длины интервалов между последовательными моментами поступления заявок имеют функцию распределения  $A(x)$  и конечные моменты первого и второго порядка. Обозначим через  $B(x)$  функцию распределения времени обслуживания одной заявки. Пусть в начальный момент времени  $t_0 = 0$  система свободна и в нее поступает первая заявка. Тогда для нестационарных вероятностей  $P(i, t)$  перехода случайного процесса  $i(t)$  числа заявок в системе из нулевого состояния в  $i$ -ое за время  $t$  можно записать следующую систему интегральных уравнений [16]:

$$P(0, t) = B(t) \left[ 1 - A(t) + \int_0^t P(0, t-x) dA(x) \right],$$

$$P(1, t) = B(t) \int_0^t P(1, t-x) dA(x) + [1 - B(t)] \left[ 1 - A(t) + \int_0^t P(0, t-x) dA(x) \right],$$

$$P(i, t) = B(t) \int_0^t P(i, t-x) dA(x) + [1 - B(t)] \int_0^t P(i-1, t-x) dA(x), \quad i > 1,$$

которая для нестационарной характеристической функции

$H(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P(i, t)$  принимает вид уравнения

$$H(u, t) = [B(t) + (1 - B(t))e^{ju}] \left[ 1 - A(t) + \int_0^t H(u, t-x) dA(x) \right].$$

В [16] с помощью описанного подхода лишь составлены интегральные уравнения относительно вероятностей  $P(i, t)$ , в настоящей же работе выполним их решение методом асимптотического анализа [111] в условиях высокой интенсивности входящего потока. Для этого запишем функцию  $A(t)$  в виде  $A(Nt)$  (см. п. 1.1), получим уравнение

$$H(u, t) = [B(t) + (1 - B(t))e^{ju}] \left[ 1 - A(Nt) + \int_0^t H(u, t-x) dA(Nx) \right]. \quad (2.33)$$

**Асимптотический анализ первого порядка.** Используя методику асимптотического анализа [111], выполним в (2.33) замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u, t) = F_1(w, t, \varepsilon),$$

получим уравнение

$$F_1(w, t, \varepsilon) = \left[ B(t) + (1 - B(t))e^{j\varepsilon w} \right] \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^t F_1(w, t - x, \varepsilon) dA\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]. \quad (2.34)$$

Докажем следующее утверждение относительно его асимптотического решения  $F_1(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, t, \varepsilon)$ .

**Теорема 2.4.** *Асимптотическое решение  $F_1(w, t)$  уравнения (2.34) имеет вид*

$$F_1(w, t) = \exp \left\{ jw\lambda \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau \right\}. \quad (2.35)$$

*Доказательство.* В уравнении (2.34) в интеграле выполним замену  $z = x/\varepsilon$ , получим

$$F_1(w, t, \varepsilon) = \left[ B(t) + (1 - B(t))e^{j\varepsilon w} \right] \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} F_1(w, t - z\varepsilon, \varepsilon) dA(z) \right].$$

Используя здесь разложения

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2),$$

$$F_1(w, t - z\varepsilon, \varepsilon) = F_1(w, t, \varepsilon) - z\varepsilon \frac{\partial F_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + O(\varepsilon^2),$$

получаем

$$F_1(w, t, \varepsilon) = \left[ 1 + j\varepsilon w - j\varepsilon w B(t) \right] \times \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \left\{ F_1(w, t, \varepsilon) - z\varepsilon \frac{\partial F_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} \right\} dA(z) \right] + O(\varepsilon^2).$$

Выполним в этом выражении предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, t, \varepsilon) = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + j\varepsilon w(1 - B(t)) \right] \left[ \int_0^{\infty} F_1(w, t, \varepsilon) dA(z) - \int_0^{\infty} z\varepsilon \frac{\partial F_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} dA(z) \right] + O(\varepsilon^2) \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + j\varepsilon w(1 - B(t)) \right] \left[ F_1(w, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial F_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} a \right] + O(\varepsilon^2) \right\}.
\end{aligned}$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial F_1(w, t)}{\partial t} = jw\lambda[1 - B(t)]F_1(w, t),$$

решая которое при начальном условии  $F_1(w, 0) = 1$ , получаем решение в виде (2.35). Теорема доказана.

**Асимптотический анализ второго порядка.** Выполним в (2.33) замену

$$H(u, t) = H_2(u, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau \right\}, \quad (2.36)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx}. \quad (2.37)$$

Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& H_2(u, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau \right\} = [B(t) + e^{ju} \{1 - B(t)\}] \times \\
& \times \left[ 1 - A(Nt) + \int_0^t H_2(u, t - x) \exp \left\{ juN\lambda \int_0^{t-x} [1 - B(\tau)] d\tau \right\} dA(Nx) \right].
\end{aligned}$$

Выполнив здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u, t) = F_2(w, t, \varepsilon), \quad (2.38)$$

получим следующее уравнение относительно функции  $F_2(w, t, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned}
& F_2(w, t, \varepsilon) \exp \left\{ jw \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau \right\} = [B(t) + e^{j\varepsilon w} \{1 - B(t)\}] \times \\
& \times \left[ 1 - A \left( \frac{t}{\varepsilon^2} \right) + \int_0^t F_2(w, t - x, \varepsilon) \exp \left\{ jw \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^{t-x} [1 - B(\tau)] d\tau \right\} dA \left( \frac{x}{\varepsilon^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.5.** Пусть функция распределения  $A(x)$  удовлетворяет свойству

$$1 - A \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) = o(\varepsilon) \tag{2.40}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда асимптотическое решение  $F_2(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, t, \varepsilon)$  уравнения

(2.39) имеет вид:

$$F_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left( \lambda \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau + \kappa \int_0^t [1 - B(\tau)]^2 d\tau \right) \right\}, \tag{2.41}$$

где

$$\kappa = \lambda^3 (\sigma^2 - a^2). \tag{2.42}$$

*Доказательство.* В уравнении (2.39) в интеграле по  $dA(\cdot)$  сделаем замену  $z = x / \varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned}
F_2(w, t, \varepsilon) = & [B(t) + e^{j\varepsilon w} \{1 - B(t)\}] \cdot \left[ \left\{ 1 - A \left( \frac{t}{\varepsilon^2} \right) \right\} \exp \left\{ - jw \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau \right\} + \right. \\
& \left. + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} F_2(w, t - z\varepsilon^2, \varepsilon) \exp \left\{ - jw \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_{t-z\varepsilon^2}^t [1 - B(\tau)] d\tau \right\} dA(z) \right].
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Используя разложение  $\int_{t-z\varepsilon^2}^t [1 - B(\tau)] d\tau = z\varepsilon^2 [1 - B(t)] + O(\varepsilon^4)$ , получаем

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-jw\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_{t-z\varepsilon^2}^t[1-B(\tau)]d\tau\right\} &= \exp\left\{-jw\frac{\lambda}{\varepsilon}\left[z\varepsilon^2(1-B(t))+O(\varepsilon^4)\right]\right\} = \\
&= \exp\left\{-j\varepsilon w\lambda z[1-B(t)]+O(\varepsilon^3)\right\} = \\
&= 1-j\varepsilon w\lambda z[1-B(t)]+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\lambda^2 z^2[1-B(t)]^2+O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Подставляя (2.40) и (2.44) в (2.43) и используя разложения

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3),$$

$$F_2(w, t - z\varepsilon^2, \varepsilon) = F_2(w, t, \varepsilon) - z\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + o(\varepsilon^2),$$

получаем

$$\begin{aligned}
F_2(w, t, \varepsilon) &= \left\{ B(t) + [1 - B(t)] + j\varepsilon w[1 - B(t)] + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}[1 - B(t)] \right\} \times \\
&\quad \times \int_0^\infty \left\{ \left[ F_2(w, t, \varepsilon) - z\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} \right] \times \right. \\
&\quad \times \left. \left[ 1 - j\varepsilon w\lambda z[1 - B(t)] + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\lambda^2 z^2[1 - B(t)]^2 \right] dA(z) \right\} + o(\varepsilon^2) = \\
&= \left\{ 1 + j\varepsilon w[1 - B(t)] + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}[1 - B(t)] \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ F_2(w, t, \varepsilon) - j\varepsilon w F_2(w, t, \varepsilon)\lambda a[1 - B(t)] + \right. \\
&\quad \left. + F_2(w, t, \varepsilon)\frac{\lambda^2 a_2}{2} \left( (j\varepsilon w)^2[1 - B(t)]^2 - \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} a \right) \right\} + o(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

где  $a_2$  – второй начальный момент случайной величины с функцией распределения  $A(x)$ . В итоге получаем уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} a = F_2(w, t, \varepsilon) \left\{ \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}[1 - B(t)] + \left[ \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1 \right] (j\varepsilon w)^2 [1 - B(t)]^2 \right\} + o(\varepsilon^2).$$

Поделив обе части этого уравнения на  $\varepsilon^2$  и выполнив предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом того, что  $\lambda^3(a_2 - 2a^2) = \lambda^3(\sigma^2 - a^2) = \kappa$ , получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции

$$F_2(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, t, \varepsilon):$$

$$\frac{\partial F_2(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \left\{ \lambda [1 - B(t)] + \kappa [1 - B(t)]^2 \right\} F_2(w, t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $F_2(w, 0) = 1$ , получаем (2.41).

*Теорема доказана.*

Выполним в (2.41) замены, обратные (2.38) и (2.36), получим следующее выражение для аппроксимации функции  $H(u, t)$  при достаточно больших значениях  $N$ :

$$H(u, t) \approx \exp \left\{ juN\lambda \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau + \frac{(ju)^2}{2} N \left( \lambda \int_0^t [1 - B(\tau)] d\tau + \kappa \int_0^t [1 - B(\tau)]^2 d\tau \right) \right\}. \quad (2.45)$$

Пусть случайная величина времени обслуживания имеет конечное среднее

$$b = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] d\tau < \infty. \quad (2.46)$$

Из (2.45) при  $t \rightarrow \infty$  получаем следующую аппроксимацию  $h^{(2)}(u)$  для характеристической функции  $h(u)$  числа заявок в системе в стационарном режиме функционирования при достаточно больших значениях  $N$ :

$$h(u) \approx h^{(2)}(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} N [\lambda b + \kappa \beta] \right\}, \quad (2.47)$$

где

$$\beta = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau. \quad (2.48)$$

Таким образом, число заявок в системе GI/GI/ $\infty$  является асимптотически нормальным с математическим ожиданием  $N\lambda b$  и дисперсией  $N(\lambda b + \kappa \beta)$ .

### 2.3 Метод динамического просеивания

В настоящем разделе представлено подробное описание оригинального метода динамического просеивания (просеянного потока), впервые представ-

ленного в [111]. Далее этот метод будет применен для СМО с различными типами входящих потоков. В следующих главах на основе данного подхода построен метод многомерного динамического просеивания, который в совокупности с методом асимптотического анализа [111] позволяет проводить исследование многофазных СМО и СеМО с неограниченным числом приборов. Также в настоящем разделе впервые выполнено доказательство основного утверждения, на котором базируется данный подход.

### 2.3.1 Просеянный поток

Базовой конструкцией для применения метода динамического просеивания является просеянный поток. Принцип его построения и дальнейшей марковизации подробно опишем на примере просеивания рекуррентного потока.

Итак, пусть задан рекуррентный поток событий, моменты наступления которых обозначим  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ , причем  $t_{k-1} < t_k$ , для  $k = 1, 2, \dots$ , где  $t_0$  – некоторый начальный момент. Поток задан с помощью функций распределения  $A_1(\tau)$  для величины  $\tau_1 = t_1 - t_0$  и  $A(\tau)$  – для величин  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ , если  $k > 1$ . При этом  $A_1(\tau)$  для рекуррентного потока полностью определяется через  $A(\tau)$  (см. п. 1.1).

Основываясь на событиях данного рекуррентного потока (который в дальнейшем будем называть исходным), построим другой, *просеянный* поток событий. Для этого при  $t \geq t_0$  определим непрерывную функцию  $S(t)$ , значения которой принадлежат отрезку  $[0, 1]$ . Просеянный поток будем формировать следующим образом. Событие исходного потока, наступившее в момент времени  $t_k$ ,  $k \geq 1$ , отображается в просеянном потоке (генерирует событие в нем) с вероятностью, равной  $S(t_k)$ . Так как вероятности просеивания  $S(t_k)$  зависят от значения  $t_k$ , то будем называть их динамическими.

Обозначим  $n(t)$  – число событий, просеянного потока, наступивших в нем на промежутке  $[t_0, t)$ . Очевидно, что считающий процесс  $n(t)$  не является марковским. Проверим, будет ли являться марковским двумерный случайный

процесс  $\{n(t), z(t)\}$ , где  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента наступления следующего события в исходном рекуррентном потоке. Очевидно, что в начальный момент времени  $n(t_0) = 0$ , а величина  $z(t_0)$  распределена по закону  $A_1(\tau)$ . Пусть теперь нам известны значения компонент процесса  $\{n(t), z(t)\}$  в некоторый момент времени  $t$ , тогда их значения в момент времени  $t + \Delta t$  определяются следующим образом:

- если  $z(t) > \Delta t$ , то  $n(t + \Delta t) = n(t)$ , а  $z(t + \Delta t) = z(t) - \Delta t$ ;

- если же  $z(t) \leq \Delta t$ , то с вероятностью  $S(t)$  будет  $n(t + \Delta t) = n(t) + 1$ , а с вероятностью  $[1 - S(t)]$  получим  $n(t + \Delta t) = n(t)$ , при этом значение  $z(t + \Delta t)$  определяется как для случайной величины, распределенной по закону  $A(\tau)$ .

Таким образом, значения компонент процесса  $\{n(t), z(t)\}$  в будущем полностью определяются значениями этих компонент в настоящем и не зависят от их значений в прошлом. Следовательно, двумерный случайный процесс  $\{n(t), z(t)\}$  для просеянного рекуррентного потока является марковским.

Рассмотрим теперь в качестве исходного МАР-поток, заданный представлением  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$ . Пусть процесс  $m(t)$  описывает состояние управляющего этим потоком марковского процесса в момент времени  $t$ . Зададим функцию  $S(t) \in [0, 1]$ ,  $t \geq t_0$ . Аналогично описанному выше способу сформируем из этого МАР-потока просеянный поток, построенный на основе динамических вероятностей  $S(t)$ . Очевидно, что для марковизации считающего процесса  $n(t)$  для такого просеянного потока в качестве дополнительной компоненты достаточно добавить значение  $m(t)$  – несложно показать, что процесс  $\{n(t), m(t)\}$  будет марковским.

Наконец, все тем же способом выполним просеивание и для полумарковского потока, заданного полумарковской матрицей  $\mathbf{A}(x)$ . В этом случае для марковизации считающего процесса просеянного потока потребуются две дополнительных компоненты:  $l(t)$  – состояние случайного процесса, определяемого выражением (1.49), и  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента следующего события в исходном полумарковском потоке. Таким образом,

марковским будет трехмерный случайный процесс  $\{n(t), l(t), z(t)\}$ .

Для удобства компоненты, необходимые для марковизации считающего процесса  $n(t)$ , приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Компоненты марковизации считающего процесса  $n(t)$

Тип входящего потока	Марковский процесс	Пояснения
рекуррентный	$\{n(t), z(t)\}$	$z(t)$ – остаточное время
МАР	$\{n(t), m(t)\}$	$m(t)$ – состояние управляющего процесса
полумарковский	$\{n(t), l(t), z(t)\}$	$z(t)$ – остаточное время, $l(t)$ – состояние случайного процесса (1.49)

### 2.3.2 Метод динамического просеивания (просеянного потока)

Рассмотрим теперь систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает некоторый поток заявок. Входящая заявка занимает любой свободный прибор и находится на обслуживании в системе в течение интервала времени случайной длины, которая имеет заданную непрерывную функцию распределения  $B(t)$ .

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  система пуста. Обозначим  $i(t)$  – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент времени  $t \geq t_0$ . Подход, основанный на использовании построенного выше просеянного потока, заключается в следующем. Зафиксируем некоторый момент времени  $T$  в будущем:  $T > t_0$ . Функцию  $S(t)$ , определяющую вероятности динамического просеивания событий входящего потока, зададим в виде

$$S(t) = 1 - B(T - t). \quad (2.49)$$

Очевидно, что функция  $S(t)$ , заданная таким образом, удовлетворяет необходимым условиям – она непрерывна и ее значения принадлежат отрезку  $[0, 1]$ . Для считающего процесса  $n(t)$  – числа событий, наступивших в таком просеянном потоке на промежутке  $[t_0, t]$ , выше изложены способы его марковизации для различных типов исходных потоков. Это позволяет применять тео-

рию марковских процессов к исследованию этого процесса и получать результаты, касающиеся его вероятностных характеристик.

Теперь установим связь между построенным таким образом процессом  $n(t)$  и процессом  $i(t)$ , который является целью исследований.

**Теорема 2.6.** *Законы распределения вероятностей значений случайных процессов  $i(t)$  и  $n(t)$  в момент времени  $t = T$  совпадают:*

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\} \quad (2.50)$$

для любых целых  $m \geq 0$ .

*Доказательство.* Пусть в рассматриваемую систему массового обслуживания из входящего потока на промежутке  $[t_0, T]$  поступило  $K \geq 0$  заявок (причем величина  $K$  никак не ограничена сверху). Пусть нам известны моменты поступления этих заявок:  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K \leq T$ . Найдем условную вероятность  $P\{i(T) = m | t_1, \dots, t_K\}$  того, что в момент времени  $T$  в системе будет находиться на обслуживании ровно  $m \leq K$  заявок при условии, что моменты поступления этих заявок  $t_1, \dots, t_K$ . Для значений  $m = 0, 1, 2, K$  имеем

$$P\{i(T) = 0 | t_1, \dots, t_K\} = \prod_{l=1}^K B(T - t_l), \quad (2.51)$$

$$P\{i(T) = 1 | t_1, \dots, t_K\} = \sum_{k=1}^K [1 - B(T - t_k)] \prod_{l \neq k} B(T - t_l),$$

$$P\{i(T) = 2 | t_1, \dots, t_K\} = \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2 \neq k_1} \prod_{l \in \{k_1, k_2\}} [1 - B(T - t_l)] \prod_{l \notin \{k_1, k_2\}} B(T - t_l),$$

...

$$P\{i(T) = K | t_1, \dots, t_K\} = \prod_{l=1}^K [1 - B(T - t_l)].$$

Или в общем виде:

$$\begin{aligned} & P\{i(T) = m | t_1, \dots, t_K\} = \\ & = \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2 \neq k_1} \dots \sum_{k_v \notin \{k_1, \dots, k_{v-1}\}} \dots \sum_{k_m \notin \{k_1, \dots, k_{m-1}\}} \prod_{l \in \{k_1, \dots, k_m\}} [1 - B(T - t_l)] \prod_{l \notin \{k_1, \dots, k_m\}} B(T - t_l) \end{aligned} \quad (2.52)$$

для  $0 < m \leq K$ . Для значений  $m$  вне диапазона  $\{0, \dots, K\}$  эта вероятность равна

нулю.

Вернемся теперь к просеянному потоку и найдем условную вероятность  $P\{n(T) = m | t_1, \dots, t_K\}$  того, что на промежутке  $[t_0, T]$  в просеянном потоке наступило ровно  $m \leq K$  событий при условии, что моменты поступления заявок  $t_1, \dots, t_K$ . Так как нам известны моменты наступления событий исходного потока  $t_1, \dots, t_K$  и вероятности  $S(t_k)$  отображения этих событий в просеянный поток, получаем

$$P\{n(T) = 0 | t_1, \dots, t_K\} = \prod_{l=1}^K [1 - S(t_l)], \quad (2.53)$$

$$P\{n(T) = m | t_1, \dots, t_K\} = \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2 \neq k_1} \dots \sum_{k_v \notin \{k_1, \dots, k_{v-1}\}} \dots \sum_{k_m \notin \{k_1, \dots, k_{m-1}\}} \prod_{l \in \{k_1, \dots, k_m\}} S(t_l) \prod_{l \notin \{k_1, \dots, k_m\}} [1 - S(t_l)] \quad (2.54)$$

для  $0 < m \leq K$ , и  $P\{n(T) > K | t_1, \dots, t_K\} = 0$ . Подставляя сюда (2.49), в правых частях равенств (2.53)–(2.54) получаем выражения, совпадающие с выражениями, стоящими в правых частях формул (2.51)–(2.52). Таким образом, доказано, что

$$P\{i(T) = m | t_1, \dots, t_K\} = P\{n(T) = m | t_1, \dots, t_K\}$$

для всех целых  $m$  при одинаковых значениях  $K$  и  $t_1, \dots, t_K$ . Таким образом, для любых значений  $K$  и  $t_1, \dots, t_K$  условные законы распределения вероятностей значений случайных величин  $i(T)$  и  $n(T)$  совпадают. А так как распределения многомерной случайной величины  $(K; t_1, \dots, t_K)$  в первом и втором случаях совпадают, то и безусловные законы распределения величин  $i(T)$  и  $n(T)$  или, по-другому, значений случайных процессов  $i(t)$  и  $n(t)$  в момент времени  $t = T$  тоже совпадают. Таким образом, *теорема доказана*.

Равенства (2.50) будем называть *основной формулой метода просеянного потока*. Суть же самого метода просеянного потока заключается в том, чтобы выполнить соответствующую марковизацию случайного процесса  $n(t)$ , дополнив его необходимыми компонентами, получить вероятностные характеристики сформированного таким образом двумерного или трехмерного слу-

чайного процесса, извлечь вероятностные характеристики (закон распределения) для процесса  $n(t)$ , подставить значение  $t=T$  и согласно основной формуле (2.50) получить закон распределения вероятностей для процесса  $i(t)$  числа заявок в системе массового обслуживания в момент времени  $t=T$ . При этом момент времени  $T$ , вообще говоря, изначально был выбран произвольно.

#### 2.4 Исследование СМО GI/GI/∞ методом динамического просеивания

Продемонстрируем применение метода динамического просеивания для анализа системы с неограниченным числом приборов и высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком. Итак, пусть входящий поток задан функцией распределения длин интервалов между последовательными моментами поступления заявок в систему, записанной в виде  $A(Nx)$  (см. п. 1.1). Пусть также  $B(t)$  – функция распределения времени обслуживания одной заявки. Пусть также в некоторый начальный момент времени  $t_0$  система пуста.

Зафиксируем некоторый момент времени  $T > t_0$  в будущем. Рассмотрим  $n(t)$  – считающий процесс для просеянного потока, построенного описанным в п. 2.3.1 образом с вероятностями просеивания (2.49). Как показано в п. 2.3.1, двумерный случайный процесс  $\{n(t), z(t)\}$  является марковским, следовательно, для его распределения вероятностей

$$P(n, z, t) = P\left\{n(t) = n, z(t) < \frac{z}{N}\right\},$$

применяя формулу полной вероятности, можно записать

$$P(n, z, t + \Delta t) = P(n, z + N\Delta t, t) - P(n, N\Delta t, t) + P(n - 1, N\Delta t, t)A(z)S(t) + \\ + P(n, N\Delta t, t)A(z) - P(n, N\Delta t, t)A(z)S(t) + o(\Delta t).$$

Отсюда получаем систему уравнений Колмогорова:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(n, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(n, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1 - A(z)S(t)] + \\ + \frac{\partial P(n - 1, 0, t)}{\partial z} A(z)S(t) \quad (2.55)$$

для всех неотрицательных значений  $n$  и  $z$  с начальным условием

$$P(n, z, t_0) = \begin{cases} R(z) & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Просуммируем уравнение (2.55) по  $n = \overline{0, \infty}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P(n, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} P(n, z, t) + \\ &+ [A(z) - 1 - A(z)S(t)] \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} P(n, 0, t) + A(z)S(t) \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1}^{\infty} P(n-1, 0, t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n, z, t) = P\left\{z(t) < \frac{z}{N}\right\}$  – распределение вероятностей значений случайного процесса  $z(t)$ , которое в стационарном режиме обозначим через  $R(z)$ . Его свойства описаны в п. 1.1 и представлены формулами (1.4), (1.5).

Для частичной характеристической функции

$$H(u, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, z, t),$$

уравнение (2.57) запишется в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(e^{ju} - 1)]. \quad (2.58)$$

Это уравнение будем решать методом асимптотического анализа [111].

**Асимптотический анализ первого порядка.** В уравнении (2.58) выполним замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u, z, t) = F_1(w, z, t, \varepsilon),$$

получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(e^{j\varepsilon w} - 1)]. \quad (2.59)$$

**Теорема 2.7.** Пусть  $\lambda$  и  $R(z)$  определяются выражениями (1.1) и (1.5) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $F_1(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, z, t, \varepsilon)$  уравнения (2.59) имеет вид

$$F_1(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.60)$$

*Доказательство* выполним в 2 этапа.

*Этап 1.* В уравнении (2.59) выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$0 = \frac{\partial F_1(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1].$$

Это уравнение имеет вид, аналогичный (1.4). Следовательно, функцию  $F_1(w, z, t)$  можно представить в виде

$$F_1(w, z, t) = R(z)\Phi_1(w, t), \quad (2.61)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Выполним в (2.59) предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} (e^{j\varepsilon w} - 1)S(t).$$

Подставим сюда выражение (2.61), воспользуемся разложением  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , поделим обе части на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . С учетом того, что  $R'(0) = \lambda$ , получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = jw\lambda S(t)\Phi_1(w, t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_1(w, t_0) = 1$ , получаем решение

$$\Phi_1(w, t) = \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставим это выражение в (2.61), получаем (2.60). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** В уравнении (2.58) выполним замену

$$H(u, z, t) = H_2(u, z, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}, \quad (2.62)$$

получим уравнение относительно функции  $H_2(u, z, t)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \frac{\partial H_2(u, z, t)}{\partial t} + ju\lambda S(t)H_2(u, z, t) = \\ & = \frac{\partial H_2(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(e^{ju} - 1)]. \end{aligned}$$

Выполним здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u, z, t) = F_2(w, z, t, \varepsilon), \quad (2.63)$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda S(t)F_2(w, z, t, \varepsilon) = \\ & = \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(e^{j\varepsilon w} - 1)]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.8.** Пусть величины  $\lambda$ ,  $\kappa$  и функция  $R(z)$  определяются выражениями (1.1), (1.14) и (1.5) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $F_2(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, z, t, \varepsilon)$  уравнения (2.64) имеет вид

$$F_2(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.65)$$

Доказательство выполним в три этапа.

*Этап 1.* Положим в (2.64)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{\partial F_2(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0.$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и (1.4), поэтому очевидно, что функция  $F_2(w, z, t)$  может быть представлена в виде

$$F_2(w, z, t) = R(z) \Phi_2(w, t), \quad (2.66)$$

где  $\Phi_2(w, t)$  – некоторая функция, не зависящая от  $z$ .

*Этап 2.* Решение уравнения (2.64) запишем в виде разложения

$$F_2(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [R(z) + j\varepsilon w S(t) f(z)] + O(\varepsilon^2), \quad (2.67)$$

где  $f(z)$  – некоторая функция. Подставим это выражение в (2.64). Используя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , получим

$$j\varepsilon w \lambda S(t) \Phi_2(w, t) R(z) = \Phi_2(w, t) \left\{ \frac{dR(z)}{dz} + j\varepsilon w \frac{df(z)}{dz} S(t) + \frac{dR(0)}{dz} [A(z) - 1] + \right. \\ \left. + \frac{dR(0)}{dz} j\varepsilon w A(z) S(t) + j\varepsilon w \frac{df(0)}{dz} S(t) [A(z) - 1] \right\} + O(\varepsilon^2).$$

Учитывая (1.4), приведя подобные и сократив обе части на  $j\varepsilon w$ , получим

$$\lambda R(z) = \frac{df(z)}{dz} + \frac{df(0)}{dz} [A(z) - 1] + \lambda A(z) + O(\varepsilon).$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем дифференциальное уравнение (1.18) относительно неизвестной функции  $f(z)$ , решение которого дает результат (1.19):

$$\frac{df(0)}{dz} - \lambda f(\infty) = \frac{\kappa}{2}. \quad (2.68)$$

*Этап 3.* В (2.64) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ . В силу способа построения функции  $F_2(w, z, t, \varepsilon)$  она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией по  $z$ . Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} = 0.$$

Учитывая это и применяя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ , получаем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda S(t) F_2(w, \infty, t, \varepsilon) = \frac{\partial F_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t) \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3) \right].$$

Подставим сюда разложение (2.67), при  $z \rightarrow \infty$  получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda S(t) \Phi_2(w, t) + (j\varepsilon w)^2 \lambda S(t) f(\infty) \Phi_2(w, t) = \\ = \Phi_2(w, t) S(t) \left[ j\varepsilon w \lambda + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \lambda + (j\varepsilon w)^2 S(t) \frac{df(0)}{dz} \right] + O(\varepsilon^3)$$

Приводя подобные и сокращая на  $\varepsilon^2$ , получаем

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w, t) \left[ \lambda S(t) + 2S^2(t) \left( \frac{df(0)}{dz} - \lambda f(\infty) \right) \right] + O(\varepsilon).$$

Учитывая (2.68) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w, t) [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)].$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия  $\Phi_2(w, t_0) = 1$ , которое получается из условия (2.56), имеет вид

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Отсюда в силу (2.66) имеем

$$F_2(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\},$$

что и требовалось доказать.

Возвращаясь к функции  $H(u, z, t)$ , выполним в (2.65) замены, обратные к (2.63) и (2.62), получим аппроксимацию

$$H(u, z, t) \approx R(z) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} N \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\},$$

которая имеет место при достаточно больших значениях  $N$ .

Функция  $H(u, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(u, z, t)$  есть характеристическая функция для процесса  $n(t)$  – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени  $t$ . При достаточно больших значениях  $N$  она имеет вид характеристической функции гауссовского распределения:

$$H(u, t) \approx \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} N \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\},$$

то есть распределение для  $n(t)$  в момент времени  $t$  аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau$  и дис-

персией  $N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau$ .

Пусть случайная величина времени обслуживания имеет конечное среднее (2.46). Полагая  $t = T$ ,  $t_0 = -\infty$ , используя основную формулу метода динамического просеивания (2.50), получаем, что распределение вероятностей числа занятых приборов в рассматриваемой системе в стационарном режиме аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda b$  и дисперсией  $N[\lambda b + \kappa\beta]$ , где  $b = \int_{-\infty}^T S(x)dx = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]d\tau$  есть среднее

время обслуживания, а  $\beta = \int_{-\infty}^T S^2(x)dx = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau$ , что полностью совпадает с результатом (2.46)–(2.48), полученным в предыдущем разделе.

## 2.5 Исследование СМО с входящим МАР-потокком

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает высокоинтенсивный МАР-поток, время обслуживания заявки в системе является случайной величиной с функцией распределения  $B(t)$ . Входящий МАР-поток задан представлением [153]  $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$ , где  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{D}_1$  – квадратные матрицы порядка  $M$ , а  $N$  – параметр высокой интенсивности потока (см. Главу 1). Интенсивность МАР-потока, заданного таким образом составляет  $\lambda N$ , где величина  $\lambda$  определяется выражением (1.29). Ставится задача нахождения распределения вероятностей процесса  $i(t)$  числа заявок в рассматриваемой системе в стационарном режиме ее функционирования.

Для решения поставленной задачи воспользуемся описанным в п. 2.3 методом динамического просеивания. Используя методику п. 2.3.2, построим просеянный поток для рассматриваемой СМО МАР/GI/ $\infty$ . Для этого зафиксируем некоторый момент времени  $T$ . Будем считать, что заявка, поступившая в систему в момент времени  $t < T$ , с вероятностью  $S(t) = 1 - B(T - t)$  формирует событие просеянного потока и с вероятностью  $1 - S(t)$  не формирует. Через  $n(t)$  обозначим число событий просеянного потока, наступивших до момента

времени  $t$ . Тогда, если в начальный момент времени  $t_0 < T$  система свободна, то согласно Теореме 2.6 для момента времени  $T$  имеет место основная формула метода динамического просеивания (2.50).

Пусть  $m(t)$  – управляющий входящим МАР-потокм марковский процесс. Для распределения вероятностей  $P(n, m, t) = P\{n(t) = n, m(t) = m\}$  значений марковского процесса  $\{n(t), m(t)\}$  можно составить следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(n, m, t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^M \left[ P(n, l, t) (\mathbf{D}_0)_{lm} + P(n, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} (1 - S(t)) + P(n-1, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} S(t) \right]$$

для  $n \geq 0, m = \overline{1, M}$ . Для частичной характеристической функции

$$H(u, m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, m, t)$$

эта система переписывается в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, m, t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^M \left[ H(u, l, t) (\mathbf{D}_0)_{lm} + H(u, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} (1 - S(t)) + H(u, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} S(t) e^{ju} \right]$$

Приводя подобные и используя обозначения  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{H}(u, t) = [H(u, 1, t), \dots, H(u, M, t)]$ , получим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{ju} - 1) S(t)] \quad (2.69)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u, t_0) = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

Так как прямое решение уравнения (2.69) не представляется возможным, так как матрицы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{D}_1$  не перестановочны, то для решения задачи (2.69)–(2.70) воспользуемся методом асимптотического анализа [111] в условии растущей интенсивности входящего потока, то есть при  $N \rightarrow \infty$ . Существуют также и другие подходы к решению этой задачи. Например, можно использовать так называемое разложение Магнуса [206]. Однако применение таких подходов приводит к результатам, численная реализация которых достаточно затруднительна.

**Асимптотический анализ первого порядка.** Выполним в выражениях (2.69)–(2.70) замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon).$$

Тогда задача (2.69)–(2.70) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 (e^{j\varepsilon w} - 1) S(t)], \quad (2.71)$$

$$\mathbf{F}_1(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_1(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.9.** Пусть  $\mathbf{0}$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.24) и (1.29) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(w, t)$  задачи (2.71)–(2.72) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{0} \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.73)$$

*Доказательство* выполним в два этапа.

*Этап 1.* Положим в (2.71)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{F}_1(w, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это равенство с первым уравнением (1.24), можем сделать вывод, что  $\mathbf{F}_1(w, t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{0} \Phi_1(w, t), \quad (2.74)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция, в силу (2.72) удовлетворяющая условию  $\Phi_1(w, t_0) = 1$ .

*Этап 2.* Умножим (2.71) на вектор  $\mathbf{e}$ , подставим (2.74), поделим результат на  $\varepsilon$  и выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда с учетом того, что  $\mathbf{D}\mathbf{e} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{0}\mathbf{e} = 1$ , получим дифференциальное следующее уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = \Phi_1(w, t) jw\lambda S(t),$$

решение которого с учетом начального условия дает

$$\Phi_1(w, t) = \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставляя данное выражение в (2.74), получаем (2.73). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Обозначим через  $\mathbf{H}_2(u, t)$  многомерную функцию, удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.75)$$

Подставляя это выражение в (2.69)–(2.70), получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(u, t) ju\lambda S(t) = \mathbf{H}_2(u, t) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{ju} - 1)S(t)], \\ \mathbf{H}_2(u, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.76)$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon). \quad (2.77)$$

С использованием этих обозначений (2.76) переписется в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) j\varepsilon w\lambda S(t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{j\varepsilon w} - 1)S(t)], \\ \mathbf{F}_2(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.78)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_2(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.10.** *Пусть*

$$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}, \quad (2.79)$$

где вектор-строка  $\mathbf{g}$  является решением линейного матричного уравнения

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \mathbf{0}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1), \quad (2.80)$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица. Тогда асимптотическое решение задачи (2.78) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \boldsymbol{\theta} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.81)$$

*Доказательство* этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* В (2.78) выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(w, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_2(w, t_0) = \boldsymbol{\theta}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (1.24) следует, что  $\mathbf{F}_2(w, t)$  можно записать в виде

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \boldsymbol{\theta} \Phi_2(w, t), \quad (2.82)$$

где  $\Phi_2(w, t)$  – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию  $\Phi_2(w, t_0) = 1$ .

*Этап 2.* С учетом (2.82) функцию  $\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$  представим в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [\boldsymbol{\theta} + \mathbf{g} \cdot j\varepsilon w S(t)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (2.83)$$

где  $\mathbf{g}$  – некоторая вектор-строка, а  $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$  – вектор-строка, состоящая из величин порядка малости  $\varepsilon^2$ . Подставим (2.83) и разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$  в первую строку (2.78), получим:

$$\boldsymbol{\theta} \cdot j\varepsilon w \lambda S(t) = \boldsymbol{\theta} \mathbf{D} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{D}_1 \cdot j\varepsilon w S(t) + \mathbf{g} \mathbf{D} \cdot j\varepsilon w S(t) + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Выполняя в этом равенстве предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем матричное уравнение относительно вектора  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{g} \mathbf{D} = \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{D}_1),$$

которое совпадает с (2.80).

*Этап 3.* Умножая обе части уравнения (2.78) на вектор  $\mathbf{e}$ , используя (2.83) и разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \mathbf{O}(\varepsilon^3), \quad (2.84)$$

в результате несложных преобразований с учетом обозначения (2.79) получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \Phi_2(w, t) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\}.$$

Решение этого уравнения при имеющемся начальном условии  $\Phi_2(w, t_0) = 1$  дает выражение

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\},$$

подставляя которое в (2.82), получаем (2.81). *Теорема доказана.*

Выполним в выражении (2.81) замены, обратные к (2.77) и (2.75), получим следующее выражение для частичной характеристической функции  $\mathbf{H}(u, t)$  числа событий, наступивших в просеянном потоке до момента времени  $t$ :

$$\mathbf{H}(u, t) \approx \theta \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} \left[ N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Умножим обе части этого равенства на  $\mathbf{e}$ . Тогда, возвращаясь к исходному исследуемому процессу  $i(t)$  числа заявок в системе, подставим  $t = T$ , а в качестве начального момента (когда система свободна) выберем  $t_0 = -\infty$ , получим следующее выражение для аппроксимации  $h^{(2)}(u)$  характеристической функции  $h(u)$  числа заявок в системе в стационарном режиме при достаточно больших значениях параметра  $N$ :

$$h(u) \approx h^{(2)}(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] \right\}, \quad (2.85)$$

где  $b = \int_{-\infty}^T S(x) dx = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] d\tau$  есть среднее время обслуживания, а

$\beta = \int_{-\infty}^T S^2(x) dx = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau$ . Таким образом, стационарное распределение

числа заявок в системе MAP/GI/ $\infty$  является асимптотически гауссовским с математическим ожиданием  $N\lambda b$  и дисперсией  $[N\lambda b + N\kappa\beta]$ .

Полученный результат аналогичен результатам, полученным ранее для системы вида  $GI/GI/\infty$ . Единственным отличием являются значения величин  $\lambda$  и  $\kappa$ , которые полностью определяются параметрами входящего потока и не зависят от параметров времени обслуживания. Соответствующие формулы для вычисления этих величин для разных типов потоков можно найти в Таблице 1.1.

Отметим, что в работе [36] представлен анализ СМО  $MAR/GI/\infty$  в условии высокой интенсивности входящего потока, но при редких изменения его состояния. В таких условиях получается совершенно другой результат.

## 2.6 Исследование СМО с входящим полумарковским потоком

Рассмотрим систему обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает высокоинтенсивный полумарковский поток заявок, заданный полумарковской матрицей  $A(x)$  с элементами (1.48) и определяемый, как описано в п. 1.3. Время обслуживания одной заявки является случайной величиной с функцией распределения  $B(t)$ . Ставится задача нахождения распределения вероятностей процесса  $i(t)$  числа заявок в системе в стационарном режиме ее функционирования.

Для решения данной задачи воспользуемся описанным в п. 2.3 методом динамического просеивания. Согласно указанной методике, построим просеянный поток для рассматриваемой СМО  $SM/GI/\infty$ . Пусть в начальный момент времени  $t_0$  система пуста. Зафиксируем некоторый момент времени в будущем  $T > t_0$ . Заявка, поступившая в систему в момент времени  $t_0 < t < T$ , с вероятностью  $S(t) = 1 - B(T - t)$  формирует событие просеянного потока, а с вероятностью  $1 - S(t)$  эта заявка не рассматривается. Пусть  $n(t)$  – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени  $t$ . Тогда, согласно Теореме 2.6 для рассматриваемой системы  $SM/GI/\infty$  имеет место основная формула метода динамического просеивания (2.50).

Для распределения вероятностей

$$P(n, l, z, t) = P\left\{n(t) = n, l(t) = l, z(t) < \frac{z}{N}\right\}$$

марковского случайного процесса  $\{n(t), l(t), z(t)\}$ , где  $l(t)$  – состояние случайного процесса, определяемого выражением (1.49),  $z(t)$  – длина интервала времени от момента  $t$  до момента наступления следующего события в потоке, можно записать равенство

$$P(n, l, z - \Delta t, t + \Delta t) = P(n, l, z, t) - P(n, l, N\Delta t, t) + \\ + \sum_{v=1}^L P(n-1, v, N\Delta t, t) A_{vl}(z) S(t) + \sum_{v=1}^L P(n, v, N\Delta t, t) A_{vl}(z) [1 - S(t)] + o(\Delta t).$$

Отсюда после несложных преобразований получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(n, l, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n, l, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(n, l, 0, t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^L \frac{\partial P(n-1, v, 0, t)}{\partial z} A_{vl}(z) S(t) + \\ + \sum_{v=1}^L \frac{\partial P(n, v, 0, t)}{\partial z} A_{vl}(z) [1 - S(t)] \quad (2.86)$$

для  $n \geq 0, l = \overline{1, L}, z > 0$  (считаем, что  $P(n, l, z, t) \equiv 0$  для  $n < 0$ ).

Введем частичные характеристические функции

$$H(u, l, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, l, z, t)$$

для  $l = \overline{1, L}$ . Для них (2.86) запишется в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, l, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, l, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(u, l, 0, t)}{\partial z} + \sum_{v=1}^L e^{ju} \frac{\partial H(u, v, 0, t)}{\partial z} A_{vl}(z) S(t) + \\ + \sum_{v=1}^L \frac{\partial H(u, v, 0, t)}{\partial z} A_{vl}(z) [1 - S(t)].$$

Обозначая вектор-строку  $\mathbf{H}(u, z, t) = [H(u, 1, z, t), \dots, H(u, L, z, t)]$ , получаем матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} \{ \mathbf{A}(z) [1 - S(t)] + e^{ju} \mathbf{A}(z) S(t) - \mathbf{I} \} \quad (2.87)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u, z, t_0) = \mathbf{R}(z), \quad (2.88)$$

где  $\mathbf{R}(z)$  – совместное стационарное распределение двумерного марковского процесса  $\{l(t), z(t)\}$ , определяемое выражением (1.54).

Задачу (2.87)–(2.88) будем решать методом асимптотического анализа [111] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего полумарковского потока, то есть при  $N \rightarrow \infty$ .

**Асимптотический анализ первого порядка.** Введем обозначения

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, z, t) = \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon).$$

С использованием этих обозначений задача (2.87)–(2.88) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z)[1 - S(t)] + e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}(z)S(t) - \mathbf{I} \right\}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{F}_1(w, z, t_0, \varepsilon) = \mathbf{R}(z). \quad (2.90)$$

**Теорема 2.11.** Пусть  $\mathbf{R}(z)$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.54) и (1.56) соответственно, тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(w, z, t, \varepsilon)$  задачи (2.89)–(2.90) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ jw\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.91)$$

*Доказательство* проведем в два этапа.

*Этап 1.* Выполним в (2.89) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_1(w, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_1(w, t), \quad (2.92)$$

где  $\Phi_1(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Выполним в (2.89) предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ \mathbf{P} + (e^{j\varepsilon w} - 1) \mathbf{P} S(t) - \mathbf{I} \right].$$

Просуммируем все компоненты этого уравнения, умножив обе его части справа на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ . Воспользуемся разложением  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , поделим обе части на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Подставляя выражение (2.92) и учитывая, что  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ , получаем

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} \mathbf{R} \mathbf{e} = jw \mathbf{R}'(0) \mathbf{e} \Phi_1(w, t) S(t).$$

Отсюда с учетом (1.53) получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = jw \lambda \Phi_1(w, t) S(t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_1(w, t_0) = 1$ , получаем решение

$$\Phi_1(w, t) = \exp \left\{ jw \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставив это выражение в (2.92), получим (2.91). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Введем функцию  $\mathbf{H}_2(u, z, t)$ , удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}(u, z, t) = \mathbf{H}_2(u, z, t) \exp \left\{ ju N \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.93)$$

Подставим это выражение в (2.87)–(2.88), получим следующую задачу Коши относительно функции  $\mathbf{H}_2(u, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, z, t)}{\partial t} + ju \lambda S(t) \mathbf{H}_2(u, z, t) &= \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, z, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, 0, t)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) [1 - S(t)] + e^{ju} \mathbf{A}(z) S(t) - \mathbf{I} \right\} \end{aligned} \quad (2.94)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}_2(u, z, t_0) = \mathbf{R}(z). \quad (2.95)$$

Выполним здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u, z, t) = \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon). \quad (2.96)$$

В результате задача (2.94)–(2.95) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda S(t) \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon) &= \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z)[1 - S(t)] + e^{j\varepsilon w} \mathbf{A}(z)S(t) - \mathbf{I} \right\}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\mathbf{F}_2(w, z, t_0, \varepsilon) = \mathbf{R}(z). \quad (2.98)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.12.** Пусть  $\mathbf{R}(z)$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.54) и (1.56) соответственно,

$$\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e}, \quad (2.99)$$

где вектор-строка  $\mathbf{f}'_0$  удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{f}'_0 [\mathbf{I} - \mathbf{P}] = \lambda [\mathbf{rP} - \mathbf{R}], \\ \mathbf{f}'_0 \mathbf{Ae} = \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \end{cases} \quad (2.100)$$

$a_2 = \mathbf{rA}_2 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \int_0^\infty x^2 d\mathbf{A}(x)$ , причем все элементы матрицы  $\mathbf{A}_2$  конечны. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)$  задачи (2.97)–(2.98) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.101)$$

*Доказательство* выполним в три этапа.

*Этап 1.* Выполним в (2.97) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_2(w, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_2(w, z, t) = \mathbf{R}(z)\Phi_2(w, t), \quad (2.102)$$

где  $\Phi_2(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Принимая во внимание выражение (2.102), функцию  $\mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon)$  представим в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t)[\mathbf{R}(z) + j\varepsilon w S(t)\mathbf{f}(z)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (2.103)$$

где  $\mathbf{f}(z)$  – некоторая вектор-функция (строка). Подставим это выражение в (2.97), применяя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , после некоторых преобразований получим

$$j\varepsilon w \lambda S(t)\Phi_2(w, t)\mathbf{R}(z) = \Phi_2(w, t)\mathbf{R}'(z) + j\varepsilon w S(t)\Phi_2(w, t)\mathbf{f}'(z) + \\ + [\Phi_2(w, t)\mathbf{R}'(0) + j\varepsilon w S(t)\Phi_2(w, t)\mathbf{f}'(0)][\mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + j\varepsilon w S(t)\mathbf{A}(z)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Отсюда, сокращая и приводя подобные, с учетом (1.52)–(1.53) получаем равенство

$$\lambda \mathbf{R}(z) = \mathbf{f}'(z) + \lambda \mathbf{r}\mathbf{A}(z) + \mathbf{f}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{O}(\varepsilon),$$

идентичное (1.70), которое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет вид

$$\lambda \mathbf{R}(z) = \mathbf{f}'(z) + \lambda \mathbf{r}\mathbf{A}(z) + \mathbf{f}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}]. \quad (2.104)$$

Далее, повторяя рассуждения этапа 2 доказательства Теоремы 1.6, получаем систему уравнений (2.100).

*Этап 3.* Подставим в (2.97) выражение (2.103) и разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ , далее выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} \mathbf{R} + j\varepsilon w \lambda S(t)\Phi_2(w, t)\mathbf{R} + (j\varepsilon w)^2 \lambda S^2(t)\Phi_2(w, t)\mathbf{f}(\infty) = \\ = \Phi_2(w, t)[\mathbf{R}'(0) + j\varepsilon w S(t)\mathbf{f}'(0)] \left[ \mathbf{P} - \mathbf{I} + j\varepsilon w S(t)\mathbf{P} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S(t)\mathbf{P} \right] + \mathbf{O}(\varepsilon^3).$$

Умножим обе части этого уравнения на  $\mathbf{e}$  справа. Принимая во внимание, что  $\mathbf{R}\mathbf{e} = 1$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{e} = \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{R}'(0)\mathbf{e} = \lambda$ , и используя обозначение  $\mathbf{f}'_0 = \mathbf{f}'(0)$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda S(t) \Phi_2(w, t) = \\ & = \Phi_2(w, t) \left[ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \lambda S(t) + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \mathbf{f}'_0 \mathbf{e} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Приводя подобные, сокращая на  $\varepsilon^2$ , используя обозначение (1.65) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \Phi_2(w, t) \frac{(jw)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)],$$

где  $\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e}$ . Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_2(w, t_0) = 1$ , получаем

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Подставляя это выражение в (2.102), получаем (2.101). *Теорема доказана.*

Выполняя в (2.101) замены, обратные к (2.96) и (2.93), получим следующее выражение для функции  $\mathbf{H}(u, z, t)$ :

$$\mathbf{H}(u, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} N \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Выполняя здесь предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , подставляя  $t_0 = -\infty$  и  $t = T$  согласно основной формуле метода динамического просеивания (2.50), получаем следующее выражение для аппроксимации  $h^{(2)}(u)$  характеристической функции случайного процесса  $i(t)$  числа заявок в рассматриваемой системе в стационарном режиме функционирования:

$$h^{(2)}(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] \right\}, \quad (2.105)$$

в условиях высокой интенсивности входящего потока (при достаточно боль-

ших значениях параметра  $N$ ). Здесь  $b = \int_{-\infty}^T S(x)dx = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]d\tau$  – среднее время

обслуживания,  $\beta = \int_{-\infty}^T S^2(x)dx = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau$ . Таким образом, стационарное

распределение числа заявок в системе  $SM/GI/\infty$  является асимптотически нормальным с математическим ожиданием  $N\lambda b$  и дисперсией  $[N\lambda b + N\kappa\beta]$ .

Примечательно, что выражение (2.105) для СМО с полумарковским входящим потоком имеет вид аналогичный (2.47) и (2.85), полученным для СМО с входящими рекуррентным и МАР-потоками. Отличие составляют только выражения для параметров  $\lambda$  и  $\kappa$ , значения которых зависят от характеристик входящего потока и могут быть получены с использованием Таблицы 1.1.

## 2.7 Асимптотический анализ третьего порядка

Применение на практике аппроксимаций вида (2.47), (2.85), (2.105), полученных в предыдущих разделах настоящей главы, достаточно удобно, так как результатом в каждом случае является нормально распределенная случайная величина, и, таким образом, нет необходимости выполнять какие-либо дополнительные преобразования над указанными выражениями. Однако численные эксперименты (Глава 5) показывают, что допустимая погрешность достигается при достаточно больших значениях параметра высокой интенсивности входящего потока  $N$ .

Для меньших значений интенсивности входящего потока можно получить более точную аппроксимацию, используя асимптотический анализ более высокого порядка. В настоящем разделе представлена процедура выполнения асимптотического анализа третьего порядка для исследования моделей СМО с различными типами входящих потоков. В Главе 5 приводится численный сравнительный анализ точности аппроксимаций второго и третьего порядков, а также анализируются условия их применимости. Однако, как будет видно далее, применение этого результата на практике требует некоторых дополни-

тельных действий (выполнение обратного преобразования Фурье). Таким образом, в зависимости от исходных параметров (интенсивности входящего потока), выбранной погрешности результата и необходимости дальнейших аналитических преобразований исследователь может выбрать порядок аппроксимации и воспользоваться либо гауссовскими аппроксимациями (2.47), (2.85), (2.105), либо аппроксимациями третьего порядка, полученными в настоящем разделе.

### 2.7.1 Асимптотический анализ третьего порядка для СМО с входящим рекуррентным потоком

Продолжая процедуру анализа, изложенную в п. 2.4, введем функцию  $H_3(u, z, t)$ , которая определяется равенством

$$H(u, z, t) = H_3(u, z, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} N \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.106)$$

Для этой функции уравнение (2.58) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial H_3(u, z, t)}{\partial t} + H_3(u, z, t) \left\{ ju\lambda S(t) + \frac{(ju)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = \frac{\partial H_3(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_3(u, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(e^{ju} - 1)] \end{aligned} \quad (2.107)$$

с начальными условиями

$$H_3(u, z, t_0) = R(z), \quad H_3(u, 0, t) = 0. \quad (2.108)$$

Выполним в (2.107)–(2.108) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon w, \quad H_3(u, z, t) = F_3(w, z, t, \varepsilon). \quad (2.109)$$

С учетом этих замен получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \frac{\partial F_3(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + F_3(w, z, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = \frac{\partial F_3(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z)S(t)(e^{j\varepsilon w} - 1)], \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$F_3(w, z, t_0, \varepsilon) = R(z), \quad F_3(w, 0, t, \varepsilon) = 0. \quad (2.111)$$

Тогда относительно асимптотического решения  $F_3(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_3(w, z, t, \varepsilon)$  задачи (2.110)–(2.111) имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.13.** Пусть случайная величина, заданная функцией распределения  $A(x)$ , имеет конечные начальные моменты первого  $a_1 = 1/\lambda$ , второго  $a_2$  и третьего  $a_3$  порядков; величины  $\lambda$  и  $\kappa$  определяются выражениями (1.1) и (1.14) соответственно, а величина  $\mu$  – выражением

$$\mu = 6\lambda + 3\lambda^2 a_2 \kappa - \lambda^4 a_3. \quad (2.112)$$

Тогда асимптотическое решение задачи (2.110)–(2.111) имеет вид

$$F_3(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.113)$$

Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* Положим в (2.110)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\frac{\partial F_3(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0,$$

которое имеет вид аналогичный (1.4). Следовательно, функцию  $F_3(w, z, t)$  можно записать в виде произведения

$$F_3(w, z, t) = R(z) \Phi_3(w, t), \quad (2.114)$$

где  $\Phi_3(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Запишем функцию  $F_3(w, z, t, \varepsilon)$  в виде разложения

$$F_3(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_3(w, t) \times \left\{ R(z) + j\varepsilon w f(z) S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [f(z) S(t) + 2g(z) S^2(t)] \right\} + O(\varepsilon^3), \quad (2.115)$$

в котором функция  $f(z)$  удовлетворяет уравнению (1.18), а функцию  $g(z)$  определим ниже.

Подставляя в (2.110) разложения  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$  и (2.115),

получим

$$\begin{aligned}
& R(z) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} + (j\varepsilon w)^2 \lambda f(z) S^2(t) = \\
& = R'(z) + j\varepsilon w f'(z) S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} f'(z) S(t) + (j\varepsilon w)^2 g'(z) S^2(t) + \\
& \quad + R'(0) \left[ A(z) - 1 + A(z) S(t) \left( j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) \right] + \\
& \quad + f'(0) \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) [A(z) - 1] + f'(0) (j\varepsilon w)^2 A(z) S^2(t) + \\
& \quad + (j\varepsilon w)^2 g'(0) S^2(t) [A(z) - 1] + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и учитывая, что  $R'(0) = \lambda$ , а также уравнения (1.4) и (1.18) относительно функций  $R(z)$  и  $f(z)$ , получим следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $g(z)$ :

$$\frac{\kappa}{2} R(z) + \lambda f(z) = g'(z) + f'(0) A(z) + g'(0) [A(z) - 1]. \quad (2.116)$$

Как будет ясно из следующего этапа доказательства теоремы, нам не требуется находить решение этого уравнения в явном виде, достаточно лишь определить величину  $\eta$ , вычисляемую следующим образом:

$$\eta = g'(0) - \lambda g(\infty) - \frac{\kappa}{2} f(\infty). \quad (2.117)$$

Для нахождения этой величины умножим уравнение (2.116) на  $\lambda$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $\infty$ , получим:

$$g'(0) - \lambda g(\infty) + \lambda \int_0^{\infty} \left[ \frac{\kappa}{2} R(z) + \lambda f(z) - f'(0) A(z) \right] dz = 0. \quad (2.118)$$

Учитывая (1.19), имеем

$$\begin{aligned}
g'(0) - \lambda g(\infty) &= \lambda \int_0^{\infty} \left[ \frac{\kappa}{2} (1 - R(z)) + \lambda (f(\infty) - f(z)) - f'(0) (1 - A(z)) \right] dz = \\
&= \lambda \left[ \frac{\kappa}{2} \int_0^{\infty} (1 - R(z)) dz + \lambda \int_0^{\infty} (f(\infty) - f(z)) dz - f'(0) \int_0^{\infty} (1 - A(z)) dz \right].
\end{aligned} \quad (2.119)$$

Ранее (см. п. 1.1) получено, что  $\int_0^{\infty} (1 - R(z)) dz = \frac{\lambda a_2}{2}$ . Вычислим интеграл во

втором слагаемом:

$$\int_0^{\infty} (f(\infty) - f(z)) dz = z(f(\infty) - f(z)) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} z d(f(\infty) - f(z)) = \int_0^{\infty} z f'(z) dz.$$

Подставляя сюда (1.18), после некоторых преобразований получаем

$$\int_0^{\infty} (f(\infty) - f(z)) dz = (f'(0) + \lambda) \frac{a_2}{2} - \lambda^2 \frac{a_3}{6},$$

где  $a_3$  – третий начальный момент случайной величины с функцией распределения  $A(x)$ .

Возвращаясь к (2.119), с учетом (1.19) получим

$$\begin{aligned} g'(0) - \lambda g(\infty) &= \lambda \left[ f'(0) \left( \frac{\lambda a_2}{2} - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\kappa \lambda a_2}{2} + \frac{\lambda^2 a_2}{2} - \frac{\lambda^3 a_3}{6} \right] = \\ &= \frac{\kappa}{2} f(\infty) + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 + \frac{\kappa \lambda^2 a_2}{2} + \frac{\lambda^3 a_2}{2} - \frac{\lambda^4 a_3}{6}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.117), после несложных преобразований получаем

$$\eta = \lambda + \frac{\lambda^2 a_2 \kappa}{2} - \frac{\lambda^4 a_3}{6}.$$

*Этап 3.* В задаче (2.110)–(2.111) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \frac{\partial F_3(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} + F_3(w, \infty, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = \frac{\partial F_3(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t) (e^{j\varepsilon w} - 1) + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$F_3(w, \infty, t_0, \varepsilon) = 1.$$

Подставим сюда разложения (2.115) и  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} + O(\varepsilon^3)$ .

Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем следующую задачу Коши относительно неизвест-

ной функции  $\Phi_3(w, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} + \Phi_3(w, t) \left\{ \lambda f(\infty) (jw)^3 S^2(t) + \left[ \frac{\kappa}{2} f(\infty) + \lambda g(\infty) \right] (jw)^3 S^3(t) \right\} = \\ = \Phi_3(w, t) \left\{ R'(0) \frac{(jw)^3}{6} S(t) + f'(0) (jw)^3 S^2(t) + g'(0) (jw)^3 S^3(t) \right\}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\Phi_3(w, t_0) = 1. \quad (2.121)$$

С учетом (2.117) уравнение (2.120) этой задачи перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} = \Phi_3(w, t) \left\{ \frac{(jw)^3}{6} [\lambda S(t) + 3\kappa S^2(t) + \mu S^3(t)] \right\}, \quad (2.122)$$

где величина  $\mu = 6\eta$  определяется выражением (2.112).

В результате получаем следующее решение задачи (2.122), (2.121):

$$\Phi_3(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\},$$

подставляя которое в (2.114), получим (2.113). *Теорема доказана.*

Выполнив в (2.113) замены, обратные (2.109), подставив результат в (2.106) и рассматривая функционирование системы в стационарном режиме, аналогично подходу п. 2.4 положим  $t_0 = -\infty$ ,  $t = T$ . Получим следующий вид аппроксимации  $h^{(3)}(u)$  для характеристической функции  $h(u)$  числа заявок в системе, функционирующей в стационарном режиме:

$$h(u) \approx h^{(3)}(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] + \frac{(ju)^3}{6} [N\lambda b + 3N\kappa\beta + N\mu\gamma] \right\}. \quad (2.123)$$

Здесь  $b = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] d\tau$  есть среднее время обслуживания,  $\beta = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau$ ,

$\gamma = \int_0^{\infty} (1 - B(\tau))^3 d\tau$ , величины  $\lambda$  и  $\kappa$  определены в Таблице 1.1, а величина  $\mu$

определяется выражением (2.112).

Таким образом, полученная ранее в пп. 2.2 и 2.4 гауссовская аппрокси-

мация  $h^{(2)}(u)$  стационарного распределения числа заявок в системе GI/GI/ $\infty$  может быть уточнена с использованием асимптотического результата третьего порядка (2.123).

### 2.7.2 Асимптотический анализ третьего порядка для СМО с входящим МАР-потокком

Рассмотрим СМО с входящим МАР-потокком, модель которой представлена в п. 2.5. Введем функцию  $\mathbf{H}_3(u, t)$ , удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{H}_3(u, t) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \left[ N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (2.124)$$

подставим (2.124) в (2.76), получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_3(u, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_3(u, t) \left\{ ju\lambda S(t) + \frac{(ju)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} \mathbf{H}_3(u, t) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{ju} - 1)S(t)], \\ \mathbf{H}_3(u, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Выполним здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_3(u, t) = \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon),$$

получим

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon) [\mathbf{D} + \mathbf{D}_1(e^{j\varepsilon w} - 1)S(t)], \\ \mathbf{F}_3(w, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.125)$$

Обозначим  $\mathbf{F}_3(w, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon)$ . Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.14.** Пусть

$$\mu = 6\mathbf{g}_2(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} - 3\kappa\mathbf{g}, \quad (2.126)$$

где вектор-строка  $\mathbf{g}$  определяется выражением (2.80), а вектор-строка  $\mathbf{g}_2$  удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\mathbf{g}_2 \mathbf{D} = \boldsymbol{\theta} \left[ \left( \frac{\kappa}{2} - \lambda \right) \mathbf{I} - \mathbf{D}_1 \right] + \lambda \mathbf{g}. \quad (2.127)$$

Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_3(w, t)$  задачи (2.125) имеет вид

$$\mathbf{F}_3(w, t) = \boldsymbol{\theta} \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.128)$$

Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* Выполним в (2.125) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{cases} \mathbf{F}_3(w, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_3(w, t_0) = \boldsymbol{\theta}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (1.24) делаем вывод, что  $\mathbf{F}_3(w, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_3(w, t) = \boldsymbol{\theta} \Phi_3(w, t), \quad (2.129)$$

где  $\Phi_3(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Решение задачи (2.125) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon) = \Phi_3(w, t) \left[ \boldsymbol{\theta} + \mathbf{g}_1 \cdot j\varepsilon w S(t) + (\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2) \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S^2(t) \right] + \mathbf{O}(\varepsilon^3), \quad (2.130)$$

где  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  – некоторые вектор-строки. Подставим разложения (2.130) и (2.84) в (2.125). После несложных преобразований получаем равенство

$$\begin{aligned} j\varepsilon w \lambda S(t) \boldsymbol{\theta} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \lambda S(t) \boldsymbol{\theta} + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \left[ \frac{\kappa}{2} \boldsymbol{\theta} + \lambda \mathbf{g}_1 \right] &= j\varepsilon w S(t) [\boldsymbol{\theta} \mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_1 \mathbf{D}] + \\ &+ \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S(t) [\boldsymbol{\theta} \mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_1 \mathbf{D}] + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) [\mathbf{g}_1 \mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{D}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Приравнивая здесь выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем  $\lambda \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_1 \mathbf{D}$ , откуда следует  $\mathbf{g}_1 \mathbf{D} = \boldsymbol{\theta} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_1)$ , что совпадает с (2.80). С учетом этого вторые слагаемые левой и правой частей (2.131) уничтожаются, и мы получаем равенство

$$\frac{\kappa}{2} \boldsymbol{\theta} + \lambda \mathbf{g} = \mathbf{g} \mathbf{D}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{D},$$

откуда следует выражение (2.127).

*Этап 3.* Умножим каждую часть выражений (2.125) на  $\mathbf{e}$ , тогда с исполь-

зованием обозначения  $f(w, t, \varepsilon) = \mathbf{F}_3(w, t, \varepsilon)\mathbf{e}$  получаем

$$\begin{cases} \varepsilon^3 \frac{\partial f(w, t, \varepsilon)}{\partial t} + f(w, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = f(w, t, \varepsilon) \mathbf{D}_1 \mathbf{e} (e^{j\varepsilon w} - 1) S(t), \\ f(w, t_0, \varepsilon) = 1. \end{cases}$$

Подставляя сюда (2.130) и разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} + O(\varepsilon^4),$$

получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} + \Phi_3(w, t) \left\{ 1 + \mathbf{g}\mathbf{e} \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) + \mathbf{g}_2 \mathbf{e} (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \right\} \times \\ \times \left\{ \lambda \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) + \frac{\kappa}{2} (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \right\} = \\ = \Phi_3(w, t) \left\{ \boldsymbol{\theta} + \mathbf{g} \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] S(t) + \mathbf{g}_2 (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \right\} \times \\ \times \mathbf{D}_1 \mathbf{e} \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} \right] S(t) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

После несложных преобразований с учетом (2.80), (2.127), (2.79) и с использованием обозначения (2.126) получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_3(w, t)$

$$\frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} = \Phi_3(w, t) \left\{ \frac{(jw)^3}{6} [\lambda S(t) + 3\kappa S^2(t) + \mu S^3(t)] \right\},$$

решение которого при имеющемся начальном условии  $\Phi_3(w, t_0) = 1$  дает

$$\Phi_3(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Подставляя это выражение в (2.129), получаем (2.128). *Теорема доказана.*

Делая обратные замены и, аналогично выводу формулы (2.85), возвращаясь к характеристической функции числа заявок в системе в стационарном режиме, получим следующее выражение для ее аппроксимации третьего по-

рядка  $h^{(3)}(u)$ :

$$h^{(3)}(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] + \frac{(ju)^3}{6} [N\lambda b + 3N\kappa\beta + N\mu\gamma] \right\}, \quad (2.132)$$

где  $b = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] d\tau$  есть среднее время обслуживания,  $\beta = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau$ ,

$\gamma = \int_0^{\infty} (1 - B(\tau))^3 d\tau$ , величина  $\mu$  определяется выражением (2.126), а величины  $\lambda$

и  $\kappa$  определены в Таблице 1.1.

### 2.7.3 Асимптотический анализ третьего порядка для СМО с входящим полумарковским потоком

Продолжая процедуру анализа, изложенную в п. 2.6, введем функцию  $\mathbf{H}_3(u, z, t)$ , которая определяется равенством

$$\mathbf{H}(u, z, t) = \mathbf{H}_3(u, z, t) \exp \left\{ juN\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju)^2}{2} N \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.133)$$

Это выражение подставим в задачу (2.87)–(2.88), получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_3(u, z, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_3(u, z, t) \left\{ ju\lambda S(t) + \frac{(ju)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = \frac{\partial \mathbf{H}_3(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}_3(u, 0, t)}{\partial z} \{ \mathbf{A}(z)[1 - S(t)] + \mathbf{A}(z)e^{ju} S(t) - \mathbf{I} \} \end{aligned} \quad (2.134)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}_3(u, z, t_0) = \mathbf{R}(z). \quad (2.135)$$

Выполним в (2.134)–(2.135) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_3(u, z, t) = \mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon). \quad (2.136)$$

С учетом этих замен получаем следующую задачу:

$$\varepsilon^3 \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \{ \mathbf{A}(z)[1 - S(t)] + \mathbf{A}(z)e^{j\varepsilon w} S(t) - \mathbf{I} \}, \quad (2.137)$$

$$\mathbf{F}_3(w, z, t_0, \varepsilon) = \mathbf{R}(z). \quad (2.138)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_3(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon)$  этой задачи можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.15.** Пусть величина  $\mu$  определяется выражением

$$\mu = 6\mathbf{g}'_0 \mathbf{e}, \quad (2.139)$$

где вектор-строка  $\mathbf{g}'_0$  является решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{g}'_0 [\mathbf{I} - \mathbf{P}] = \mathbf{f}'_0 [\mathbf{P} - \lambda \mathbf{A}] - \lambda \left[ \frac{\kappa}{2} + \lambda \right] \mathbf{rA} + \frac{1}{2} \lambda^3 \mathbf{rA}_2, \\ \mathbf{g}'_0 \mathbf{Ae} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\kappa}{2} a_2 + \frac{\lambda}{2} \mathbf{f}'_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{e} - \frac{\lambda^3}{6} a_3 + 1, \end{cases} \quad (2.140)$$

величины  $\kappa$ ,  $a_2$ , вектор  $\mathbf{f}'_0$  и матрица  $\mathbf{A}_2$  определены в условиях Теоремы 2.12,

величина  $a_3 = \mathbf{rA}_3 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}_3 = \int_0^\infty x^3 d\mathbf{A}(x)$ , причем все элементы матрицы  $\mathbf{A}_3$  ко-

нечны. Тогда асимптотическое решение задачи (2.137)–(2.138) имеет вид

$$\mathbf{F}_3(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.141)$$

*Доказательство* этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* Положим в (2.137)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{F}_3(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] = 0,$$

которое имеет вид аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_3(w, z, t)$  можно записать в виде произведения

$$\mathbf{F}_3(w, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_3(w, t), \quad (2.142)$$

где  $\Phi_3(w, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Запишем функцию  $\mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon)$  в виде разложения

$$\mathbf{F}_3(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_3(w, t) \times \left\{ \mathbf{R}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}(z) S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\mathbf{f}(z) S(t) + 2\mathbf{g}(z) S^2(t)] \right\} + \mathbf{O}(\varepsilon^3), \quad (2.143)$$

в котором векторная функция  $\mathbf{f}(z)$  удовлетворяет уравнению (2.104), а уравнение относительно векторной функции  $\mathbf{g}(z)$  определим ниже.

Подставляя в (2.137) разложения  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \mathbf{O}(\varepsilon^3)$  и (2.143),

получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}(z) S(t) \right\} \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ & = \mathbf{R}'(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(z) S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{f}'(z) S(t) + (j\varepsilon w)^2 \mathbf{g}'(z) S^2(t) + \\ & + \left\{ \mathbf{R}'(0) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(0) S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\mathbf{f}'(0) S(t) + 2\mathbf{g}'(0) S^2(t)] \right\} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + \mathbf{A}(z) S(t) \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] \right\} + \mathbf{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем следующие равенства:

при  $\varepsilon^0$  –

$$\mathbf{R}'(z) + \mathbf{R}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] = \mathbf{0},$$

что совпадает с (1.51);

при  $\varepsilon^1$  –

$$\lambda \mathbf{R}(z) = \mathbf{f}'(z) + \mathbf{R}'(0)\mathbf{A}(z) + \mathbf{f}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

что с учетом, того, что  $\mathbf{R}'(0) = \lambda \mathbf{r}$ , совпадает с (2.104);

при  $\varepsilon^2$  –

$$\begin{aligned} & S(t) \{ \lambda \mathbf{R}(z) - \mathbf{f}'(z) - \mathbf{R}'(0)\mathbf{A}(z) - \mathbf{f}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] \} + \\ & + 2S^2(t) \left\{ \frac{\kappa}{2} \mathbf{R}(z) + \lambda \mathbf{f}(z) - \mathbf{g}'(z) - \mathbf{f}'(0)\mathbf{A}(z) - \mathbf{g}'(0)[\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] \right\} = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве первое слагаемое равно  $\mathbf{0}$  в силу (2.104), таким обра-

зом, получаем следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\mathbf{g}(z)$ :

$$\mathbf{g}'(z) = \frac{\kappa}{2} \mathbf{R}(z) + \lambda \mathbf{f}(z) - \mathbf{f}'(0) \mathbf{A}(z) - \mathbf{g}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{g}(z) = \int_0^z \left\{ \frac{\kappa}{2} \mathbf{R}(x) + \lambda \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(0) \mathbf{A}(x) - \mathbf{g}'(0) [\mathbf{A}(x) - \mathbf{I}] \right\} dx. \quad (2.144)$$

Полагая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\kappa}{2} \mathbf{R}(x) + \lambda \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(0) \mathbf{A}(x) - \mathbf{g}'(0) [\mathbf{A}(x) - \mathbf{I}] \right\} = \mathbf{0}$ , получаем

следующее алгебраическое уравнение:

$$\frac{\kappa}{2} \mathbf{R} + \lambda \mathbf{f}(\infty) - \mathbf{f}'(0) \mathbf{P} - \mathbf{g}'(0) [\mathbf{P} - \mathbf{I}] = \mathbf{0}, \quad (2.145)$$

которое с учетом выражений (1.55) и (1.73) совпадает с первой строкой системы (2.140).

Вычтем левую часть равенства (2.145) из подынтегрального выражения (2.144) и подставим  $z = \infty$ , получим

$$\mathbf{g}(\infty) = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{\kappa}{2} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] - \lambda [\mathbf{f}(\infty) - \mathbf{f}(x)] + \mathbf{f}'(0) [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] - \mathbf{g}'(0) [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] \right\} dx.$$

В силу разложения (2.143)  $\mathbf{g}(\infty) \mathbf{e} = 0$ , тогда получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] \mathbf{e} dx - \lambda \int_0^{\infty} [\mathbf{f}(\infty) - \mathbf{f}(x)] \mathbf{e} dx + \\ & + \mathbf{f}'(0) \int_0^{\infty} [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} dx - \mathbf{g}'(0) \int_0^{\infty} [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Здесь ранее получено, что  $\int_0^{\infty} [\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)] \mathbf{e} dx = \frac{\lambda}{2} \mathbf{r} \mathbf{A}_2 \mathbf{e} = \frac{\lambda a_2}{2}$  и

$\int_0^{\infty} [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} dx = \mathbf{A} \mathbf{e}$ . Используя выражение (2.104), найдем следующий инте-

грал:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [\mathbf{f}(\infty) - \mathbf{f}(x)] \mathbf{e} \, dx &= \int_0^{\infty} x \mathbf{f}'(x) \mathbf{e} \, dx = \int_0^{\infty} x \{ \mathbf{f}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] - \lambda [\mathbf{rA}(x) - \mathbf{R}(x)] \} \mathbf{e} \, dx = \\ &= \int_0^{\infty} x \mathbf{f}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} \, dx - \lambda \int_0^{\infty} x [\mathbf{rA}(x) - \mathbf{r}] \mathbf{e} \, dx - \lambda \int_0^{\infty} x [\mathbf{r} - \mathbf{R}(x)] \mathbf{e} \, dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении равно  $\frac{1}{2} \mathbf{f}'_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{e}$ , второе:

$$\lambda \int_0^{\infty} x \mathbf{r} [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} \, dx = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{rA}_2 \mathbf{e} = \frac{\lambda a_2}{2}.$$

Наконец, для третьего слагаемого с учетом (1.51) и (1.53) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{r} - \mathbf{R}(x)] \mathbf{e} \, dx^2 &= -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x^2 \mathbf{R}'(x) \mathbf{e} \, dx = -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x^2 \mathbf{R}'(0) [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} \, dx = \\ &= -\frac{\lambda^2}{6} \int_0^{\infty} \mathbf{r} [\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)] \mathbf{e} \, dx^3 = -\frac{\lambda^2}{6} \mathbf{rA}_3 \mathbf{e}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{A}_3 = \int_0^{\infty} x^3 d\mathbf{A}(x)$ . Обозначая  $a_3 = \mathbf{rA}_3 \mathbf{e}$ , окончательно получаем

$$\int_0^{\infty} [\mathbf{f}(\infty) - \mathbf{f}(x)] \mathbf{e} \, dx = \frac{1}{2} \mathbf{f}'_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{e} + \frac{\lambda a_2}{2} - \frac{\lambda^2 a_3}{6}.$$

Подставляя полученные выражения в (2.146), с учетом (2.99) и обозначения  $\mathbf{g}'_0 = \mathbf{g}'(0)$  получаем следующее равенство:

$$\mathbf{g}'_0 \mathbf{Ae} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\kappa}{2} a_2 + \frac{\lambda}{2} \mathbf{f}'_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{e} - \frac{\lambda^3}{6} a_3 + 1,$$

которое совпадает с последним уравнением в системе (2.140).

*Этап 3.* В задаче (2.137)–(2.138) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_3(w, \infty, t, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} = \\ = \frac{\partial \mathbf{F}_3(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t) (e^{j\varepsilon w} - 1) + \mathbf{O}(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_3(w, \infty, t_0, \varepsilon) = \mathbf{R}.$$

Подставив сюда разложения (2.143) и  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} + O(\varepsilon^3)$ ,

умножив обе части уравнений на  $\mathbf{e}$ , получим равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} + \Phi_3(w, t) & \left\{ 1 + j\varepsilon w S(t) \mathbf{f}(\infty) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S(t) \mathbf{f}(\infty) + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \mathbf{g}(\infty) \right\} \times \\ & \times \left\{ j\varepsilon w \lambda S(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} [\lambda S(t) + \kappa S^2(t)] \right\} \mathbf{e} = \\ & = \Phi_3(w, t) \left\{ \mathbf{R}'(0) + j\varepsilon w S(t) \mathbf{f}'(0) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} S(t) \mathbf{f}'(0) + (j\varepsilon w)^2 S^2(t) \mathbf{g}'(0) \right\} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{P} - \mathbf{I} + S(t) \left[ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w)^3}{6} \right] \mathbf{P} \right\} \mathbf{e} + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\Phi_3(w, t_0) = 1. \quad (2.147)$$

Отсюда после приведения подобных при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем следующую задачу Коши относительно неизвестной функции  $\Phi_3(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_3(w, t)}{\partial t} = \Phi_3(w, t) \left\{ \frac{(jw)^3}{6} [\lambda S(t) + 3\kappa S^2(t) + \mu S^3(t)] \right\}, \quad (2.148)$$

где величина  $\mu = 6\mathbf{g}'_0 \mathbf{e}$ , а вектор-строка  $\mathbf{g}'_0$  является решением системы линейных алгебраических уравнений (2.140). В результате получаем следующее решение задачи (2.148), (2.147):

$$\Phi_3(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \left[ \lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + 3\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau + \mu \int_{t_0}^t S^3(\tau) d\tau \right] \right\},$$

подставляя которое в (2.142), получим (2.141). *Теорема доказана.*

Выполнив в (2.141) замены, обратные (2.136), подставив результат в (2.133), умножая полученное выражение на  $\mathbf{e}$  и рассматривая функционирование системы в стационарном режиме, аналогично подходу п. 2.6 положим  $t_0 = -\infty$ ,  $t = T$ . Получим следующий вид аппроксимации  $h^{(3)}(u)$  для характеристической функции  $h(u)$  числа заявок в системе SM/GI/ $\infty$ , функционирующей в стационарном режиме:

$$h^{(3)}(u) = \exp \left\{ juN\lambda b + \frac{(ju)^2}{2} [N\lambda b + N\kappa\beta] + \frac{(ju)^3}{6} [N\lambda b + 3N\kappa\beta + N\mu\gamma] \right\}, \quad (2.149)$$

где  $b = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] d\tau$  есть среднее время обслуживания,  $\beta = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 d\tau$ ,

$\gamma = \int_0^{\infty} (1 - B(\tau))^3 d\tau$ , величины  $\lambda$  и  $\kappa$  определены в Таблице 1.1 для полумарковского потока, а величина  $\mu$  определяется выражением (2.139).

## 2.8 Метод начальных моментов

В предыдущих разделах получены асимптотические результаты анализа СМО вида GI/GI/∞. Для определения области их применимости требуется иметь некоторые результаты, полученные в допредельных, не асимптотических условиях. Но к сожалению, таких результатов в теории массового обслуживания пока не получено. Для того, чтобы провести хотя бы какую-то оценку области применимости аппроксимации (2.47) и других, полученных в данной работе, в Главе 5, например, проводится численное сравнение асимптотических результатов с результатами имитационного моделирования. Однако существуют аналитические методы, позволяющие получить некоторые характеристики функционирования СМО, подходящие для сравнения с асимптотическими. Одним из таких методов является метод начальных моментов, позволяющий для частного случая – системы GI/M/∞ – аналитически вычислить моменты исследуемого процесса  $i(t)$  числа заявок в системе в стационарном режиме функционирования. Данный подход позволяет получить начальные моменты любого порядка, но в настоящей работе ограничимся только моментами первого и второго порядков, так как именно они интересны для оценки качества аппроксимации, представляющей нормальное распределение.

Итак, рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, рекуррентным входящим потоком и экспоненциальным об-

служиванием с параметром  $\mu$ . Длины интервалов между последовательными моментами поступления заявок во входящем потоке имеют функцию распределения  $A(x)$ . Интенсивность такого потока равна  $\lambda$ , значение которой определяется по формуле (2.37).

Обозначим через  $z(t)$  – время, оставшееся от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки. Ввиду того, что время обслуживания в рассматриваемой СМО имеет экспоненциальное распределение, процесс  $\{i(t), z(t)\}$  является марковским. Для его распределения вероятностей  $P(i, z, t) = P\{i(t) = i, z(t) < z\}$  можно записать равенства

$$P(i, z, t + \Delta t) = [P(i, z + \Delta t, t) - P(i, \Delta t, t)] \cdot [1 - i\mu\Delta t] + P(i - 1, \Delta t, t)A(z) + P(i + 1, z + \Delta t)(i + 1)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P(i, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(i, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(i, 0, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(i - 1, 0, t)}{\partial z} A(z) - P(i, z, t)i\mu + P(i + 1, z, t)(i + 1)\mu$$

для  $i = 0, 1, 2, \dots$  (предполагается, что  $P(i, z, t) \equiv 0$  для  $i < 0$ ).

Для частичной характеристической функции  $H(u, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P(i, z, t)$  это

уравнение примет вид

$$\frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} [A(z)e^{ju} - 1] + j\mu \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial u} [1 - e^{-ju}].$$

Перепишывая это уравнение для стационарного режима относительно функции  $H(u, z)$ , получим

$$\frac{\partial H(u, z)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0)}{\partial z} [A(z)e^{ju} - 1] + j\mu \frac{\partial H(u, z)}{\partial u} [1 - e^{-ju}] = 0. \quad (2.150)$$

**Момент первого порядка.** Продифференцируем уравнение (2.150) по  $u$ .

Применяя обозначение

$$\left. \frac{\partial H(u, z)}{\partial u} \right|_{u=0} = jm_1(z)$$

и используя тот факт, что

$$\left. \frac{\partial H(u,0)}{\partial z} \right|_{u=0} = \frac{dR(0)}{dz} = \lambda,$$

где  $R(z)$  определена в п. 1.1, получим следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $m_1(z)$ :

$$m_1'(z) + m_1'(0)[A(z) - 1] + \lambda A(z) - \mu m_1(z) = 0.$$

Применяя здесь преобразования Лапласа – Стилтеса  $m_1^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dm_1(z)$  и

$$A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dA(z), \text{ получим}$$

$$m_1^*(\alpha)(\alpha - \mu) + m_1'(0)[A^*(\alpha) - 1] + \lambda A^*(\alpha) = 0. \quad (2.151)$$

Известно [111], что в стационарном режиме начальный момент первого порядка (математическое ожидание) числа заявок в системе равен  $m_1 = m_1(\infty) = m_1^*(0)$ . Подставляя в (2.151) значение  $\alpha = 0$  и учитывая, что  $A^*(0) = 1$ , получим

$$m_1 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (2.152)$$

что отражает общеизвестный факт [201] (формула Литтла).

**Начальный момент второго порядка.** Продифференцируем уравнение (2.150) по  $u$  дважды. Применяя обозначение

$$\left. \frac{\partial^2 H(u, z)}{\partial u^2} \right|_{u=0} = j^2 m_2(z),$$

получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $m_2(z)$ :

$$m_2'(z) + m_2'(0)[A(z) - 1] + A(z)[2m_1'(0) + \lambda] - 2\mu m_2(z) + \mu m_1(z) = 0.$$

Применяя здесь преобразования Лапласа – Стилтеса, описанные выше, а

также  $m_2^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dm_2(z)$ , получим следующее уравнение

$$m_2^*(\alpha)(\alpha - 2\mu) + m_2'(0)[A^*(\alpha) - 1] + [2m_1'(0) + \lambda]A^*(\alpha) + \mu m_1^*(\alpha) = 0. \quad (2.153)$$

Известно [111], что в стационарном режиме начальный момент второго порядка числа заявок в системе равен  $m_2 = m_2(\infty) = m_2^*(0)$ . Подставляя в (2.153) значение  $\alpha = 0$ , получим

$$m_2 = \frac{m_1'(0) + \lambda}{\mu}. \quad (2.154)$$

Чтобы определить константу  $m_1'(0)$ , подставим в (2.151) значение  $\alpha = \mu$ . Получим

$$m_1'(0) = \lambda \frac{A^*(\mu)}{1 - A^*(\mu)}.$$

Подставим это выражение в (2.154) и после несложных преобразований получаем

$$m_2 = \frac{m_1}{1 - A^*(\mu)}.$$

Дисперсия числа заявок в системе в стационарном режиме функционирования может быть рассчитана по известной формуле

$$D = m_2 - m_1^2. \quad (2.155)$$

В частности, в случае простейшего входящего потока интенсивности  $\lambda$  имеем

$$A^*(\mu) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Отсюда получаем, что дисперсия числа заявок в системе  $M/M/\infty$  в стационарном режиме функционирования равна

$$D = m_2 - m_1^2 = \frac{\lambda}{\mu},$$

что совпадает с широко известными результатами [16] (распределение Пуассона).

В Главе 5 представлены результаты численного сравнения аналитических моментов (2.152) и (2.155) с асимптотическими из (2.47).

## 2.9 Резюме

В настоящей главе были представлены четыре подхода к анализу СМО с неограниченным числом приборов: классический метод многомерных марковских процессов (п. 2.1) – для исследования системы с обслуживанием фазового типа, метод выделения первого скачка (п. 2.2) – для анализа систем с рекуррентным входящим потоком и произвольным обслуживанием, метод начальных моментов (п. 2.6) – для анализа систем с экспоненциальным обслуживанием, метод динамического просеивания (п. 2.3) – для исследования СМО с неограниченным числом приборов произвольной конфигурации.

Представлен асимптотический анализ СМО следующих типов:  $GI/PH/\infty$ ,  $GI/GI/\infty$ ,  $MAR/GI/\infty$ ,  $SM/GI/\infty$ . Показано, что в каждом из этих случаев асимптотическое распределение является нормальным (гауссовским). Причем среднее число заявок в системе во всех случаях составляет  $\bar{\lambda}b$ , где  $\bar{\lambda}$  – интенсивность входящего потока,  $b$  – среднее время обслуживания одной заявки. Данный результат совпадает с результатом анализа системы  $GI/M/\infty$  методом начальных моментов и классическим результатом теории массового обслуживания – теоремой Литтла [201]. Численный анализ точности вычисления дисперсии числа заявок в системе в стационарном режиме по асимптотическим формулам, а также точности самой гауссовской аппроксимации и выводы об области применимости асимптотических методов представлены в Главе 5.

Описанные в настоящей главе методы исследования предоставляют различные механизмы анализа СМО с неограниченным числом приборов. Однако в пп. 2.4–2.6 показано, что метод динамического просеивания, представленный в п. 2.3, применим для анализа СМО с неограниченным числом приборов, произвольным обслуживанием и различными типами входящих потоков, в то время как классический метод многомерных марковских процессов позволяет получить результаты лишь для систем с обслуживанием фазового типа, а метод выделения первого скачка [16] – для систем с произвольным об-

служиванием, но только рекуррентным входящим потоком.

Примечательно, что результаты, полученные методом динамического просеивания и асимптотического анализа, говорят о том, что для СМО с неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda b$  и дисперсией  $[N\lambda b + N\kappa\beta]$  при любых типах входящих потоков. При этом величины  $\lambda$  и  $\kappa$ , значения которых можно вычислить, пользуясь Таблицей 1.1, полностью определяются параметрами входящего потока, а величины  $b$  и  $\beta$ , вычисляемые по формулам (2.46) и (2.48), определяются исключительно параметрами обслуживания.

В п. 2.7 для каждого типа рассмотренных СМО выполнен асимптотический анализ третьего порядка получена более точная аппроксимация третьего порядка  $h^{(3)}(u)$  стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе, что подтверждается результатами численных экспериментов, представленных в Главе 5.

Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в работах автора [85, 92, 95, 102, 210].

## Глава 3 Исследование немарковских многофазных систем обслуживания с высокоинтенсивными входящими потоками

### 3.1 Модель многофазной системы обслуживания

В настоящей главе рассматриваются многофазные СМО с неограниченным числом приборов. Схема многофазной СМО представлена на Рисунке 3.1. На вход системы поступает поток заявок, каждая из которых занимает один из приборов первой фазы для обслуживания. Время обслуживания на первой фазе является случайной величиной с функцией распределения  $B_1(x)$ . По окончании обслуживания на первой фазе каждая заявка переходит на вторую, где находится в течение случайного времени с функцией распределения  $B_2(x)$ . Далее заявка переходит на третью фазу и т.д., пока не дойдет до последней  $K$ -ой фазы, на которой она обслуживается в течение времени с функцией распределения  $B_K(x)$ , и по окончании обслуживания на которой заявка покидает систему. В настоящей работе предполагается, что случайные величины, заданные функциями распределения  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$ , ...,  $B_K(x)$ , имеют конечные математические ожидания.

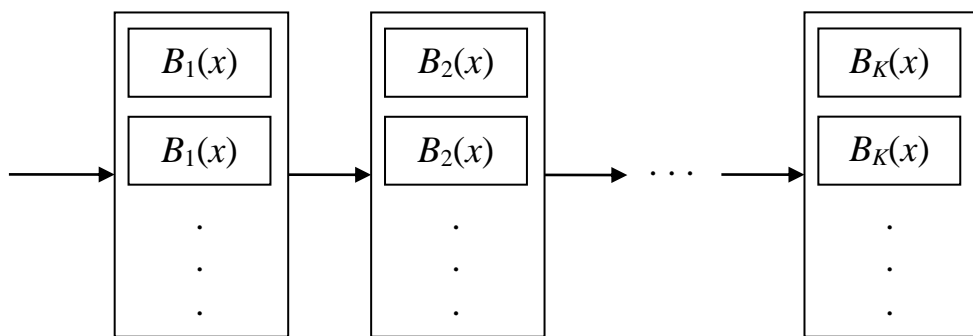


Рисунок 3.1 – Схема многофазной СМО

Обозначим  $i_k(t)$  – число заявок, находящихся на обслуживании на  $k$ -ой фазе системы в момент времени  $t$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Ставится задача поиска многомерного стационарного распределения случайного процесса  $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), \dots, i_K(t)]^T$

числа заявок на фазах системы.

### 3.2 Исследование многофазной СМО $GI/(GI/\infty)^K$ методом выделения первого скачка

В настоящем разделе представлена модификация метода выделения первого скачка, представленного в [16] и примененного в п. 2.2 настоящей работы для анализа однофазных СМО с рекуррентным входящим потоком, на многомерный случай для анализа многофазных СМО (а также, как будет показано в следующей главе, – и для анализа сетей обслуживания).

Пусть высокоинтенсивный входящий поток задан функцией распределения  $A(x)$  длин интервалов между последовательными моментами поступления заявок. Развивая методику выделения первого скачка [16] (п. 2.2), составим соответствующую систему уравнений для рассматриваемой многофазной СМО.

Пусть в начальный момент времени  $t_0 = 0$  система пуста и в нее поступает первая заявка. Эта заявка важна для построения уравнений, поэтому будем выделять ее особо и называть *первой заявкой*. Обозначим через  $W_k(t)$  вероятность того, что первая заявка в момент времени  $t > t_0$  будет находиться на обслуживании на  $k$ -ой фазе системы, а через  $W_0(t)$  – вероятность того, что первая заявка покинет систему (завершит обслуживание на последней фазе) до момента  $t$ . Очевидно, что имеет место равенство

$$W_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^K W_k(t). \quad (3.1)$$

Найдем вероятности  $W_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ . Во-первых, очевидно, что

$$W_1(t) = 1 - B_1(t).$$

Далее, обозначим через  $\tau_k$  время обслуживания первой заявки на  $k$ -ой фазе системы. Тогда для  $k = 2$  имеем

$$\begin{aligned}
W_2(t) &= \mathbf{P}\{\tau_1 < t \leq \tau_1 + \tau_2\} = \int_0^t \mathbf{P}\{\tau_1 < t \leq \tau_1 + \tau_2 \mid \tau_1 = x\} dB_1(x) = \\
&= \int_0^t \mathbf{P}\{t \leq x + \tau_2\} dB_1(x) = \int_0^t \mathbf{P}\{\tau_2 \geq t - x\} dB_1(x) = \int_0^t [1 - B_2(t - x)] dB_1(x) = \quad (3.2) \\
&= B_1(t) - \int_0^t B_2(t - x) dB_1(x) = B_1(t) - (B_1 * B_2)(t).
\end{aligned}$$

Здесь  $(B_1 * B_2)(t)$  – свертка функций  $B_1(t)$  и  $B_2(t)$ . Используя обозначение для  $k$ -кратной свертки  $B_k^*(t) = (B_1 * \dots * B_k)(t)$  при  $k > 1$  и  $B_1^*(t) = B_1(t)$ , формулу (3.2) перепишем в виде

$$W_2(t) = B_1^*(t) - B_2^*(t).$$

Для значений  $k = \overline{3, K}$  имеем

$$W_k(t) = \mathbf{P}\left\{ \sum_{v=1}^{k-1} \tau_v < t \leq \sum_{v=1}^k \tau_v \right\}.$$

С использованием обозначения  $\xi_k = \sum_{v=1}^{k-1} \tau_v$  это выражение перепишется в виде

$$W_k(t) = \mathbf{P}\{\xi_k < t \leq \xi_k + \tau_k\}.$$

Выполняя здесь преобразования, аналогичные выводу (3.2), и учитывая, что для суммы  $\xi_k$  независимых случайных величин  $\tau_k$  имеет место равенство  $\mathbf{P}\{\xi_k < t\} = B_{k-1}^*(t)$ , получаем

$$W_k(t) = B_{k-1}^*(t) - B_k^*(t) \quad (3.3)$$

для  $k > 1$ . С использованием обозначения  $B_0^*(t) \equiv 1$  формула (3.3) расширяется на весь диапазон  $k = \overline{1, K}$ . Величина  $W_0(t)$  может быть найдена из условия нормировки (3.1).

Обозначим распределение вероятностей исследуемого многомерного процесса  $\mathbf{i}(t)$  следующим образом:  $P(\mathbf{i}, t) = \mathbf{P}\{\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}\}$ . Тогда, выделяя траекторию первой заявки (первый скачок) можем записать следующую систему интегральных уравнений:

$$P(\mathbf{0}, t) = W_0(t) \left[ 1 - A(t) + \int_0^t P(\mathbf{0}, t-x) dA(x) \right], \quad (3.4)$$

$$P(\mathbf{e}_k, t) = W_0(t) \int_0^t P(\mathbf{e}_k, t-x) dA(x) + W_k(t) \left[ 1 - A(t) + \int_0^t P(\mathbf{0}, t-x) dA(x) \right], \quad (3.5)$$

для  $k = \overline{1, K}$ , где  $\mathbf{e}_k$  – вектор, все элементы которого равны 0 за исключением  $k$ -ого, который равен 1. Наконец, для всех значений вектора  $\mathbf{i}$ , не совпадающих с  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{e}_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ), имеем

$$P(\mathbf{i}, t) = W_0(t) \int_0^t P(\mathbf{i}, t-x) dA(x) + \sum_{k=1}^K W_k(t) \int_0^t P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, t-x) dA(x). \quad (3.6)$$

Здесь предполагаем, что  $P(\mathbf{i}, t) = 0$ , если хотя бы один элемент вектора  $\mathbf{i}$  меньше нуля.

Для процесса  $\mathbf{i}(t)$  введем нестационарную характеристическую функцию  $H(\mathbf{u}, t)$  векторного аргумента  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K]^T$ :

$$H(\mathbf{u}, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_{K}i_1 + \dots + ju_{1}i_K} P(\mathbf{i}, t) = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{0}}^{\infty} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{i}} P(\mathbf{i}, t). \quad (3.7)$$

**Теорема 3.1.** *Характеристическая функция  $H(\mathbf{u}, t)$  удовлетворяет следующему уравнению первого скачка:*

$$H(\mathbf{u}, t) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{ju_k} \right] \left[ 1 - A(t) + \int_0^t H(\mathbf{u}, t-x) dA(x) \right]. \quad (3.8)$$

*Доказательство.* Из (3.4)–(3.7) имеем

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}, t) &= W_0(t) \int_0^t e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{0}} P(\mathbf{0}, t-x) dA(x) + W_0(t) e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{0}} [1 - A(t)] + \\ &+ \sum_{k=1}^K W_0(t) \int_0^t e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{e}_k} P(\mathbf{e}_k, t-x) dA(x) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{e}_k} [1 - A(t)] + \\ &+ \sum_{k=1}^K W_k(t) \int_0^t e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{e}_k} P(\mathbf{0}, t-x) dA(x) + \sum_{\mathbf{i} > \mathbf{e}_v} W_0(t) \int_0^t e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{i}} P(\mathbf{i}, t-x) dA(x) + \\ &+ \sum_{\mathbf{i} > \mathbf{e}_v} \sum_{k=1}^K W_k(t) \int_0^t e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{i}} P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, t-x) dA(x). \end{aligned}$$

Здесь символ  $\sum_{\mathbf{i} > \mathbf{e}_v}$  означает суммирование по всем значениям вектора  $\mathbf{i}$ , не совпадающим с  $\mathbf{0}$  или  $\mathbf{e}_v$  ( $v = \overline{1, K}$ ). Отсюда, группируя слагаемые, получаем (3.8). *Теорема доказана.*

Будем решать уравнение (3.8) в условиях высокой интенсивности входящего потока (см. п. 1.1). Для этого функцию  $A(t)$  представим в виде  $A(Nt)$ , тогда уравнение (3.8) переписется в виде

$$H(\mathbf{u}, t) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j\omega_k} \right] \left[ 1 - A(Nt) + \int_0^t H(\mathbf{u}, t-x) dA(Nx) \right]. \quad (3.9)$$

**Асимптотический анализ первого порядка.** Выполним в (3.9) замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H(\mathbf{u}, t) = F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon),$$

получим уравнение

$$F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j\varepsilon \omega_k} \right] \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^t F_1(\mathbf{w}, t-x, \varepsilon) dA\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]. \quad (3.10)$$

Докажем следующее утверждение относительно асимптотического решения  $F_1(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  этого уравнения.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mathbf{W}(\tau) = [W_1(\tau), \dots, W_K(\tau)]^T$ , где вероятности  $W_k(\tau)$  определяются по формулам (3.3). Тогда асимптотическое решение уравнения (3.10) имеет вид

$$F_1(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ j\lambda \mathbf{w}^T \int_0^t \mathbf{W}(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.11)$$

*Доказательство.* В интеграле уравнения (3.10) выполним замену  $z = x/\varepsilon$ , получим

$$F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j\varepsilon \omega_k} \right] \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} F_1(\mathbf{w}, t - z\varepsilon, \varepsilon) dA(z) \right].$$

Используя разложения

$$e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + O(\varepsilon^2),$$

$$F_1(\mathbf{w}, t - z\varepsilon, \varepsilon) = F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) - z\varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} + O(\varepsilon^2),$$

получаем:

$$F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t)(1 + j\varepsilon w_k) \right] \times \\ \times \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \left\{ F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) - z\varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} \right\} dA(z) \right] + O(\varepsilon^2).$$

Выполним в этом выражении предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k \right] \left[ \int_0^{\infty} F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) dA(z) - \int_0^{\infty} z\varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} dA(z) \right] + O(\varepsilon^2) \right\} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k \right] \left[ F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} a \right] + O(\varepsilon^2) \right\}.$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \lambda F_1(\mathbf{w}, t) \sum_{k=1}^K W_k(t) jw_k = \lambda F_1(\mathbf{w}, t) j\mathbf{w}^T \mathbf{W}(t),$$

решая которое при начальном условии  $F_1(\mathbf{w}, 0) = 1$ , получаем (3.11). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Введем функцию  $H_2(\mathbf{u}, t)$ , удовлетворяющую выражению

$$H(\mathbf{u}, t) = H_2(\mathbf{u}, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.12)$$

Подставим это выражение в (3.9):

$$H_2(\mathbf{u}, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau \right\} = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{ju_k} \right] \times \\ \times \left[ 1 - A(Nt) + \int_0^t H_2(\mathbf{u}, t-x) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_0^{t-x} W_k(\tau) d\tau \right\} dA(Nx) \right].$$

Выполнив здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_2(\mathbf{u}, t) = F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon), \quad (3.13)$$

получим следующее уравнение относительно функции  $F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$ :

$$F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^K j \varepsilon w_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau \right\} = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j \varepsilon w_k} \right] \times \\ \times \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) + \int_0^t F_2(\mathbf{w}, t-x, \varepsilon) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^K j \varepsilon w_k \int_0^{t-x} W_k(\tau) d\tau \right\} dA\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \right]. \quad (3.14)$$

Обозначим  $F_2(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$ .

**Теорема 3.3.** Пусть величины  $\lambda$  и  $\kappa$  определяются выражениями (1.1) и (1.14) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $F_2(\mathbf{w}, t)$  уравнения (3.14) имеет вид

$$F_2(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j w_k)^2}{2} \int_0^t W_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{j w_k j w_v}{2} \int_0^t W_k(\tau) W_v(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.15)$$

*Доказательство.* В уравнении (3.14) в интеграле по  $dA(\cdot)$  сделаем замену  $z = x / \varepsilon^2$ , получим

$$F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j \varepsilon w_k} \right] \left[ \left\{ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^K j w_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau \right\} + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} F_2(\mathbf{w}, t - z \varepsilon^2, \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t-z\varepsilon^2}^t W_k(\tau) d\tau \right\} dA(z) \right]. \quad (3.16)$$

Используя разложение  $\int_{t-z\varepsilon^2}^t W_k(\tau) d\tau = z \varepsilon^2 W_k(t) + O(\varepsilon^4)$ , получаем

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-\frac{\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^K jw_k \int_{t-z\varepsilon^2}^t W_k(\tau) d\tau\right\} &= \exp\left\{-\frac{\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^K jw_k [z\varepsilon^2 W_k(t) + O(\varepsilon^4)]\right\} = \\
&= \exp\left\{-\lambda z \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k W_k(t) + O(\varepsilon^3)\right\} = \\
&= 1 - \lambda z \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k W_k(t) + \frac{\lambda^2 z^2}{2} \left[\sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k W_k(t)\right]^2 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Считая, что функции  $F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  и  $A(x)$  удовлетворяют условиям

$$\int_{\frac{t}{\varepsilon^2}}^{\infty} F_2(\mathbf{w}, t - z\varepsilon^2, \varepsilon) dA(z) = o(\varepsilon^2)$$

и

$$\left\{1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^K jw_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau\right\} = o(\varepsilon^2), \tag{3.18}$$

подставляя (3.18) и (3.17) в (3.16) и используя разложения

$$e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} + O(\varepsilon^3),$$

$$F_2(\mathbf{w}, t - z\varepsilon^2, \varepsilon) = F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) - z\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} + o(\varepsilon^2),$$

получаем

$$\begin{aligned}
F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) &= \left\{W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k + \sum_{k=1}^K W_k(t) \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2}\right\} \times \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \left\{ \left[ F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) - z\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ 1 - \lambda z \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k + \frac{\lambda^2 z^2}{2} \left\{ \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k \right\}^2 \right] dA(z) \right\} + o(\varepsilon^2) = \\
&= \left\{ 1 + \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k + \sum_{k=1}^K W_k(t) \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} \right\} \left\{ F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) - F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \lambda a \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k + \right. \\
&\quad \left. + F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \frac{\lambda^2 a_2}{2} \left[ \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k \right]^2 - \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} a \right\} + o(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

где  $a_2$  – второй начальный момент случайной величины с функцией распре-

деления  $A(x)$ . В итоге получаем уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} a = F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left\{ \sum_{k=1}^K W_k(t) \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} + \left[ \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1 \right] \left[ \sum_{k=1}^K W_k(t) j\varepsilon w_k \right]^2 \right\} + o(\varepsilon^2).$$

Поделив обе части этого уравнения на  $\varepsilon^2$  и выполнив предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом того, что  $\lambda^3(a_2 - 2a^2) = \lambda^3(\sigma^2 - a^2) = \kappa$ , получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $F_2(\mathbf{w}, t)$ :

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = F_2(\mathbf{w}, t) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} W_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} W_k(t) W_v(t) \right\}.$$

Решая это уравнение при начальном условии  $F_2(\mathbf{w}, 0) = 1$ , получаем (3.15).

*Теорема доказана.*

Выполним в (3.15) замены, обратные (3.13) и (3.12), получим следующее выражение для функции  $H(\mathbf{u}, t)$  при достаточно больших значениях  $N$ :

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k(t) + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} V_{kv}(t) \right\},$$

где  $Y_k(t) = \int_0^t W_k(\tau) d\tau$  и  $V_{kv}(t) = \int_0^t W_k(\tau) W_v(\tau) d\tau$  для  $k, v = \overline{1, K}$ . С использованием

матричных обозначений  $\mathbf{Y}(t) = \text{diag} \{Y_1(t), \dots, Y_K(t)\}$  и  $\mathbf{V}(t) = [V_{kv}(t)]_{k, v = \overline{1, K}}$  это выражение переписывается в виде

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \mathbf{j}\mathbf{u}^T \mathbf{Y}(t) \mathbf{e} + \frac{1}{2} N\mathbf{j}\mathbf{u}^T [\lambda \mathbf{Y}(t) + \kappa \mathbf{V}(t)] \mathbf{j}\mathbf{u} \right\}. \quad (3.19)$$

Отсюда при  $t \rightarrow \infty$  получаем следующее выражение для аппроксимации  $h^{(2)}(\mathbf{u})$  характеристической функции  $h(\mathbf{u})$  многомерного распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования

$$h^{(2)}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ N\lambda \mathbf{j}\mathbf{u}^T \mathbf{Y} \mathbf{e} + \frac{1}{2} N\mathbf{j}\mathbf{u}^T [\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}] \mathbf{j}\mathbf{u} \right\}, \quad (3.20)$$

где

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\infty), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\infty). \quad (3.21)$$

Выясним смысл диагональных элементов  $Y_k$   $k = \overline{1, K}$  матрицы  $\mathbf{Y}$ . Из (3.3) получаем:

$$\begin{aligned} Y_k = Y_k(\infty) &= \int_0^{\infty} W_k(t) dt = \int_0^{\infty} [B_{k-1}^*(t) - B_k^*(t)] dt = \\ &= \int_0^{\infty} [1 - B_k^*(t)] dt - \int_0^{\infty} [1 - B_{k-1}^*(t)] dt = \sum_{v=1}^k b_v - \sum_{v=1}^{k-1} b_v = b_k, \end{aligned}$$

где  $b_k$  – среднее время обслуживания на  $k$ -ой фазе. Таким образом, среднее число заявок, находящихся на обслуживании на  $k$ -ой фазе рассматриваемой СМО, равно

$$m_k = N\lambda b_k. \quad (3.22)$$

Итак, в условиях высокой интенсивности входящего потока распределение числа заявок на фазах многофазной системы  $GI/(GI/\infty)^K$  аппроксимируется многомерным нормальным распределением с вектором средних  $N\lambda\mathbf{Y}\mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ .

### 3.3 Метод многомерного динамического просеивания

Анализ многофазных СМО и тем более сетей обслуживания классическими методами многомерных марковских процессов возможен в случае экспоненциального обслуживания и обслуживания фазового типа на фазах системы или узлах сети. Применение метода выделения первого скачка расширяет класс исследуемых систем и сетей до моделей с произвольным обслуживанием, но только с рекуррентным входящим потоком. В настоящем разделе представлен метод многомерного динамического просеивания, который позволяет проводить исследования многофазных моделей с неограниченным числом приборов при различных типах входящего потока. В последующих разделах этот подход применяется для анализа многофазных СМО с рекуррентным, МАР и полумарковским входящими потоками.

Метод многомерного динамического просеивания построен способом, во

многом аналогичным способу построения метода динамического просеивания, представленного в п. 2.3, поэтому в данном разделе изложим лишь суть данного подхода без подробных рассуждений о марковости многомерного считающего процесса и доказательства основной формулы.

Итак, изобразим  $K + 1$  параллельных осей времени (Рисунок 3.2), пронумерованных от нуля до  $K$ . Ось под номером 0 будет использоваться для отображения событий исходного потока (события помечены крестами), оси под номерами от 1 до  $K$  будут соответствовать  $K$  просеянным потокам. Пусть задан некоторый набор функций  $S_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , значения которых лежат в диапазоне  $[0, 1]$  и обладают свойством

$$\sum_{k=1}^K S_k(t) \leq 1$$

для любых  $t$ .

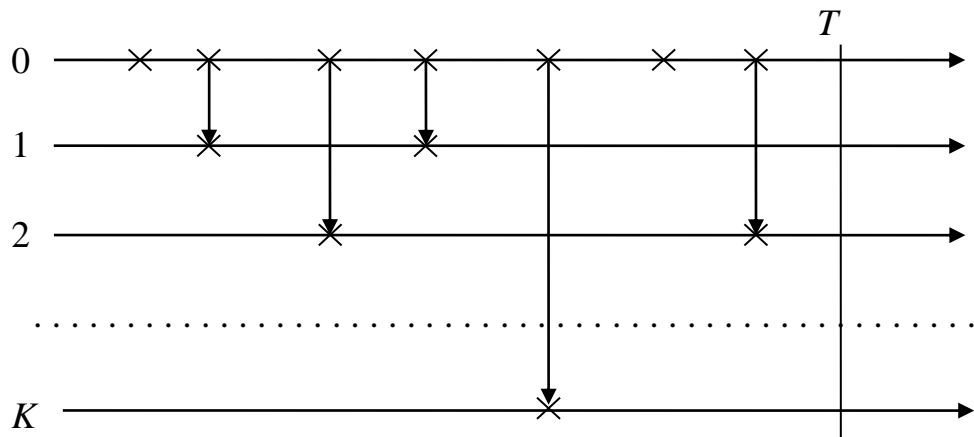


Рисунок 3.2 – Просеивание событий входящего потока на фазы системы

Многомерный просеянный поток строится следующим образом. Событие исходного потока может отобразиться (просеяться) только на одну из осей  $1, \dots, K$  либо не отобразиться ни на одну. Вероятность того, что событие исходного потока, наступившее в некоторый момент времени  $t_v > t_0$ , будет просеяно на  $k$ -ую ось ( $k \in \{1, \dots, K\}$ ) равна  $S_k(t_v)$ . Причем это событие не будет просеяно ни на одну из осей с вероятностью

$$S_0(t_v) = 1 - \sum_{k=1}^K S_k(t_v).$$

Собирая воедино все просеянные на оси  $1, 2, \dots, K$  потоки, получаем *многомерный просеянный поток*, сформированный из исходного на основе множества динамических вероятностей просеивания  $S_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Идея применения многомерного просеянного потока к исследованию многофазных СМО (а также – СеМО, см. пп. 4.4–4.6) заключается в следующем. Пусть в начальный момент времени  $t_0$  рассматриваемая система пуста. Зафиксируем некоторый момент времени  $T > t_0$ . Выберем в качестве динамических вероятностей просеивания  $S_k(t)$  вероятности того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени  $t$ , в момент  $T$  будет находиться на  $k$ -ой фазе. В качестве  $S_0(t)$  выберем вероятность того, что до момента  $T$  эта заявка завершит обслуживание в системе и покинет ее. Так как каждая заявка, поступившая в систему в момент времени  $t$ , в момент  $T$  может оказаться только на одной из фаз системы либо покинуть ее, то, очевидно, что выбранные таким образом вероятности просеивания  $S_k(t)$ ,  $k = \overline{0, K}$  удовлетворяют указанным выше свойствам.

Обозначим через  $n_k(t)$  число событий, наступивших на  $k$ -ой оси просеянного потока до момента времени  $t > t_0$ ,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_k(t)]^T$  – считающий процесс многомерного просеянного потока. Тогда аналогично результату (2.50) в силу построения получаем, что многомерное распределение вероятностей числа событий, наступивших в многомерном просеянном потоке до момента времени  $T$ , совпадает с многомерным распределением вероятностей процесса  $\mathbf{i}(t)$  (числа заявок на фазах системы) в момент времени  $t = T$ , то есть имеют место равенства

$$P\{\mathbf{i}(T) = \mathbf{m}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}\} \quad (3.23)$$

для любых целых неотрицательных значений компонент вектора  $\mathbf{m}$ . Таким образом, получив вероятностные характеристики (многомерный закон распределения) случайного процесса  $\mathbf{n}(t)$  и подставив значение  $t = T$ , получим

соответствующие характеристики интересующего нас процесса  $\mathbf{i}(t)$  при  $t = T$ , причем момент  $T$  был выбран, вообще говоря, произвольно. Результат (3.23) будем называть *основной формулой* метода многомерного динамического просеивания.

Очевидно, что многомерный случайный процесс  $\mathbf{n}(t)$  не является марковским, однако нетрудно показать, что для его марковизации можно использовать дополнительные компоненты, представленные в Таблице 2.1.

Остается решить только вопрос вычисления вероятностей просеивания  $S_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , каждая из которых равна вероятности того, что заявка, поступившая в момент времени  $t$ , в момент  $T$  будет находиться на  $k$ -ой фазе системы. Таким образом, при рассмотрении заявки, поступившей в момент времени  $t$ , нас будет интересовать, до какой фазы системы эта заявка дойдет к моменту  $T$ , то есть за интервал времени  $T - t$ . Но в п. 3.2 мы уже вычисляли вероятности  $W_k(t)$  того, что заявка, поступившая в момент  $t_0 = 0$ , к моменту  $t$ , то есть за интервал времени длины  $t$ , перейдет на  $k$ -ую фазу системы (формула (3.3)). Следовательно, искомые вероятности просеивания можно найти по формулам

$$S_k(t) = W_k(T - t) = B_{k-1}^*(T - t) - B_k^*(T - t), \quad (3.24)$$

где  $B_0^*(t) \equiv 1$ ,  $B_1^*(t) = B_1(t)$ , а  $B_k^*(\tau) = (B_1 * \dots * B_k)(\tau)$  для  $k > 1$  —  $k$ -кратная свертка функций распределения  $B_1(x)$ , ...,  $B_k(x)$  длительности обслуживания на фазах системы. Вероятность  $S_0(t)$  получается из условия нормировки

$$S_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^K S_k(t).$$

В Главе 4 будет представлено описание метода многомерного динамического просеивания для сетей обслуживания. Забегая вперед, скажем, что отличие применения этого метода к многофазным СМО и к СеМО заключается лишь в формулах для вычисления вероятностей просеивания. В работе [84] метод многомерного динамического просеивания применительно к многофазным СМО был назван «методом многофазного просеивания», хотя, на са-

мом деле, разница в применении этого метода к многофазным СМО или к сетям обслуживания, как будет показано в п. 4.3, заключается лишь в формулах для вычисления вероятностей  $S_k(t)$ .

### 3.4 Исследование системы $GI/(GI/\infty)^K$ методом многомерного динамического просеивания

Рассмотрим многофазную СМО с неограниченным числом приборов и высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком, модель которой представлена в п. 3.2. Построим описанным выше образом многомерный просеянный поток для данной СМО. Обозначим  $\mathbf{n}(t)$  – считающий процесс этого потока,  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки из входящего потока. Тогда для распределения вероятностей

$$P(\mathbf{n}, z, t) = P\left\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, z(t) < \frac{z}{N}\right\}$$

$(K + 1)$ -мерного марковского случайного процесса  $\{\mathbf{n}(t), z(t)\}$ , применяя формулу полной вероятности, запишем равенство

$$\begin{aligned} P(\mathbf{n}, z, t + \Delta t) = & P(\mathbf{n}, z + N\Delta t, t) - P(\mathbf{n}, N\Delta t, t) + P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_1, N\Delta t, t)A(z)S_1(t) + \\ & + P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_2, N\Delta t, t)A(z)S_2(t) + \dots + P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_K, N\Delta t, t)A(z)S_K(t) + \\ & + P(\mathbf{n}, N\Delta t, t)A(z)\left[1 - \sum_{k=1}^K S_k(t)\right] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(\mathbf{n}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 - A(z) \sum_{k=1}^K S_k(t) \right] + \\ & + A(z) \sum_{k=1}^K \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} S_k(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Вводя частичную характеристическую функцию

$$H(\mathbf{u}, z, t) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{n}} P(\mathbf{n}, z, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} P(\mathbf{n}, z, t)$$

векторного аргумента  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K]^T$ , из (3.25) получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right]. \quad (3.26)$$

Рассматривая стационарный режим функционирования системы, начальное условие для уравнения (3.26) зададим в виде

$$H(\mathbf{u}, z, t_0) = R(z), \quad (3.27)$$

где стационарное распределение вероятностей  $R(z)$  случайного процесса  $z(t)$  определяется выражением (1.5). Полученную задачу (3.26)–(3.27) будем решать методом асимптотического анализа [111].

**Асимптотический анализ первого порядка.** В уравнении (3.26) выполним замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H(\mathbf{u}, z, t) = F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon),$$

получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right]. \quad (3.28)$$

**Теорема 3.4.** Асимптотическое решение  $F_1(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  уравнения (3.28) имеет вид

$$F_1(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}. \quad (3.29)$$

*Доказательство* этой теоремы выполним в 2 этапа.

*Этап 1.* В уравнении (3.28) выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$0 = \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1].$$

Это уравнение имеет вид, аналогичный (1.4). Следовательно, функцию  $F_1(\mathbf{w}, z, t)$  можно представить в виде

$$F_1(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \Phi_1(\mathbf{w}, t), \quad (3.30)$$

где  $\Phi_1(\mathbf{w}, t)$  – некоторая функция.

*Этап 2.* Выполним в (3.28) предельный переход  $z \rightarrow \infty$ :

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t).$$

Подставим сюда выражение (3.30), воспользуемся разложениями  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + O(\varepsilon^2)$ , поделив обе части на  $\varepsilon$  и производя предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом того, что  $R'(0) = \lambda$ , получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(\mathbf{w}, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \Phi_1(\mathbf{w}, t) \lambda \sum_{k=1}^K j w_k S_k(t).$$

Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_1(\mathbf{w}, t_0) = 1$ , получаем

$$\Phi_1(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}.$$

Подставив это выражение в (3.30), получаем (3.29). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Выполнив в (3.26)–(3.27) замену

$$H(\mathbf{u}, z, t) = H_2(\mathbf{u}, z, t) \exp \left\{ N \lambda \sum_{k=1}^K j u_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}, \quad (3.31)$$

получим следующую задачу относительно функции  $H_2(\mathbf{u}, z, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} + \lambda H_2(\mathbf{u}, z, t) \sum_{k=1}^K j u_k S_k(t) = \\ = \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{j u_k} - 1) S_k(t) \right], \\ H_2(\mathbf{u}, z, t_0) = R(z). \end{cases}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_2(\mathbf{u}, z, t) = F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon), \quad (3.32)$$

получим задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \lambda F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) = \\ = \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \\ F_2(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) = R(z). \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.5.** Пусть величины  $\lambda$ ,  $\kappa$  и функция  $R(z)$  определяются выражениями (1.1), (1.14) и (1.5) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $F_2(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  задачи (3.33) имеет вид

$$F_2(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}. \quad (3.34)$$

Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* Выполним в задаче (3.33) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0, \\ F_2(\mathbf{w}, z, t_0) = R(z). \end{aligned} \right.$$

Уравнение полученной задачи имеет такой же вид, как и уравнение (1.4), поэтому функция  $F_2(\mathbf{w}, z, t)$  может быть представлена в виде

$$F_2(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \Phi_2(\mathbf{w}, t), \quad (3.35)$$

где  $\Phi_2(\mathbf{w}, t)$  – некоторая функция, удовлетворяющая начальному условию

$$\Phi_2(\mathbf{w}, t_0) = 1 \quad (3.36)$$

*Этап 2.* Функцию  $F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  запишем в виде разложения

$$F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ R(z) + f(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.37)$$

которое подставим в уравнение задачи (3.33). Применяя разложения  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + O(\varepsilon^2)$ , в результате получим равенство

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^2) + \lambda R(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) &= R'(z) + f'(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \\
\left[ R'(0) + f'(0) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] &+ O(\varepsilon^2) = \\
= R'(z) + f'(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + R'(0)[A(z) - 1] + \\
+ R'(0)A(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + f'(0)[A(z) - 1] \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) &+ O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение относительно функции  $f(z)$

$$f'(z) + f'(0)[A(z) - 1] + \lambda[A(z) - R(z)] = 0,$$

совпадающее с (1.19). Следовательно,

$$f'(0) - \lambda f(\infty) = \frac{\kappa}{2}, \quad (3.38)$$

где

$$\kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2). \quad (3.39)$$

*Этап 3.* В задаче (3.33) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим равенство

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} + \lambda F_2(\mathbf{w}, \infty, t, \varepsilon) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) = \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t),$$

в которое подставим разложения (3.37) и  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ , тогда можно записать:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} + \lambda \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ 1 + f(\infty) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) &= \\
= \Phi_2(\mathbf{w}, t) S(t) \left[ R'(0) + f'(0) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] \sum_{k=1}^K \left( j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} \right) S_k(t) &+ O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Выполнив здесь несложные преобразования и приводя подобные, с учетом (3.38) получаем

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} S_k(t) S_v(t) \right].$$

Решение этого уравнения при начальном условии (3.36) имеет вид

$$\Phi_2(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\},$$

подставляя которое в (3.35), получаем (3.34). Теорема доказана.

Выполняя в (3.34) замены, обратные к (3.32) и (3.31), и производя предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , для характеристической функции  $H(\mathbf{u}, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(\mathbf{u}, z, t)$  многомерного считающего процесса  $\mathbf{n}(t)$  получаем

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}.$$

Применяя основную формулу многомерного динамического просеивания (3.23), подставим сюда  $t = T$  и перейдем к характеристической функции  $h(\mathbf{u}, T)$  числа заявок на фазах системы в момент времени  $T$ . Выбирая для стационарного режима  $t_0 = -\infty$  и принимая во внимание (3.24), получаем, что вид функции  $h(\mathbf{u}, T)$  не зависит от  $T$  и имеет вид выражения (3.20).

Таким образом, асимптотическое, в условиях высокой интенсивности рекуррентного входящего потока,  $K$ -мерное стационарное распределение вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой СМО является гауссовским (нормальным) с вектором средних значений  $N\lambda \mathbf{Y} \mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $M[\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}]$ , где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (3.21).

В частном случае для многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным простейшим (стационарным пуассоновским) входящим потоком функция распределения  $A(x)$  имеет вид  $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , и соответственно получаем:  $a = 1/\lambda$ ,  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ . Таким образом, из (3.39) величина  $\kappa = 0$ . Следовательно, характеристическая функция  $h(\mathbf{u})$  факторизуется и принимает вид произведения

$$h(\mathbf{u}) = \prod_{k=1}^K \exp \left\{ ju_k N\lambda b_k + \frac{(ju_k)^2}{2} N\lambda b_k \right\},$$

где  $b_k$  – среднее время обслуживания на  $k$ -ой фазе. Получаем, что для многофазной системы с высокоинтенсивным простейшим входящим потоком асимптотическое  $K$ -мерное распределение числа заявок на фазах системы в стационарном режиме является произведением  $K$  одномерных нормальных распределений с математическими ожиданиями и дисперсиями равными  $N\lambda b_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , что совпадает с общеизвестным фактом о факторизации многомерного распределения для сети с неограниченным числом приборов и простейшим входящим потоком.

### 3.5 Исследование многофазной системы $\text{MAP}/(\text{GI}/\infty)^K$

Пусть имеется многофазная СМО с неограниченным числом приборов на каждой фазе и входящим высокоинтенсивным MAP-потоком. Система состоит из  $K$  фаз обслуживания. Время обслуживания на  $k$ -ой фазе является случайной величиной с функцией распределения  $B_k(x)$ .

Входящий высокоинтенсивный MAP-поток задан представлением  $(ND_0, ND_1)$  порядка  $M$  (см. п. 1.2.2). Матрица  $ND = ND_0 + ND_1$  является генератором управляющей цепи Маркова  $m(t)$ . Ее стационарное распределение вероятностей  $\theta$  удовлетворяет системе уравнений (1.24). Интенсивность такого потока составляет  $N\lambda$ , где величина  $\lambda$  определяется по формуле (1.29).

Ставится задача поиска стационарного распределения вероятностей процесса  $\mathbf{i}(t)$  – числа заявок на фазах системы. Как уже говорилось, прямое исследование случайного процесса  $\mathbf{i}(t)$  не представляется возможным, поэтому для решения поставленной задачи воспользуемся методом многомерного динамического просеивания, представленного в п. 3.3.

Рассмотрим марковский процесс  $\{\mathbf{n}(t), m(t)\}$ , где  $\mathbf{n}(t)$  – считающий процесс многомерного просеянного потока. Для его распределения вероятностей  $P(\mathbf{n}, m, t) = P\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, m(t) = m\}$  можно записать систему дифференциальных

уравнений Колмогорова

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, m, t)}{\partial t} = \sum_{v=1}^M P(\mathbf{n}, v, t) (\mathbf{D}_0)_{vm} +$$

$$+ \sum_{v=1}^M \left[ P(\mathbf{n}, v, t) (\mathbf{D}_1)_{vm} S_0(t) + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, v, t) (\mathbf{D}_1)_{vm} S_k(t) \right]$$

для всех значений  $m = \overline{1, M}$  и неотрицательных  $\mathbf{n}$ . С использованием векторных обозначений эта система переписывается в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{n}, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{n}, t) \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}(\mathbf{n}, t) \mathbf{D}_1 S_0(t) + \sum_{k=1}^K \mathbf{P}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, t) \mathbf{D}_1 S_k(t), \quad (3.40)$$

где  $\mathbf{P}(\mathbf{n}, t) = \{P(\mathbf{n}, 1, t), \dots, P(\mathbf{n}, M, t)\}$ , причем  $\mathbf{P}(\mathbf{n}, t) = \mathbf{0}$ , если хотя бы один элемент вектора  $\mathbf{n}$  меньше нуля.

Рассмотрим векторную характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{n}} \mathbf{P}(\mathbf{n}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} \mathbf{P}(\mathbf{n}, t).$$

Для нее система (3.40) переписывается в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, t) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right]. \quad (3.41)$$

Начальное условие для уравнения (3.41) имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Прямое решение задачи Коши (3.41)–(3.42) с использованием матричной экспоненты не представляется возможным. В связи с этим будем искать решение данной задачи в асимптотическом условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока, то есть при  $N \rightarrow \infty$ .

**Асимптотический анализ первого порядка.** Выполним в задаче (3.41)–(3.42) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon).$$

С использованием этих замен задача (3.41)–(3.42) переписывается в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \quad (3.43)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t_0, \varepsilon) = \mathbf{\theta}. \quad (3.44)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.6.** Пусть  $\mathbf{\theta}$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.24) и (1.29) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t)$  задачи (3.43)–(3.44) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \mathbf{\theta} \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j\omega_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.45)$$

*Доказательство* выполним в два этапа.

*Этап 1.* Положим в выражении (3.43)  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получим

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это уравнение с первым уравнением (1.24), можем сделать вывод, что функция  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \mathbf{\theta} \Phi_1(\mathbf{w}, t), \quad (3.46)$$

где  $\Phi_1(\mathbf{w}, t)$  – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_1(\mathbf{w}, t_0) = 1. \quad (3.47)$$

*Этап 2.* Умножим обе части матричного уравнения (3.43) справа на единичный вектор  $\mathbf{e}$ , поделим на  $\varepsilon$ , подставим (3.46) и выполним предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда с учетом того, что

$$\mathbf{D} \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} \mathbf{r} \mathbf{e} = \Phi_1(\mathbf{w}, t) \mathbf{r} \mathbf{D}_1 \mathbf{e} \sum_{k=1}^K j\omega_k S_k(t).$$

Учитывая (1.29) и  $\mathbf{r} \mathbf{e} = 1$ , получаем:

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \Phi_1(\mathbf{w}, t) \lambda \sum_{k=1}^K j\omega_k S_k(t).$$

С учетом начального условия (3.47) получаем следующее решение этого уравнения:

$$\Phi_1(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K jw_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставляя это выражение в (3.46), для функции  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t)$  получаем выражение (3.45). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Введем векторную функцию  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t)$ , удовлетворяющую равенству

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.48)$$

Подставляя это выражение в (3.41)–(3.42), получим следующую задачу Коши относительно функции  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) \lambda \sum_{k=1}^K ju_k S_k(t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right], \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t_0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Выполним здесь следующие замены переменных:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon). \quad (3.50)$$

Тогда задача (3.49) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \lambda \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t_0, \varepsilon) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Обозначим

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon). \quad (3.52)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.7.** Пусть

$$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}, \quad (3.53)$$

где вектор-строка  $\mathbf{g}$  является решением линейного матричного уравнения

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \mathbf{0}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1), \quad (3.54)$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t)$  задачи (3.51) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t) = \boldsymbol{\theta} \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_v(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.55)$$

*Доказательство* этой теоремы выполним в три этапа.

*Этап 1.* Выполним в (3.51) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t_0) = \boldsymbol{\theta}. \end{cases}$$

Сравнивая этот результат с (1.24), можно сделать вывод о том, что функция  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t) = \boldsymbol{\theta} \Phi_2(\mathbf{w}, t), \quad (3.56)$$

где  $\Phi_2(\mathbf{w}, t)$  – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_2(\mathbf{w}, t_0) = 1. \quad (3.57)$$

*Этап 2.* Учитывая (3.56) и (3.52), функцию  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  можно представить в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ \boldsymbol{\theta} + \mathbf{g} \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (3.58)$$

где  $\mathbf{g}$  – некоторая вектор-строка.

Подставим (3.58) и разложения  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$  в уравнение задачи (3.51), получим равенство

$$\boldsymbol{\theta} \lambda \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) = \boldsymbol{\theta} \mathbf{D} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \mathbf{g} \mathbf{D} \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Выполнив здесь предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом (1.24) получаем матричное уравнение (3.54) относительно неизвестного вектора  $\mathbf{g}$ .

*Этап 3.* Умножим обе части дифференциального уравнения задачи (3.51)

справа на вектор  $\mathbf{e}$ . Используя разложения  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} + \mathbf{O}(\varepsilon^3)$ ,

учитывая свойства (1.24), (3.48) и обозначения (1.29), (3.53), выполним в этом уравнении предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В результате получим следующее

линейное дифференциальное однородное по  $t$  уравнение относительно функции  $\Phi_2(\mathbf{w}, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} S_k(t) S_v(t) \right].$$

С учетом начального условия (3.57) получаем следующее решение этого уравнения:

$$\Phi_2(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_v(\tau) d\tau \right\},$$

Подставляя полученное решение в (3.56), получаем окончательное выражение для функции  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t)$  в виде (3.55). *Теорема доказана.*

Выполним в (3.55) замены, обратные к (3.50). Учитывая (3.48), получаем следующее выражение для характеристической функции  $H(\mathbf{u}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{u}, t)$  многомерного распределения числа событий в просеянных потоках, наступивших до момента времени  $t$ :

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_v(\tau) d\tau \right\}.$$

Возвращаясь к исследуемому процессу  $\mathbf{i}(t)$ , который представляет число заявок на фазах рассматриваемой многофазной системы массового обслуживания, применяя основную формулу многомерного динамического просеивания (3.23), подставляем  $t = T$  и переходим к характеристической функции  $h(\mathbf{u}, T)$  числа заявок на фазах системы в момент времени  $T$ . Выбирая для стационарного режима  $t_0 = -\infty$  и принимая во внимание (3.24), получаем, что так же, как и в предыдущем разделе, вид функции  $h(\mathbf{u}, T)$  не зависит от  $T$  и имеет вид выражения (3.20) за исключением того, что величины  $\lambda$  и  $\kappa$  вычисляются по формулам из Таблицы 1.1 для МАР-потока. То есть асимптотическое, в

условиях высокой интенсивности входящего МАР-потока,  $K$ -мерное стационарное распределение вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой СМО является многомерным гауссовским с вектором средних значений  $N\lambda\mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ , где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (3.21).

### 3.6 Исследование многофазной системы $SM/(GI/\infty)^K$

Пусть теперь входящий в многофазную СМО поток является высокоинтенсивным полумарковским, который задан полумарковской матрицей  $\mathbf{A}(x)$  порядка  $M$  с элементами  $A_{lm}$  следующего вида (см. п. 1.3):

$$A_{lm}(x) = \mathbf{P} \left\{ \xi_{n+1} = m, \tau_{n+1} < \frac{x}{N} \mid \xi_n = l \right\}. \quad (3.59)$$

Напомним, что здесь  $\{\xi_n, \tau_n\}$  – стационарный двумерный марковский процесс с дискретным временем [65],  $N$  – большой по величине скалярный параметр, определяющий высокую интенсивность потока. Величины  $\tau_n$  определяют длину интервалов между моментами  $t_{n-1}$  и  $t_n$  наступления последовательных событий в потоке. Также нам понадобится полумарковский процесс  $l(t)$ , определяемый следующим образом:

$$l(t) = \xi_{n+1}, \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad (3.60)$$

и  $z(t)$  – длина интервала времени от момента  $t$  до момента наступления следующего события в полумарковском потоке (остаточное время). Процесс  $\{l(t), z(t)\}$  является марковским. Его совместное стационарное распределение вероятностей  $\mathbf{R}(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.51) и может быть вычислено с помощью выражения (1.54). Интенсивность полумарковского потока, заданного элементами (3.59), составляет  $N\lambda$ , где Величина  $\lambda$  определяется выражением

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{rAe}}.$$

Здесь вектор-строка  $\mathbf{r}$  есть стационарное распределение состояний вложенной

цепи Маркова  $\xi_n$ ,  $\mathbf{A} = \int_0^{\infty} [\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)] dx$ . Вектор  $\mathbf{r}$  является решением уравнения

Колмогорова  $\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{A}(z)$  есть неразложимая стохастическая матрица, определяющая вероятности переходов вложенной цепи Маркова  $\xi_n$ .

Для случайного процесса  $\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), \dots, i_K(t)\}$  числа заявок, находящихся на обслуживании на фазах описанной системы в момент времени  $t$ , ставится задача нахождения многомерного стационарного распределения вероятностей в стационарном режиме функционирования системы.

Применяя метод многомерного динамического просеивания, для марковского процесса  $\{\mathbf{n}(t), l(t), z(t)\}$ , где  $\mathbf{n}(t)$  – считающий процесс многомерного просеянного потока, можем записать следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для его распределения вероятностей  $P(\mathbf{n}, l, z, t) = \mathbf{P}\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, l(t) = l, z(t) < z/N\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, l, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(\mathbf{n}, l, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(\mathbf{n}, l, 0, t)}{\partial z} + \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, m, 0, t)}{\partial z} A_{ml}(z) S_k(t) + \sum_{m=1}^M \frac{\partial P(\mathbf{n}, m, 0, t)}{\partial z} A_{ml}(z) S_0(t), \end{aligned}$$

для всех неотрицательных значений  $\mathbf{n}$ ,  $l = \overline{1, M}$  и  $z > 0$ .

Для многомерных частичных характеристических функций

$$H(\mathbf{u}, l, z, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} P(\mathbf{n}, l, z, t), \quad l = \overline{1, M},$$

в векторном виде эта система запишется следующим образом:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\} \quad (3.61)$$

при начальном условии

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t_0) = \mathbf{R}(z). \quad (3.62)$$

Здесь  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = \{H(\mathbf{u}, 1, z, t), \dots, H(\mathbf{u}, M, z, t)\}$ .

Задачу (3.61)–(3.62) будем решать асимптотически в условиях высокой

интенсивности входящего потока при  $N \rightarrow \infty$ .

**Асимптотический анализ первого порядка.** В (3.61)–(3.62) выполним следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon),$$

получим задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) = \mathbf{R}(z). \end{array} \right. \quad (3.63)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.8.** *Асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t)$  задачи (3.63) имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}. \quad (3.64)$$

*Доказательство* теоремы произведем в два этапа.

*Этап 1.* Выполним в уравнении задачи (3.63) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_1(\mathbf{w}, t), \quad (3.65)$$

где  $\Phi_1(\mathbf{w}, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Выполним в (3.63) предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ \mathbf{P} + \mathbf{P} \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) - \mathbf{I} \right].$$

Умножим обе части этого равенства справа на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ ,

воспользуемся разложением  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ , поделим обе части на  $\varepsilon$  и произведем предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Подставляя выражение (3.65) и учитывая, что  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ , получаем

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} \mathbf{R} \mathbf{e} = \mathbf{R}'(0) \mathbf{e} \Phi_1(\mathbf{w}, t) \sum_{k=1}^K j w_k S_k(t).$$

Отсюда с учетом (1.53) получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_1(\mathbf{w}, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \lambda \Phi_1(\mathbf{w}, t) \sum_{k=1}^K j w_k S_k(t),$$

решая которое при начальном условии  $\Phi_1(\mathbf{w}, t_0) = 1$ , получаем

$$\Phi_1(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}.$$

Подставив это выражение в (3.65), получим (3.64). *Теорема доказана.*

**Асимптотический анализ второго порядка.** Введем функцию  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)$ , определяемую выражением

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t) \exp \left\{ N \lambda \sum_{k=1}^K j u_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}. \quad (3.66)$$

Подставим это выражение в (3.61)–(3.62), получим

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t) \lambda \sum_{k=1}^K j u_k S_k(t) &= \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{j u_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t_0) &= \mathbf{R}(z). \end{aligned} \right.$$

Выполнив здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon), \quad (3.67)$$

получим задачу

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \lambda \sum_{k=1}^K j \varepsilon w_k S_k(t) &= \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{j \varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) &= \mathbf{R}(z). \end{aligned} \right. \quad (3.68)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  этой задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.9.** Пусть  $\mathbf{R}(z)$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.54) и (1.56) соответственно,

$$\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e},$$

где вектор-строка  $\mathbf{f}'_0$  удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{f}'_0 [\mathbf{I} - \mathbf{P}] &= \lambda [\mathbf{rP} - \mathbf{R}], \\ \mathbf{f}'_0 \mathbf{A} \mathbf{e} &= \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \end{aligned} \right. \quad (3.69)$$

$a_2 = \mathbf{rA}_2 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \int_0^{\infty} x^2 d\mathbf{A}(x)$ , причем все элементы матрицы  $\mathbf{A}_2$  конечны. Тогда

асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t)$  задачи (3.68) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}. \quad (3.70)$$

*Доказательство* данной теоремы проведем в три этапа.

*Этап 1.* Выполним в (3.68) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}],$$

которое имеет вид, аналогичный (1.51). Следовательно, функцию  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z) \Phi_2(\mathbf{w}, t), \quad (3.71)$$

где  $\Phi_2(\mathbf{w}, t)$  – некоторая скалярная функция.

*Этап 2.* Принимая во внимание выражение (3.71), функцию  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  представим в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{w}, t) [\mathbf{R}(z) + j\varepsilon \mathbf{w} \mathbf{f}(z)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (3.72)$$

где  $\mathbf{f}(z)$  – некоторая вектор-функция (строка). Подставим это выражение в (3.68). Применяя разложения  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + O(\varepsilon^2)$ , после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \lambda \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{R}(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) &= \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{R}'(z) + \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{f}'(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \\ + \left[ \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{R}'(0) + \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{f}'(0) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] &\left[ \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + \mathbf{A}(z) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] + \mathbf{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Отсюда, сокращая и приводя подобные, с учетом (1.52)–(1.53) получаем равенство

$$\lambda \mathbf{R}(z) = \mathbf{f}'(z) + \lambda \mathbf{r} \mathbf{A}(z) + \mathbf{f}'(0) [\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{O}(\varepsilon),$$

идентичное (1.70). Далее, повторяя рассуждения этапа 2 доказательства Теоремы 1.6, получаем систему уравнений (3.69).

*Этап 3.* Подставим в (3.68) выражение (3.72) и разложения  $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ , затем выполним предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} \mathbf{R} + \lambda \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{R} \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \lambda \Phi_2(\mathbf{w}, t) \mathbf{f}(\infty) &\left[ \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right]^2 = \\ = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ \mathbf{R}'(0) + \mathbf{f}'(0) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right] \times \\ \times \left[ \mathbf{P} - \mathbf{I} + \mathbf{P} \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \mathbf{P} \sum_{k=1}^K \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} S_k(t) \right] + \mathbf{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Умножая обе части этого уравнения на  $\mathbf{e}$  справа и принимая во внимание, что  $\mathbf{R}\mathbf{e} = 1$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{e} = \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{R}'(0)\mathbf{e} = \lambda$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} + \lambda \Phi_2(\mathbf{w}, t) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) = \\ & = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left[ \lambda \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} S_k(t) + \mathbf{f}'(0)\mathbf{e} \left\{ \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) \right\}^2 \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Приводя подобные, сокращая на  $\varepsilon^2$ , используя обозначение (1.65) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем следующее дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\Phi_2(w, t)$ :

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w}, t)}{\partial t} = \Phi_2(\mathbf{w}, t) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} S_k(t) S_v(t) \right\},$$

где  $\kappa = 2\mathbf{f}'_0\mathbf{e}$ . Решая это уравнение при начальном условии  $\Phi_2(\mathbf{w}, t_0) = 1$ , получаем

$$\Phi_2(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}.$$

Подставляя это выражение в (3.71), получаем (3.70). Теорема доказана.

Выполняя в (3.70) замены, обратные к (3.67), и подставляя полученное выражение в (3.66), получаем следующее выражение для частичной характеристической функции  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp & \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \right. \\ & \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь  $z \rightarrow \infty$  и выполняя на основе (3.23) переход к характеристической функции  $h(\mathbf{u})$  стационарного распределения вероятностей значений исследуемого многомерного процесса  $\mathbf{i}(t)$  числа заявок на фазах системы, полагая  $t = T$  и  $t_0 \rightarrow -\infty$ , получаем что так же, как и в предыдущих разделах, вид функции  $h(\mathbf{u})$  не зависит от  $T$  и имеет вид выражения (3.20) за исключением того, что величины  $\lambda$  и  $\kappa$  вычисляются по формулам из Таблицы 1.1 для по-

лумарковского потока.

Таким образом, асимптотическое, в условиях высокой интенсивности входящего потока,  $K$ -мерное стационарное распределение вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой СМО является многомерным гауссовским с вектором средних значений  $M\lambda\mathbf{Ue}$  и матрицей ковариаций  $M[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ , где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (3.21).

### 3.7 Применение метода начальных моментов для исследования многофазной системы массового обслуживания $GI/(M/\infty)^K$

Одним из способов определения области применимости асимптотических результатов является сравнение полученных с их точными (допредельными) значениями хотя бы для некоторых случаев, в которых эти характеристики могут быть получены без применения аппарата асимптотического анализа. В частности, такими характеристиками могут быть моменты исследуемого процесса, которые можно аналитически получить для многофазной системы с экспоненциальным обслуживанием. Так как в качестве результата асимптотического анализа в условиях высокой интенсивности входящего рекуррентного потока, выполненного в предыдущих разделах, мы получили многомерную гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования, то наиболее интересным является определение допредельных моментов первого и второго порядков – вектора средних и матрицы ковариаций указанного распределения.

Итак, пусть длительности обслуживания на фазах в  $K$ -фазную СМО с входящим рекуррентным потоком и неограниченным числом приборов являются экспоненциальными случайными величинами с параметрами  $\mu_k$ , где  $k$  – номер фазы СМО ( $k = \overline{1, K}$ ). Ставится задача определения начальных моментов первого и второго порядков для многомерного случайного процесса  $\mathbf{i}(t) = [i_1(t) \ \dots \ i_K(t)]^T$  числа заявок, находящихся на фазах системы в стац-

онарном режиме функционирования.

Пусть  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки входящего потока. Для распределения вероятностей  $P(\mathbf{i}, z, t) = P\{\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}, z(t) < z\}$  многомерного марковского случайного процесса  $\{\mathbf{i}(t), z(t)\}$  можно записать следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{i}, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(\mathbf{i}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(\mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i}, z, t) \cdot i_k \mu_k + \frac{\partial P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_1, 0, t)}{\partial z} A(z) + \\ & + \sum_{k=1}^{K-1} P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1}, z, t) \cdot (i_k + 1) \mu_k + P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_K, z, t) \cdot (i_K + 1) \mu_K \end{aligned} \quad (3.73)$$

для всех неотрицательных значений  $\mathbf{i}$  и  $z$  (полагаем, что  $P(\mathbf{i}, z, t) = 0$ , если хотя бы одна компонента вектора  $\mathbf{i}$  отрицательна).

Введем частичную характеристическую функцию

$$H(\mathbf{u}, z, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + \dots + ju_K i_K} P(\mathbf{i}, z, t) \quad \text{векторного аргумента } \mathbf{u}. \quad \text{Для нее (3.73)}$$

перепишется в виде уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} [e^{ju_1} A(z) - 1] + \\ & + j \sum_{k=1}^{K-1} \mu_k \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} [1 - e^{ju_{k+1} - ju_k}] + j \mu_K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_K} [1 - e^{-ju_K}]. \end{aligned}$$

В стационарном режиме функционирования системы для функции  $H(\mathbf{u}, z) \equiv H(\mathbf{u}, z, t)$  это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} [e^{ju_1} A(z) - 1] + j \sum_{k=1}^{K-1} \mu_k \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} [1 - e^{ju_{k+1} - ju_k}] + \\ + j \mu_K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_K} [1 - e^{-ju_K}] = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

**Моменты первого порядка.** Для нахождения начальных моментов воспользуемся методикой, изложенной в [111]. Введем функции  $\varphi_k(z)$ , определяемые выражениями

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = j \cdot \varphi_k(z) \quad (3.75)$$

для  $k = \overline{1, K}$ . Известно [111], что начальные моменты первого порядка  $m_k^{(1)}$  определяются выражениями  $m_k^{(1)} = \varphi_k(\infty)$ . Для их нахождения продифференцируем уравнение (3.74) по каждой из переменных  $u_k$ , получим следующую систему из  $K$  дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial z \partial u_1} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z \partial u_1} [e^{ju_1} A(z) - 1] + j \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} e^{ju_1} A(z) + \\ & + j \sum_{k=1}^{K-1} \mu_k \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k \partial u_1} [1 - e^{ju_{k+1} - ju_k}] + j^2 \mu_1 \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_1} e^{ju_2 - ju_1} + \\ & + j \mu_K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_K \partial u_1} [1 - e^{-ju_K}] = 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial z \partial u_l} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z \partial u_l} [e^{ju_l} A(z) - 1] + j \sum_{k=1}^{K-1} \mu_k \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k \partial u_l} [1 - e^{ju_{k+1} - ju_k}] + \\ & + j^2 \mu_l \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_l} e^{ju_{l+1} - ju_l} - j^2 \mu_{l-1} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_{l-1}} e^{ju_l - ju_{l-1}} + \\ & + j \mu_K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_K \partial u_l} [1 - e^{-ju_K}] = 0, \quad 2 \leq l \leq K-1, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial z \partial u_K} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z \partial u_K} [e^{ju_K} A(z) - 1] + j \sum_{k=1}^{K-1} \mu_k \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k \partial u_K} [1 - e^{ju_{k+1} - ju_k}] - \\ & - j^2 \mu_{K-1} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_{K-1}} e^{ju_K - ju_{K-1}} + j \mu_K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_K^2} [1 - e^{-ju_K}] + j^2 \mu_K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_K} e^{-ju_K} = 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Подставляя сюда  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и учитывая, что [84]  $\left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} \right|_{\substack{\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ z=0}} = \lambda$ , с использо-

ванием выражений (3.75) получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно функций  $\varphi_k(z)$ :

$$\begin{cases} \varphi'_1(z) + \varphi'_1(0)[A(z) - 1] + \lambda A(z) - \mu_1 \varphi_1(z) = 0, \\ \varphi'_k(z) + \varphi'_k(0)[A(z) - 1] + \mu_{k-1} \varphi_{k-1}(z) - \mu_k \varphi_k(z) = 0, \quad k = \overline{2, K}. \end{cases}$$

Для этой системы применим преобразования Лапласа – Стилтеса

$$A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dA(z), \quad \varphi_k^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\varphi_k(z), \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.79)$$

получим

$$\begin{cases} (\alpha - \mu_1)\varphi_1^*(\alpha) + \varphi_1'(0)[A^*(\alpha) - 1] + \lambda A^*(\alpha) = 0, \\ (\alpha - \mu_k)\varphi_k^*(\alpha) + \varphi_k'(0)[A^*(\alpha) - 1] + \mu_{k-1}\varphi_{k-1}^*(\alpha) = 0, \quad k = \overline{2, K}. \end{cases} \quad (3.80)$$

Подставляя сюда  $\alpha = 0$  и учитывая, что  $A^*(0) = 1$ ,  $\varphi_k^*(0) = \varphi_k(\infty) = m_k^{(1)}$ , получаем выражения для первых начальных моментов состояния рассматриваемой системы массового обслуживания:

$$m_k^{(1)} = \frac{\lambda}{\mu_k}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (3.81)$$

**Моменты второго порядка.** Введем функции  $\psi_{kl}(z)$ , определяемые выражениями

$$\left. \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k \partial u_l} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = j^2 \cdot \psi_{kl}(z) \quad (3.82)$$

для  $k, l = \overline{1, K}$ . Известно [111], что начальные моменты второго порядка  $m_{kl}^{(2)}$  определяются равенствами  $m_{kl}^{(2)} = \psi_{kl}(\infty)$ . Для их нахождения выполним процедуру, аналогичную описанной выше, а именно – продифференцируем каждое уравнение системы (3.76)–(3.78) по каждой из переменных  $u_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . В результате получим систему из  $K^2$  дифференциальных уравнений, которую здесь опустим для краткости изложения. В ней также выполним подстановку  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и воспользуемся обозначениями (3.82). Далее применим преобразования (3.79), а также преобразование Лапласа – Стилтеса

$$\psi_{kl}^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\psi_{kl}(z), \quad k, l = \overline{1, K}.$$

Подставляя  $\alpha = 0$  и учитывая, что  $\psi_{kl}^*(0) = \psi_{kl}(\infty) = m_{kl}^{(2)}$ , получаем следующие рекуррентные выражения для начальных моментов второго порядка:

$$m_{11}^{(2)} = \frac{m_1^{(1)}}{1 - A^*(\mu_1)},$$

$$m_{12}^{(2)} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \frac{\mu_1 \varphi_1^*(\mu_2)}{1 - A^*(\mu_2)} + \frac{\lambda A^*(\mu_1)}{1 - A^*(\mu_1)} \right],$$

$$m_{l_l}^{(2)} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_l} \left[ \frac{\mu_{l-1} \varphi_{l-1}^*(\mu_l)}{1 - A^*(\mu_l)} + \mu_{l-1} m_{1,l-1}^{(2)} \right] \text{ для } l = \overline{3, K}, \quad (3.83)$$

$$m_{kl}^{(2)} = \frac{1}{\mu_k + \mu_l} \left[ \mu_{k-1} m_{k-1,l}^{(2)} + \mu_{l-1} m_{k,l-1}^{(2)} - \lambda (\delta_{k,l-1} + \delta_{k,l+1}) \right] \text{ для } k, l = \overline{2, K} \text{ и } k \neq l,$$

$$m_{kk}^{(2)} = \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} m_{k-1,k}^{(2)} + m_k^{(1)} \text{ для } k = \overline{2, K},$$

$$m_{kl}^{(2)} = m_{lk}^{(2)} \text{ для любых } k \text{ и } l.$$

Здесь  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера, а функции  $\varphi_k^*(\alpha)$  достаточно просто выражаются в явном виде из (3.80). Численная реализация формул (3.83) не представляет труда, результаты расчетов по этим формулам приведены в п. 5.4.1.

Нетрудно показать, что для простейшего входящего потока полученные выражения дают известные в теории массового обслуживания результаты [16, 35]. В частности, многомерное распределение состояния системы факторизуется, то есть значения числа заявок в системе на разных фазах являются независимыми, а само число заявок на каждой фазе описывается распределением Пуассона. Действительно, в случае простейшего входящего потока  $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  и соответственно  $A^*(\alpha) = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}$ . Тогда из (3.80) получаем

$\varphi_1^*(\alpha) = \frac{\lambda^2}{\mu_1(\lambda + \alpha)}$ . Подставляя эти выражения в (3.83), получаем:

$$m_{11}^{(2)} = \frac{\lambda^2}{\mu_1^2} + \frac{\lambda}{\mu_1} = (m_1^{(1)})^2 + m_1^{(1)},$$

$$m_{12}^{(2)} = \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda}{\mu_2} = m_1^{(1)} \cdot m_2^{(1)},$$

и так далее.

Заметим, что значения первых моментов числа заявок на фазах системы в стационарном режиме в допредельном (3.81) и асимптотическом (3.22) ре-

зультатах в точности совпадают. Сравнение значений вторых моментов представлено в Главе 5.

### 3.8 Резюме

В настоящей главе был представлен анализ многофазных СМО с неограниченным числом приборов на фазах. Исследование выполнено методом выделения первого скачка для системы с рекуррентным входящим потоком, методом начальных моментов для системы с рекуррентным входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием, а также представленным в п. 3.3 методом многомерного динамического просеивания – для систем с рекуррентным, МАР, полумарковским входящими потоками и произвольным обслуживанием.

Показано, что в условиях высокой интенсивности входящего потока многомерное распределение числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования является асимптотически гауссовским с вектором математических ожиданий  $N\lambda\mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ . Здесь матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (3.21) для всех типов рассмотренных многофазных СМО, а коэффициенты  $\lambda$  и  $\kappa$  определяются видом входящего потока и приведены в Таблице 1.1. Примечательно, что не зависимо от вида входящего потока и распределений времени обслуживания на фазах СМО, среднее число заявок на каждой фазе системы составляет  $N\lambda b_k$ , где  $N\lambda$  – интенсивность входящего потока,  $b_k$  – среднее время обслуживания, что совпадает с неасимптотическим результатом (см. пп. 3.1 и 3.7), а также с известными фактами теории массового обслуживания (теорема Литтла) для однофазных СМО.

Результаты настоящей главы опубликованы в работах автора [42, 78, 81, 82, 84, 90, 215, 216].

## Глава 4 Исследование немарковских сетей массового обслуживания с высокоинтенсивными входящими потоками

### 4.1 Модель сети массового обслуживания

Сети массового обслуживания являются популярными моделями для представления и анализа современных телекоммуникационных сетей и систем распределенной обработки данных. В научной литературе обычно представлен анализ марковских моделей сетей – моделей с экспоненциальным обслуживанием и чаще всего пуассоновским входящим потоком [56, 74, 75, 139, 186, 189, 250]. В настоящей главе представлен анализ СеМО с неограниченным числом приборов, произвольным обслуживанием в узлах и различными типами входящих потоков, в том числе – относящихся к классу так называемых коррелированных потоков (МАР, полумарковский).

Модель СеМО обычно представляют в виде комплекса связанных между собой отдельных СМО, между которыми осуществляется передача заявок. Эти отдельные СМО, составляющие сеть, называют узлами сети. Возможность передачи заявок от одного узла к другому определяется дисциплиной маршрутизации. В литературе обычно выделяют два типа дисциплин маршрутизации [56]: детерминированная и марковская. В случае детерминированной маршрутизации заявки переходят из одного узла СеМО в другой с вероятностью 1. Для марковской маршрутизации определяется так называемая *матрица маршрутизации*  $\mathbf{M}$ , элементы которой  $M_{kv}$  представляют собой вероятности перехода заявки, закончившей обслуживание в узле  $k$ , в узел  $v$ ,  $k, v = \overline{1, K}$ , где  $K$  – количество узлов сети. Очевидно, что детерминированная дисциплина маршрутизации является частным случаем марковской (в этом случае элементы матрицы маршрутизации будут равняться либо 0 либо 1). Также можно заметить, что многофазные СМО, рассмотренные в предыдущей главе, являются частным случаем СеМО – многофазная СМО легко представляется в виде СеМО с матрицей маршрутизации, в которой все над-

диагональные элементы равны 1, а остальные – нулю. Также имеется ряд работ, посвященные анализу сетей с нестандартной маршрутизацией, например, динамической [45] или изменяющейся в случайной среде [254].

Еще одна классификация СеМО, широко распространенная в литературе по сетям обслуживания – это открытые (разомкнутые) и закрытые (замкнутые) сети. В моделях первого типа имеется некоторый внешний по отношению к сети источник заявок (входящий поток), в замкнутых сетях [55, 185] заявки постоянно циркулируют внутри сети между узлами.

В настоящей работе рассматриваются открытые модели СеМО с марковской маршрутизацией и неограниченным числом приборов в узлах (Рисунок 4.1). Заявка входящего потока с вероятностью  $v_k$  поступает на  $k$ -й узел сети ( $\sum_{k=1}^K v_k = 1$ ), в котором находится в течение случайного времени, имеющего функцию распределения  $B_k(x)$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Здесь  $K$  – количество узлов сети. Затем эта заявка переходит на узел  $v$  ( $v = \overline{1, K}$ ) в соответствии с вероятностями  $m_{kv}$ , определяемыми элементами матрицы маршрутизации, либо с вероятностью  $M_{k0} = 1 - \sum_{v=1}^K m_{kv}$  покидает сеть. Вектор-строку  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_K]$  будем называть вектором разделения входящего потока, а вектор  $\mathbf{M}_0 = [M_{10}, \dots, M_{K0}]$  – вектором выхода из сети. В настоящей работе предполагается, что случайные величины, заданные функциями распределения  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$ , ...,  $B_K(x)$ , имеют конечные математические ожидания.

Пусть  $i_k(t)$  – количество заявок, которые находятся на обслуживании в  $k$ -ом узле сети ( $k = \overline{1, K}$ ) в момент времени  $t$ . Обозначим  $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), \dots, i_K(t)]^T$ . Ставится задача поиска многомерного стационарного распределения вероятностей  $K$ -мерного случайного процесса  $\mathbf{i}(t)$ .

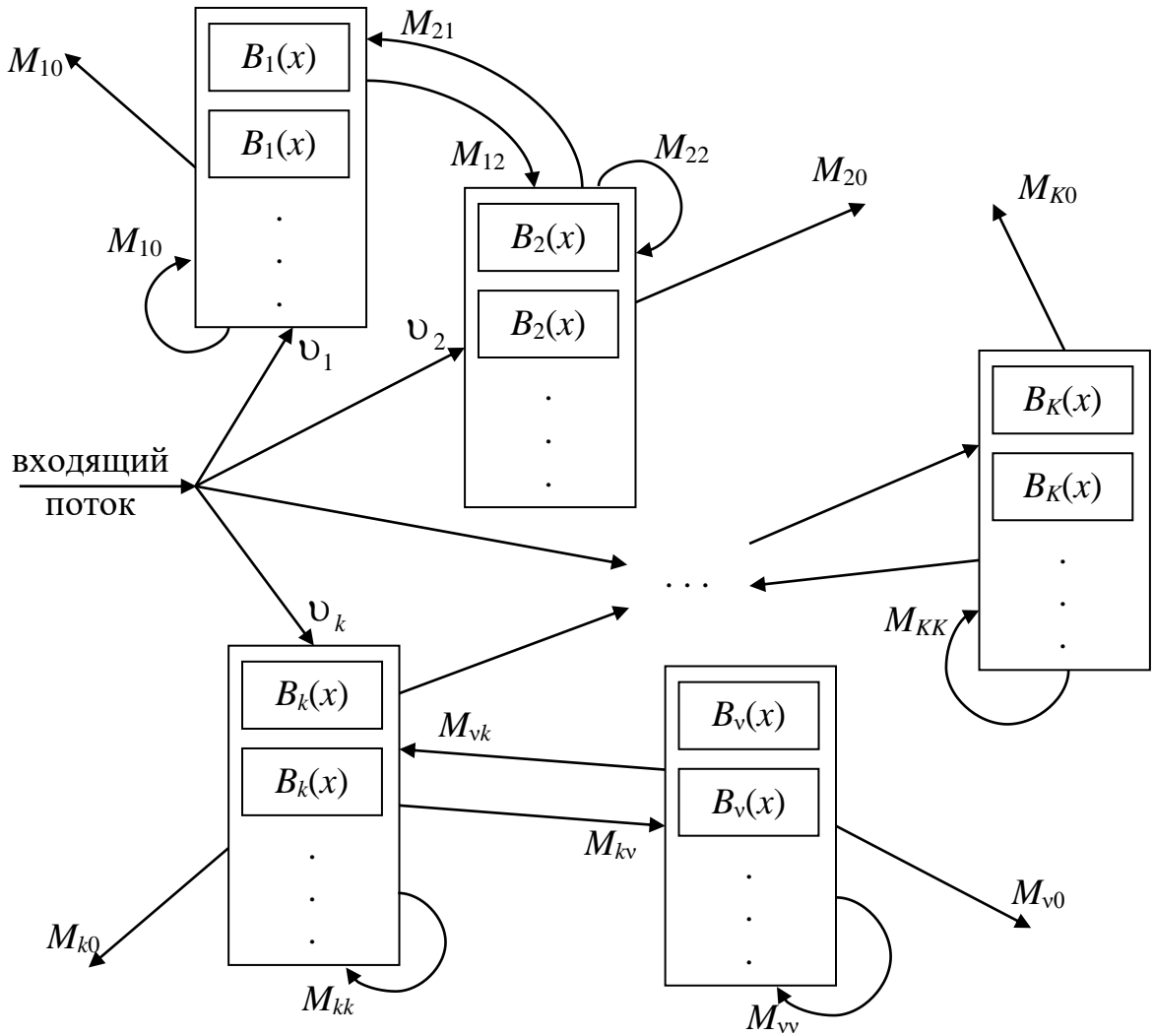


Рисунок 4.1 – Схема сети массового обслуживания

#### 4.2 Анализ СеМО с рекуррентным входящим потоком на основе уравнений первого скачка

В данном разделе представлен анализ сети массового обслуживания с входящим высокоинтенсивным рекуррентным потоком, выполненный на основе модификации метода выделения первого скачка, представленной в п. 3.2 для исследования многофазных СМО.

Итак, пусть  $A(x)$  – функция распределения длин интервалов между моментами поступления последовательных заявок в рекуррентном входящем потоке. Все остальные обозначения даны в предыдущем разделе.

Пусть в момент времени  $t_0 = 0$  в свободную (пустую) сеть поступает за-

заявка. Эту заявку аналогично п. 3.2 мы будем выделять особо и назовем ее *первой заявкой*. Обозначим через  $W_k(t)$  вероятность того, что эта заявка в момент времени  $t > 0$  будет находиться на обслуживании в  $k$ -ом узле сети. Тогда величина

$$W_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^K W_k(t)$$

есть вероятность того, что первая заявка покинула сеть до момента времени  $t$ . Вычислим эти вероятности для сети обслуживания.

**Вычисление вероятностей  $W_k(t)$ .** Каждая заявка, поступившая в сеть, переходит от одного узла к другому, пока не покинет систему. Очевидно, что ее переходы между узлами образуют траекторию некоторого полумарковского случайного процесса  $k(t)$ , принимающего значения от 1 до  $K$  соответственно номерам этих узлов, а состояние 0 для этого процесса будет поглощающим (заявка покинула сеть).

Так как нас интересуют вероятности  $W_k(t)$ , которые мы определили для первой заявки, то будем рассматривать процесс  $k(t)$ , построенный именно для нее. Этот процесс начинает свое функционирование в момент времени  $t_0 = 0$ . Очевидно, что начальные условия определяются равенствами

$$W_k(0) = \nu_k, \quad k = \overline{1, K},$$

$$W_0(0) = 0.$$

Введем обозначения для условных вероятностей

$$G_{\nu k}(t) = P\{k(t) = k | k(0) = \nu\}, \quad \nu, k = \overline{1, K}.$$

Применяя всё тот же прием выделения первого скачка [65] и обозначая через  $\xi_\nu$  момент времени, когда процесс  $k(t)$  впервые изменит свое состояние, для случая  $\nu = k$  можно записать

$$\begin{aligned}
G_{vv}(t) &= P\{k(t) = v, \xi_v > t | k(0) = v\} + P\{k(t) = v, \xi_v \leq t | k(0) = v\} = \\
&= P\{\xi_v > t\} + \sum_{l=1}^K \int_0^t P\{k(x) = l, \xi_v \in [x, x + dx] | k(0) = v\} \cdot P\{k(t) = v | k(x) = l\} = \quad (4.1) \\
&= 1 - B_v(t) + \sum_{l=1}^K M_{vl} \int_0^t G_{lv}(t-x) dB_v(x).
\end{aligned}$$

Для  $v \neq k$  имеем

$$G_{vk}(t) = P\{k(t) = k, \xi_v \leq t | k(0) = v\} = \sum_{l=1}^K M_{vl} \int_0^t G_{lk}(t-x) dB_v(x). \quad (4.2)$$

Запишем уравнения (4.1)–(4.2) в матричном виде

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{I} - \mathbf{B}(t) + \mathbf{M} \int_0^t \mathbf{G}(t-x) d\mathbf{B}(x), \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{G}(t)$  – матрица, составленная из элементов  $G_{kv}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  – диагональная матрица с элементами  $B_v(t)$  на главной диагонали,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица соответствующего размера.

Эту систему интегральных уравнений в свертках будем решать методом преобразований Фурье и Фурье – Стильтьеса в форме

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^*(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} \mathbf{G}(t) dt, \\
\mathbf{B}^*(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} d\mathbf{B}(t).
\end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (4.3), получаем

$$\mathbf{G}^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} [\mathbf{I} - \mathbf{B}(t)] dt + \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} \mathbf{M} \int_0^t \mathbf{G}(t-x) d\mathbf{B}(x) dt = \frac{1}{j\alpha} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] + \mathbf{B}^*(\alpha) \mathbf{M} \mathbf{G}^*(\alpha)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{G}^*(\alpha) = [\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha) \mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha}. \quad (4.4)$$

В силу формулы полной вероятности для вектора-строки  $\mathbf{W}(t) = [W_1(t), \dots, W_K(t)]$  имеет место равенство

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{v}\mathbf{G}(t).$$

Применяя к этому равенству преобразование Фурье, получаем

$$\mathbf{W}^*(\alpha) = \mathbf{v}\mathbf{G}^*(\alpha),$$

где  $\mathbf{W}^*(\alpha)$  – преобразование Фурье для вектора  $\mathbf{W}(t)$ .

Подставляя сюда (4.4), получим

$$\mathbf{W}^*(\alpha) = \mathbf{v}[\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}]\frac{1}{j\alpha}. \quad (4.5)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, находим окончательное выражение для вероятностей  $\mathbf{W}(t)$ :

$$\mathbf{W}(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha t} [\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha} d\alpha. \quad (4.6)$$

**Уравнения первого скачка.** Обозначим распределение вероятностей числа заявок в узлах рассматриваемой сети следующим образом:

$$P(i_1, \dots, i_K, t) = P(\mathbf{i}, t) = P\{\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}\}.$$

Тогда используя указанную методику [16, 65], можно записать следующие уравнения относительно вероятностей  $P(\mathbf{i}, t)$ :

$$P(\mathbf{0}, t) = W_0(t) \int_0^t P(\mathbf{0}, t-x) dA(x) + W_0(t) [1 - A(t)], \quad (4.7)$$

$$P(\mathbf{e}_k, t) = W_0(t) \int_0^t P(\mathbf{e}_k, t-x) dA(x) + W_k(t) [1 - A(t)] + W_k(t) \int_0^t P(\mathbf{0}, t-x) dA(x), \quad (4.8)$$

для  $k = \overline{1, K}$ . И, наконец, для любого вектора  $\mathbf{i}$ , который не является нулевым и не совпадает ни с одним  $\mathbf{e}_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ), имеем

$$P(\mathbf{i}, t) = W_0(t) \int_0^t P(\mathbf{i}, t-x) dA(x) + \sum_{k=1}^K W_k(t) \int_0^t P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, t-x) dA(x). \quad (4.9)$$

Получили, что система (4.7)–(4.9) совпадает с системой уравнений первого скачка (3.4)–(3.6) для многофазных СМО. Разницу составляют лишь выражения для вычисления вероятностей  $W_k(t)$ . Таким образом, характеристическая функция  $H(\mathbf{u}, t)$  для  $K$ -мерного случайного процесса  $\mathbf{i}(t)$  числа заявок в

узлах сети

$$H(\mathbf{u}, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + \dots + ju_K i_K} P(i_1, \dots, i_K, t) = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{i}} P(\mathbf{i}, t)$$

формально удовлетворяет утверждению Теоремы 3.1, сформулированной для характеристической функции числа заявок на фазах многофазной СМО.

**Асимптотический анализ сети в условии высокой интенсивности входящего потока.** Соответственно для высокоинтенсивного входящего потока эта функция удовлетворяет уравнению, аналогичному (3.9):

$$H(\mathbf{u}, t) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{ju_k} \right] \left[ 1 - A(Nt) + \int_0^t H(\mathbf{u}, t-x) dA(Nx) \right],$$

и относительно асимптотического решения этого уравнения имеют место следующие теоремы, имеющие формулировки и доказательства, идентичные Теоремам 3.2–3.3.

**Теорема 4.1.** Пусть

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H(\mathbf{u}, t) = F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon).$$

Асимптотическое решение  $F_1(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  уравнения

$$F_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j\varepsilon w_k} \right] \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \int_0^t F_1(\mathbf{w}, t-x, \varepsilon) dA\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right],$$

имеет вид

$$F_1(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ j\lambda \mathbf{w}^T \int_0^t \mathbf{W}(\tau) d\tau \right\}.$$

**Теорема 4.2.** Пусть

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_2(\mathbf{u}, t) = F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon),$$

$$H(\mathbf{u}, t) = H_2(\mathbf{u}, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau \right\},$$

а величины  $\lambda$  и  $\kappa$  определяются выражениями (1.1) и (1.14) соответственно.

Тогда асимптотическое решение  $F_2(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  уравнения

$$F_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k \int_0^t W_k(\tau) d\tau \right\} = \left[ W_0(t) + \sum_{k=1}^K W_k(t) e^{j\varepsilon w_k} \right] \times \\ \times \left[ 1 - A\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) + \int_0^t F_2(\mathbf{w}, t-x, \varepsilon) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k \int_0^{t-x} W_k(\tau) d\tau \right\} dA\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \right]$$

имеет вид

$$F_2(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_0^t W_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_0^t W_k(\tau) W_v(\tau) d\tau \right\}.$$

Отсюда получаем, что при достаточно больших значениях  $N$  для функции  $H(\mathbf{u}, t)$  справедливы выражения, аналогичные (3.19):

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \mathbf{j}\mathbf{u}^T \mathbf{Y}(t) \mathbf{e} + \frac{1}{2} N\mathbf{j}\mathbf{u}^T [\lambda \mathbf{Y}(t) + \kappa \mathbf{V}(t)] \mathbf{j}\mathbf{u} \right\}$$

для нестационарного и (3.20)

$$h(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u}, \infty) \approx h^{(2)}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ N\lambda \mathbf{j}\mathbf{u}^T \mathbf{Y} \mathbf{e} + \frac{1}{2} N\mathbf{j}\mathbf{u}^T [\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}] \mathbf{j}\mathbf{u} \right\} \quad (4.10)$$

для стационарного режима функционирования сети, где элементы матриц  $\mathbf{Y}(t) = \text{diag} \{Y_1(t), \dots, Y_K(t)\}$  и  $\mathbf{V}(t)$  вычисляются соответственно по формулам

$$Y_k(t) = \int_0^t W_k(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad V_{kv}(t) = \int_0^t W_k(\tau) W_v(\tau) d\tau \quad \text{для} \quad k, v = \overline{1, K},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\infty), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\infty). \quad (4.11)$$

Значения  $W_k(t)$  для СеМО вычисляются по формуле (4.6).

Таким образом, распределение числа заявок в узлах сети GI-(GI/∞)<sup>K</sup> в условиях высокой интенсивности входящего потока аппроксимируется многомерным нормальным распределением с вектором средних  $N\lambda \mathbf{Y} \mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}]$ .

Докажем еще одно важное свойство относительно вероятностей  $W_k(t)$ .

**Теорема 4.3.** Пусть  $\mathbf{V}$  – диагональная матрица с диагональными элементами, равными средним значениям  $b_k$  времени обслуживания в узлах сети, тогда вектор  $\mathbf{Y} \mathbf{e}$  удовлетворяет равенству

$$\mathbf{Y}\mathbf{e} = \mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{B}. \quad (4.12)$$

*Доказательство.* Имеем

$$\mathbf{Y}\mathbf{e} = \mathbf{Y}(\infty)\mathbf{e} = \int_0^{\infty} \mathbf{W}(t)dt = \mathbf{W}^*(0). \quad (4.13)$$

Согласно (4.5),

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^*(0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{v}[\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha} = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha} = \mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{B}, \end{aligned}$$

что совпадает с (4.12). *Теорема доказана.*

В произведении (4.12) сомножитель  $\gamma = \mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$  является решением уравнения трафика (закона сохранения интенсивности) [6]

$$\gamma_k = \upsilon_k + \sum_{v=1}^K \gamma_v m_{vk},$$

определяющего нормированную величиной  $N\lambda$  интенсивность потока, входящего в  $k$ -й узел. Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{B}$  определяют среднее время обслуживания в узлах сети. Следовательно, компоненты вектора  $\mathbf{Y}\mathbf{e}$  в выражении (4.12) равны нормированным средним значениям числа заявок в узлах рассматриваемой СеМО, а  $N\lambda\mathbf{Y}\mathbf{e}$  представляет собой вектор среднего числа заявок в узлах сети с интенсивностью входящего потока  $N\lambda$ , что совпадает с результатом, полученным нами выше в формуле (4.10).

### 4.3 Применение метода многомерного динамического просеивания к исследованию СеМО

В настоящем разделе метод многомерного динамического просеивания, изложенный в п. 3.3 будет применен для анализа сетей массового обслуживания.

Сначала, также как в п. 3.3, сформируем многомерный просеянный поток. Для СеМО, имеющей  $K$  узлов, он строится следующим образом. Изобра-

зим  $K + 1$  параллельных осей времени, пронумерованных от нуля до  $K$  (Рисунок 3.2). Оси под номерами от 1 до  $K$  будут соответствовать узлам сети с такими же номерами, а ось под номером 0 будет использоваться для изображения событий входящего потока сети.

Зафиксируем некоторый момент времени  $T$ . Обозначим через  $S_k(t)$  при  $t \leq T$ ,  $k = \overline{1, K}$  вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени  $t$  в сеть обслуживания, в момент  $T$  будет обслуживаться в  $k$ -ом узле. С вероятностью  $S_0(t)$  рассматриваемая заявка покинет сеть, завершив обслуживание до момента времени  $T$ . Очевидно, что для вероятностей  $S_k(t)$  и  $S_0(t)$  при любом  $t \leq T$  выполняется равенство

$$S_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^K S_k(t).$$

Тогда аналогично п. 3.3 получаем, что если в некоторый произвольный момент времени  $t_0 \leq T$  система пуста, то распределение вероятностей числа событий, наступивших в указанном многомерном просеянном потоке до момента времени  $T$ , совпадает с многомерным распределением вероятностей процесса  $\mathbf{i}(t)$  (числа заявок в узлах сети) в момент времени  $t = T$ , то есть имеют место равенства

$$P\{\mathbf{i}(T) = \mathbf{m}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}\} \quad (4.14)$$

для любых неотрицательных значений вектора  $\mathbf{m}$ . Здесь  $\mathbf{n}(t)$  – число событий в многомерном просеянном потоке, наступивших до момента времени  $t$ .

Таким образом, получив вероятностные характеристики (многомерный закон распределения) случайного процесса  $\mathbf{n}(t)$  и подставив значение  $t = T$ , получим соответствующие характеристики интересующего нас процесса  $\mathbf{i}(t)$  при  $t = T$ .

Получим выражения для динамических вероятностей просеивания  $S_k(t)$  для случая анализа СеМО. Итак, нас интересует вероятность попадания заявки, поступившей в момент времени  $t$ , в  $k$ -й узел сети к моменту  $T$ , то есть за время  $T - t$ . Но в подразделе «Вычисление вероятностей  $W_k(t)$ » предыдущего

параграфа мы как раз и вычисляли вероятность  $W_k(t)$  того, что заявка, поступившая в момент  $t_0 = 0$ , за интервал времени длительности  $t$  перейдет в  $k$ -й узел сети (формула (4.6)). Следовательно, искомые вероятности просеивания можно найти по формулам

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{W}(T - t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha(T-t)} [\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha} d\alpha, \quad (4.15)$$

где  $\mathbf{S}(t) = \{S_1(t), \dots, S_k(t)\}$ .

Таким образом, основное отличие применения метода многомерного динамического просеивания для сетей обслуживания от его применения к анализу многофазных СМО заключается только в формулах, по которым вычисляются вероятности просеивания  $S_k(t)$ : для сетей – это формула (4.15), в то время как для многофазных СМО – формула (3.24).

В следующих разделах кратко приводятся результаты применения метода многомерного динамического просеивания для анализа СеМО с различными типами входящих потоков. Как будет показано, уравнения Колмогорова для марковизированного считающего процесса многомерного просеянного потока в СеМО формально совпадают с соответствующими уравнениями для многофазных СМО, и таким образом, нет необходимости повторять вывод и доказательство основных результатов.

В п. 4.8 представлены результаты применения методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа для получения более точных аппроксимаций распределений числа заявок в узлах сети.

#### **4.4 Анализ СеМО с рекуррентным входящим потоком методом многомерного динамического просеивания**

Рассмотрим СеМО с неограниченным числом приборов в узлах и высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком, заданного функцией распределения длин интервалов в виде  $A(Nx)$ , модель которого подробно описана в п. 1.1. Построим описанным выше образом многомерный просеянный поток

для данной СеМО. Обозначим  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки из входящего потока, тогда для распределения вероятностей

$$P(\mathbf{n}, z, t) = P\left\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, z(t) < \frac{z}{N}\right\}$$

$(K + 1)$ -мерного марковского случайного процесса  $\{\mathbf{n}(t), z(t)\}$  аналогично п. 3.4 можем записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(\mathbf{n}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 - A(z) \sum_{k=1}^K S_k(t) \right] + \\ & + A(z) \sum_{k=1}^K \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} S_k(t), \end{aligned}$$

для всех неотрицательных  $\mathbf{n}$  и  $z$ , а для частичной характеристической функции

$$H(\mathbf{u}, z, t) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{n}} P(\mathbf{n}, z, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} P(\mathbf{n}, z, t) -$$

следующее уравнение:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right]. \quad (4.16)$$

с начальным условием

$$H(\mathbf{u}, z, t_0) = R(z), \quad (4.17)$$

**Асимптотический анализ первого порядка.** Выполнив в уравнении (4.16) замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H(\mathbf{u}, z, t) = F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon),$$

получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right]. \quad (4.18)$$

**Теорема 4.4.** Асимптотическое решение  $F_1(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$

уравнения (4.18) имеет вид

$$F_1(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K jw_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3.4.

**Асимптотический анализ второго порядка.** Выполним в (4.16)–(4.17) замену

$$H(\mathbf{u}, z, t) = H_2(\mathbf{u}, z, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}, \quad (4.19)$$

получим следующую задачу Коши относительно функции  $H_2(\mathbf{u}, z, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} + \lambda H_2(\mathbf{u}, z, t) \sum_{k=1}^K ju_k S_k(t) = \\ = \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right], \\ H_2(\mathbf{u}, z, t_0) = R(z). \end{cases}$$

Произведя здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_2(\mathbf{u}, z, t) = F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon), \quad (4.20)$$

получим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \lambda F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) = \\ = \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \\ F_2(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) = R(z). \end{cases} \quad (4.21)$$

**Теорема 4.5.** Пусть величины  $\lambda$ ,  $\kappa$  и функция  $R(z)$  определяются выражениями (1.1), (1.14) и (1.5) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $F_2(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  задачи (4.21) имеет вид

$$F_2(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}. \quad (4.22)$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3.5.

Выполнив в (4.22) замены, обратные к (4.20) и (4.19), и производя предельный переход  $z \rightarrow \infty$ , для характеристической функции  $H(\mathbf{u}, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(\mathbf{u}, z, t)$  многомерного считающего процесса  $\mathbf{n}(t)$  получаем

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}.$$

Применяя основную формулу многомерного динамического просеивания (4.14), подставим сюда  $t = T$  и перейдем к характеристической функции  $h(\mathbf{u}, T)$  числа заявок на фазах системы в момент времени  $T$ . Выбирая для стационарного режима  $t_0 = -\infty$  и принимая во внимание, что, согласно (4.15) и (4.13),

$$\int_{-\infty}^T \mathbf{S}(t) dt = \int_{-\infty}^T \mathbf{W}(T-t) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{W}(t) dt = \mathbf{Y} \mathbf{e}, \quad (4.23)$$

получаем, что вид функции  $h(\mathbf{u}, T)$  не зависит от  $T$  и имеет вид выражения (4.10).

Таким образом, асимптотическое, в условиях высокой интенсивности рекуррентного входящего потока,  $K$ -мерное стационарное распределение вероятностей числа заявок в узлах рассматриваемой СеМО является многомерным гауссовским с вектором средних значений  $N\lambda \mathbf{Y} \mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}]$ . Выражения для величин  $\lambda$  и  $\kappa$  приведены в Таблице 1.1 для рекуррентного потока, матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями

$$\mathbf{Y} = \text{diag} \left\{ \int_0^{\infty} W_k(t) dt \right\}, \quad \mathbf{V} = \int_0^{\infty} \mathbf{W}(t) [\mathbf{W}(t)]^T dt, \quad (4.24)$$

а вектор-строка  $\mathbf{W}(t)$  вычисляется по формуле (4.6).

#### 4.5 Анализ СеМО с входящим МАР-потокком

Рассмотрим СеМО с неограниченным числом приборов в узлах и высокоинтенсивным входящим МАР-потокком, модель которого представлена в п. 1.2. Применим метод многомерного динамического просеивания для данной СеМО. Аналогично п. 3.5 для распределения вероятностей  $P(\mathbf{n}, m, t) = P\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, m(t) = m\}$  марковского процесса  $\{\mathbf{n}(t), m(t)\}$ , где  $m(t)$  – состояние управляющей МАР-потокком цепи Маркова, можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, m, t)}{\partial t} = & \sum_{l=1}^M P(\mathbf{n}, l, t) (\mathbf{D}_0)_{lm} + \\ & + \sum_{l=1}^M \left[ P(\mathbf{n}, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} S_0(t) + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, l, t) (\mathbf{D}_1)_{lm} S_k(t) \right] \end{aligned}$$

для всех значений  $m = \overline{1, M}$  и неотрицательных  $\mathbf{n}$ , или в векторном виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{n}, t)}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{n}, t) \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}(\mathbf{n}, t) \mathbf{D}_1 S_0(t) + \sum_{k=1}^K \mathbf{P}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, t) \mathbf{D}_1 S_k(t), \quad (4.25)$$

где  $\mathbf{P}(\mathbf{n}, t) = [P(\mathbf{n}, 1, t), \dots, P(\mathbf{n}, M, t)]$ . Рассматривая векторную характеристическую функцию

$$H(\mathbf{u}, t) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{n}} P(\mathbf{n}, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} P(\mathbf{n}, t),$$

систему (4.25) перепишем в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, t) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right]. \quad (4.26)$$

Начальное условие для уравнения (4.26) имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \boldsymbol{\theta}. \quad (4.27)$$

**Асимптотический анализ первого порядка.** Выполним в задаче (4.26)–(4.27) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon).$$

С использованием этих замен задача (4.26)–(4.27) переписывается в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \quad (4.28)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t_0, \varepsilon) = \boldsymbol{\theta}. \quad (4.29)$$

**Теорема 4.6.** Пусть  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.24) и (1.29) соответственно. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  задачи (4.28)–(4.29) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \boldsymbol{\theta} \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau \right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3.6.

**Асимптотический анализ второго порядка.** Введем векторную функцию  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t)$ , удовлетворяющую равенству

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) \exp \left\{ N \lambda \sum_{k=1}^K j u_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.30)$$

Подставляя это выражение в (4.26)–(4.27), получим следующую задачу Коши относительно функции  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) \lambda \sum_{k=1}^K j u_k S_k(t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j u_k} - 1) S_k(t) \right], \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t_0) = \boldsymbol{\theta}. \end{cases}$$

Выполнив здесь замены переменных

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon), \quad (4.31)$$

получим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \lambda \sum_{k=1}^K j \varepsilon w_k S_k(t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j \varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t_0, \varepsilon) = \boldsymbol{\theta}. \end{cases} \quad (4.32)$$

**Теорема 4.7.** Пусть

$$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e},$$

где вектор-строка  $\mathbf{g}$  является решением линейного матричного уравнения

$$\mathbf{g}\mathbf{D} = \theta(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1),$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  задачи (4.32) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t) = \theta \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_v(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.33)$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3.7.

Выполним в (4.33) замены, обратные к (4.31) и (4.30), получаем следующее выражение для характеристической функции  $H(\mathbf{u}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{u}, t)\mathbf{e}$  процесса  $\mathbf{n}(t)$  числа событий в многомерном просеянном потоке, наступивших до момента времени  $t$ :

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_v(\tau) d\tau \right\}.$$

Возвращаясь к исследуемому процессу  $\mathbf{i}(t)$ , который представляет число заявок в узлах рассматриваемой СеМО, применяя основную формулу многомерного динамического просеивания (4.14), подставляем  $t = T$  и переходим к характеристической функции  $h(\mathbf{u}, T)$  числа заявок в узлах сети в момент времени  $T$ . Выбирая для стационарного режима  $t_0 = -\infty$  и принимая во внимание (4.23), получаем, что так же, как и в предыдущем разделе, вид функции  $h(\mathbf{u}, T)$  не зависит от  $T$  и имеет вид выражения (4.10) за исключением того, что величины  $\lambda$  и  $\kappa$  вычисляются по формулам из Таблицы 1.1 для МАР-потока. То есть асимптотическое, в условиях высокой интенсивности входящего МАР-потока,  $K$ -мерное стационарное распределение вероятностей числа заявок в узлах рассматриваемой СеМО является многомерным гауссовским с

вектором средних значений  $N\lambda\mathbf{Y}\mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ , где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (4.24).

#### 4.6 Анализ СеМО с полумарковским входящим потоком

Рассмотрим СеМО с неограниченным числом приборов в узлах и входящим высокоинтенсивным полумарковским потоком, модель которого представлена в п. 1.3. Применим метод многомерного динамического просеивания для данной СеМО. Аналогично п. 3.6 для марковского процесса  $\{\mathbf{n}(t), l(t), z(t)\}$ , где  $l(t)$  – состояние полумарковского процесса, определяемого выражением (3.60),  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента наступления следующего события в полумарковском потоке, можем записать следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для его распределения вероятностей  $P(\mathbf{n}, l, z, t) = \mathbf{P}\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, l(t) = l, z(t) < z / N\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, l, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(\mathbf{n}, l, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(\mathbf{n}, l, 0, t)}{\partial z} + \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, m, 0, t)}{\partial z} A_{ml}(z) S_k(t) + \sum_{m=1}^M \frac{\partial P(\mathbf{n}, m, 0, t)}{\partial z} A_{ml}(z) S_0(t), \end{aligned}$$

для всех неотрицательных значений  $\mathbf{n}$ ,  $l = \overline{1, M}$  и  $z > 0$ . Для частичных характеристических функций

$$H(\mathbf{u}, l, z, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + \dots + ju_K n_K} P(\mathbf{n}, l, z, t), \quad l = \overline{1, M},$$

в векторном виде эта система запишется следующим образом:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\} \quad (4.34)$$

при начальном условии

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t_0) = \mathbf{R}(z). \quad (4.35)$$

Здесь  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = [H(\mathbf{u}, 1, z, t), \dots, H(\mathbf{u}, M, z, t)]$ .

**Асимптотический анализ первого порядка.** Выполним в (4.34)–(4.35) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon),$$

получим задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) &= \mathbf{R}(z). \end{aligned} \right. \quad (4.36)$$

**Теорема 4.8.** Асимптотическое решение  $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  задачи (4.36) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j w_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}.$$

Доказательство аналогично Теореме 3.8.

**Асимптотический анализ второго порядка.** Введем функцию  $\mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)$ , определяемую выражением

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t) \exp \left\{ N \lambda \sum_{k=1}^K j u_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx \right\}. \quad (4.37)$$

Подставим это выражение в (4.34)–(4.35), получим

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t) \lambda \sum_{k=1}^K j u_k S_k(t) &= \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{j u_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t_0) &= \mathbf{R}(z). \end{aligned} \right.$$

Выполнив здесь замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon), \quad (4.38)$$

получим задачу

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \lambda \sum_{k=1}^K j \varepsilon w_k S_k(t) &= \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{j \varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) &= \mathbf{R}(z). \end{aligned} \right. \quad (4.39)$$

**Теорема 4.9.** Пусть  $\mathbf{R}(z)$  и  $\lambda$  определяются выражениями (1.54) и (1.56) соответственно,  $\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e}$ , где вектор-строка  $\mathbf{f}'_0$  удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{f}'_0 [\mathbf{I} - \mathbf{P}] &= \lambda [\mathbf{rP} - \mathbf{R}], \\ \mathbf{f}'_0 \mathbf{A} \mathbf{e} &= \frac{\lambda^2 a_2}{2} - 1, \end{aligned} \right.$$

$a_2 = \mathbf{rA}_2 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \int_0^\infty x^2 d\mathbf{A}(x)$ , причем все элементы матрицы  $\mathbf{A}_2$  конечны. Тогда асимптотическое решение  $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  задачи (4.39) имеет вид

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{jw_k jw_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}. \quad (4.40)$$

Доказательство аналогично Теореме 3.9.

Выполняя в (4.40) замены, обратные к (4.38), и подставляя полученное выражение в (4.37), получаем следующее выражение для частичной характеристической функции  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(x) dx + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) dx + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{ju_k ju_v}{2} \int_{t_0}^t S_k(x) S_v(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь  $z \rightarrow \infty$  и выполняя на основе (4.14) переход к характеристической функции  $h(\mathbf{u})$  стационарного распределения вероятностей значений исследуемого многомерного процесса  $\mathbf{i}(t)$  числа заявок в узлах СеМО, полагая  $t = T$  и  $t_0 \rightarrow -\infty$ , получаем что также, как и в предыдущих разделах, вид функ-

ции  $h(\mathbf{u})$  не зависит от  $T$  и имеет вид выражения (4.10) за исключением того, что величины  $\lambda$  и  $\kappa$  вычисляются по формулам из Таблицы 1.1 для полумарковского потока.

Таким образом, асимптотическое, в условиях высокой интенсивности входящего полумарковского потока,  $K$ -мерное стационарное распределение вероятностей числа заявок в узлах рассматриваемой СеМО является многомерным гауссовским с вектором средних значений  $N\lambda\mathbf{Y}\mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ , где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (4.24).

## **4.7 Методика расчета оптимального числа приборов в узлах сети с конечным числом каналов**

### **4.7.1 Постановка задачи**

Как уже говорилось, модели массового обслуживания с неограниченным числом приборов являются достаточно специфическими по отношению к реальным системам, так как в большинстве реальных систем количество каких-либо объектов, в том числе и каналов обслуживания, обычно конечно. В настоящем разделе представлена методика применения результатов, полученных для сетей массового обслуживания с неограниченным числом приборов на практике, а именно – впервые предлагается подход, позволяющий произвести расчет числа каналов в узлах сети с конечным числом приборов, которое обеспечит с одной стороны заданный малый уровень потерь заявок, а с другой – число каналов в узлах будет наименьшим. Данный подход будем называть *методикой расчета оптимального числа приборов в узлах сети*. Ниже изложена суть данной методики и произведен вывод необходимых математических выражений.

Итак, рассмотрим задачу проектирования сети с конечным числом приборов в узлах. При проектировании такой сети важно знать, какое наименьшее число приборов должно присутствовать в каждом узле, чтобы обеспечить надежное функционирование системы в целом [52]. Этот показатель будем

называть *оптимальным числом приборов* в узлах сети и обозначать в векторном виде как  $\mathbf{a}^{opt} = [a_1^{opt}, \dots, a_K^{opt}]$ , где  $K$  – число узлов сети, а  $a_k^{opt}$  – оптимальное число приборов для  $k$ -го узла,  $k = \overline{1, K}$ . Степень надежности спроектированной сети будем определять в виде вероятности того, что во время ее функционирования реальная нагрузка (требуемое число приборов для обслуживания всех поступивших заявок) ни в одном узле не превысит соответствующее значение  $a_k^{opt}$ . Эту вероятность будем называть *информационной надежностью*  $P$  функционирования СеМО.

Решение задачи нахождения оптимального числа приборов в узлах сети при заданном уровне информационной надежности выполним на основе построения гиперэллипсоида равной плотности гауссовского распределения

$$\mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} = r^2.$$

Здесь  $\mathbf{x}$  – вектор переменных пространства состояний сети,  $\mathbf{D}$  – матрица ковариаций числа занятых приборов, например, полученная в результате асимптотического анализа:

$$\mathbf{D} = N[\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}],$$

$r$  – некоторый параметр, соответствующий заданному уровню информационной надежности  $P$ , в дальнейшем будем называть его *радиусом гиперэллипсоида*. В качестве начала координат для уравнения гиперэллипсоида используется центральная точка состояний сети – вектор среднего числа заявок  $\mathbf{a} = \mathbf{Y}\mathbf{e}$  в стационарном режиме функционирования. Упомянутые здесь матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (4.24), а величины  $\lambda$  и  $\kappa$  выражениями, приведенными в Таблице 1.1, для соответствующего типа входящего потока.

Для начала решим вспомогательную задачу вычисления вероятности попадания гауссовского вектора в гиперэллипсоид равной плотности.

#### 4.7.2 Вероятность попадания гауссовского вектора в гиперэллипсоид равной плотности

В работе [21] найдена вероятность попадания гауссовского вектора с не-

зависимыми компонентами в гиперэллипсоид равной плотности. В данной работе найдем эту вероятность для гауссовского вектора с коррелированными компонентами. Кроме того, решим обратную задачу установления размера гиперэллипсоида, вероятность попадания в который задана, а также найдем максимальные значения координатных переменных, принадлежащих этому эллипсоиду.

Рассмотрим  $K$ -мерный гауссовский вектор  $\xi^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K]$  с коррелированными компонентами, заданный нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\{\xi \cdot \xi^T\}.$$

Обозначим через  $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_K]$   $K$ -мерный вектор переменных  $x_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , через  $F_K(r)$  – вероятность попадания случайной точки  $\xi$  в  $K$ -мерный гиперэллипсоид  $\mathbf{B}_K(r)$  равной плотности, уравнение поверхности которого имеет вид

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} = r^2, \quad (4.41)$$

то есть

$$F_K(r) = \mathbf{P}\{\xi \in \mathbf{B}_K(r)\}. \quad (4.42)$$

Ставится задача определения функции  $F_K(r)$  аргумента  $r$  при заданных корреляционной матрице  $\mathbf{R}$  размерности  $K$  и значения величины  $r$ , определяющей размер гиперэллипсоида  $\mathbf{B}_K(r)$ .

**Решение задачи определения функции  $F_K(r)$ .** Пусть матрица  $\mathbf{A}$  такова, что компоненты гауссовского вектора

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A} \cdot \xi \quad (4.43)$$

являются независимыми стандартными нормально распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Корреляционная матрица вектора  $\boldsymbol{\eta}$  является диагональной единичной  $\mathbf{I}$ . Таким образом, выполняется равенство

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}\{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^T\} = \mathbf{M}\{\mathbf{A} \xi \xi^T \mathbf{A}\} = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{A}^T,$$

то есть для матрицы  $\mathbf{A}$  выполняется равенство

$$\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}. \quad (4.44)$$

Определим  $K$ -мерный вектор  $\mathbf{y}$  равенством

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.45)$$

тогда

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}.$$

Найдем уравнение поверхности области  $\Lambda_K(r)$ , которая является отображением (4.45) гиперэллипсоида  $\mathbf{B}_K(r)$ .

В силу уравнения (4.41) можно записать

$$\begin{aligned} \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} = r^2\} &= \{\mathbf{y} : (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = r^2\} = \\ &= \{\mathbf{y} : \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} = r^2\} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = r^2\}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где  $\mathbf{H} = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ . Найдем вид матрицы  $\mathbf{H}$ , для этого рассмотрим ее обратную матрицу

$$\mathbf{H}^{-1} = \left[ (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \right]^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}.$$

Здесь последнее равенство выполняется в силу (4.44). Следовательно, матрица  $\mathbf{H}$  является диагональной единичной, а равенство (4.46) можно переписать в виде

$$\{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} = r^2\} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}^T \mathbf{y} = r^2\},$$

то есть преобразование (4.45) переводит гиперэллипсоид  $\mathbf{B}_K(r)$  в гипершар  $\Lambda_K(r)$  радиуса  $r$ , уравнение поверхности которого имеет вид

$$\mathbf{y}^T \mathbf{y} = r^2.$$

В силу равенств (4.42) и (4.43) можно записать

$$F_K(r) = P\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{B}_K(r)\} = P\{\boldsymbol{\eta} \in \Lambda_K(r)\}, \quad (4.47)$$

поэтому вероятность  $F_K(r)$  является функцией распределения аргумента  $r$  для

длины  $\zeta = \sqrt{\sum_{k=1}^K \eta_k^2}$  гауссовского вектора  $\boldsymbol{\eta}$  с независимыми стандартными

нормально распределенными компонентами  $\eta_k$ .

Известно, что при  $n = 2$  распределение (4.47) является распределением Рэлея [18]

$$F_2(r) = 1 - \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r \geq 0,$$

а при  $n = 3$  – распределением Максвелла [18]

$$F_3(r) = 2\Phi(r) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r \geq 0,$$

где  $\Phi(r)$  – функция Лапласа.

Найдем функцию распределения  $F_K(r)$  для значений  $K \geq 4$ , воспользовавшись выражением (4.47). Плотность распределения вероятностей  $g(y_1, y_2, \dots, y_K)$  гауссовского вектора  $\boldsymbol{\eta}$  в силу независимости его компонент имеет вид

$$g(y_1, y_2, \dots, y_K) = \prod_{k=1}^K \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y_k^2}{2}\right\} \right),$$

поэтому в силу (4.47) для функции распределения  $F_K(r)$  можно записать

$$\begin{aligned} F_K(r) &= P\{\boldsymbol{\eta} \in \Lambda_K(r)\} = \iint \dots \int_{\Lambda_K(r)} g(y_1, y_2, \dots, y_K) dy_1 dy_2 \dots dy_K = \\ &= (2\pi)^{-\frac{K}{2}} \iint \dots \int_{\left\{y_k: \sum_{k=1}^K y_k^2 \leq r^2\right\}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K y_k^2\right\} dy_1 dy_2 \dots dy_K. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Аналогично подходу [21] перейдем в этом интеграле к полярным координатам, выполнив замены

$$y_k = z v_k(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1}), \quad k = \overline{1, K}, \quad (4.49)$$

где  $z = \sqrt{\sum_{k=1}^K y_k^2}$ , а  $v_k(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1})$  – некоторые функции углов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1}$

поворота координатных осей. Найдем якобиан  $J$  преобразования (4.49):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_{K-1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z} & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_{K-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_K}{\partial z} & \frac{\partial y_K}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_K}{\partial \varphi_{K-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & z \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1} & \cdots & z \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_{K-1}} \\ v_2 & z \frac{\partial v_2}{\partial \varphi_1} & \cdots & z \frac{\partial v_2}{\partial \varphi_{K-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_K & z \frac{\partial v_K}{\partial \varphi_1} & \cdots & z \frac{\partial v_K}{\partial \varphi_{K-1}} \end{vmatrix} = z^{K-1} w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1}),$$

где  $w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1})$  – некоторая функция углов  $\varphi_k$ ,  $k = 1, K-1$ .

Применяя замену (4.49), интеграл (4.48) перепишем в виде произведения однократного и  $(K-1)$ -кратного интегралов

$$\begin{aligned} F_K(r) &= \int_0^r z^{K-1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz (2\pi)^{-\frac{K}{2}} \iint_D \dots \int w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1}) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{K-1} = \\ &= b_K \int_0^r z^{K-1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где  $b_K = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} \iint_D \dots \int w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{K-1}) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{K-1}$ , а  $D$  – область изменения углов  $\varphi_k$  поворота координатных осей.

Заметим, что величина  $b_K$  в явном виде не найдена, но мы найдем ее из равенства (4.50), воспользовавшись условием нормировки функции распределения  $F_K(r)$ :

$$1 = F_K(\infty) = b_K \int_0^\infty z^{K-1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz,$$

поэтому

$$b_K = \left( \int_0^\infty z^{K-1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \right)^{-1},$$

а функция распределения  $F_K(r)$  имеет вид

$$F_K(r) = \left( \int_0^\infty z^{K-1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \right)^{-1} \cdot \int_0^r z^{K-1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz. \quad (4.51)$$

Выполнив в интегралах (4.51) замену  $z = \sqrt{2t}$ , выразим их через гамма-функции:

$$\begin{aligned}
F_K(r) &= \left( \int_0^\infty (2t)^{\frac{K-1}{2}} e^{-t} \sqrt{2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right)^{-1} \cdot \int_0^{\frac{r^2}{2}} (2t)^{\frac{K-1}{2}} e^{-t} \sqrt{2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \\
&= \left( \int_0^\infty t^{\frac{K}{2}-1} e^{-t} dt \right)^{-1} \cdot \int_0^{\frac{r^2}{2}} t^{\frac{K}{2}-1} e^{-t} dt = \left[ \Gamma\left(\frac{K}{2}\right) \right]^{-1} \Gamma_{r^2/2}\left(\frac{K}{2}\right) = P\left(\frac{K}{2}, \frac{r^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

где  $P\left(\frac{K}{2}, \frac{r^2}{2}\right)$  – неполная гамма-функция [1] порядка  $r^2/2$  аргумента  $K/2$ .

Таким образом, для функции распределения  $F_K(r)$  получаем следующее выражение:

$$F_K(r) = \frac{\Gamma_{r^2/2}\left(\frac{K}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)}. \quad (4.52)$$

Равенства (4.51), (4.52) позволяют достаточно просто определять вероятность попадания гауссовского вектора  $\xi$  в гиперэллипсоид  $\mathbf{B}_K(r)$  и решать обратную задачу – поиск значения  $r$ , определяющего размер гиперэллипсоида, вероятность попадания в который задана.

Обозначим через  $P$  вероятность попадания вектора  $\xi$  в гиперэллипсоид  $\mathbf{B}_K(r)$ . В Таблице 4.1 и на Рисунке 4.2 приведены значения  $r_K(P)$  радиуса гиперэллипсоида для разных значений размерности  $K$  гиперэллипсоида и различных вероятностей попадания  $P$ . Как видно из таблицы, при значительных изменениях размерности  $K$  и вероятности  $(1 - P)$  изменения величины  $r_K(P)$  не так велики. Кроме того, значения  $r_K(P)$  не превышают 16 даже при  $K = 100$  и  $P = 1 - 10^{-12}$ . Кроме того, при уменьшении допустимой вероятности потерь  $(1 - P)$  в миллиард раз радиус гиперэллипсоида увеличивается не более чем в 1,5–2 раза.

Таблица 4.1 – Значения радиуса  $r_K(P)$  для размерностей гиперэллипсоида  $K = 5, 10, 50, 100$  и различных вероятностей  $P$  попадания в него

Размерность гиперэллипсоида $K$	Вероятность попадания в гиперэллипсоид $P$			
	$1 - 10^{-3}$	$1 - 10^{-6}$	$1 - 10^{-9}$	$1 - 10^{-12}$
5	4,529	5,991	7,120	8,077
10	5,440	6,846	7,934	8,858
50	9,309	10,612	11,613	12,463
100	12,225	13,495	14,468	15,291

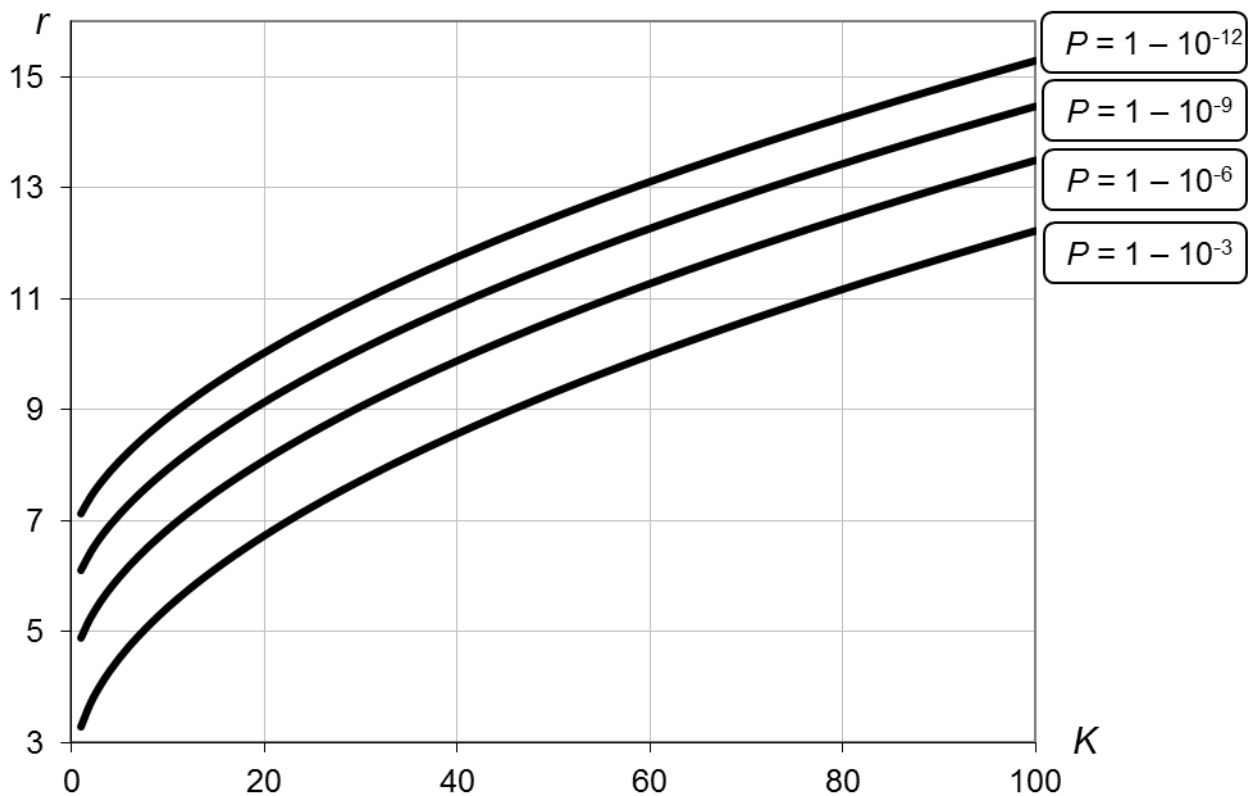


Рисунок 4.2 – Изменение радиуса  $r$  гиперэллипсоида с ростом размерности  $K$  для различных значений вероятности  $P$  попадания в него

**Определение предельных значений координат.** При заданных значениях корреляционной матрицы  $\mathbf{R}$  и величины  $r$ , определяющей размер гиперэллипсоида  $\mathbf{B}_K(r)$ , представляют интерес максимальные значения  $X_k$  координатных переменных  $x_k$ , удовлетворяющих условию (4.41). Найдем эти значения. Для их определения необходимо решить следующую задачу на поиск условного экстремума:

$$X_k = \max x_k,$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} = r^2$$

(здесь мы считаем значение  $k$  зафиксированным).

Для этой задачи составим функцию Лагранжа [3]

$$L(x_1, x_2, \dots, x_K, \lambda) = x_k + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K x_i (\mathbf{R}^{-1})_{ij} x_j - r^2 \right\}.$$

Необходимые условия экстремума определяются системой уравнений

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_K, \lambda)}{\partial x_i} = 2\lambda \sum_{j=1}^K (\mathbf{R}^{-1})_{ij} x_j = 0 \text{ при } i \neq k,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_K, \lambda)}{\partial x_k} = 1 + 2\lambda \sum_{j=1}^K (\mathbf{R}^{-1})_{kj} x_j = 0 \text{ при } i = k,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_K, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K x_i (\mathbf{R}^{-1})_{ij} x_j - r^2 = 0.$$

Обозначив через  $(\mathbf{R}^{-1})^{<i>}$   $i$ -ую строку матрицы  $\mathbf{R}^{-1}$ , перепишем эту систему в матричном виде:

$$(\mathbf{R}^{-1})^{<i>} \mathbf{x} = 0 \text{ при } i \neq k, \quad (4.53)$$

$$(\mathbf{R}^{-1})^{<k>} \mathbf{x} = -\frac{1}{2\lambda} \text{ при } i = k, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} = r^2. \quad (4.55)$$

Обозначим через  $\mathbf{w}$  вектор-столбец, все элементы которого равны нулю, кроме элемента под номером  $k$ , который равен  $w_k = -\frac{1}{2\lambda}$ . Тогда выражения

(4.53)–(4.54) перепишутся в виде матричного уравнения

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{w},$$

откуда получаем

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{w}. \quad (4.56)$$

Подставим это выражение в (4.55):

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{w} = r^2.$$

Отсюда

$$r^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{R}^T \mathbf{w} = \frac{1}{(2\lambda)^2} R_{kk},$$

откуда получаем

$$\frac{1}{2\lambda} = \pm \sqrt{\frac{r^2}{R_{kk}}}.$$

С учетом этого, выражая  $k$ -ю компоненту вектора  $\mathbf{x}$  из (4.56), получим

$$x_k = -\frac{1}{2\lambda} R_{kk} = r \sqrt{R_{kk}}.$$

Таким образом, максимальное значение  $X_k$  координатной переменной  $x_k$ , удовлетворяющей равенству (4.41), составляет

$$X_k = r \sqrt{R_{kk}}.$$

#### 4.7.3 Оптимальное число приборов

Итак, возвращаясь к задаче определения оптимального числа приборов в узлах сети для заданного уровня информационной надежности  $P$ , которая описана в п. 4.7.1, получаем, что соответствующие значения вычисляются по формулам

$$a_k^{opt} = a_k + r \sqrt{D_{kk}}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (4.57)$$

где  $a_k$  – математическое ожидание числа приборов, занятых в узле  $k$ , а  $D_{kk}$  – его дисперсия. В пп. 4.4–4.6 мы установили, что они равны соответственно

$$a_k = N\lambda Y_k = N\lambda \int_0^{\infty} W_k(t) dt$$

и

$$D_{kk} = N[\lambda Y_k + \kappa V_{kk}] = N \left[ \lambda \int_0^{\infty} W_k(t) dt + \kappa \int_0^{\infty} W_k^2(t) dt \right],$$

а величины  $W_k(t)$  вычисляются по формуле (4.6). Радиус  $r$   $K$ -мерного гиперэллипсоида определяется для заданного уровня информационной надежности  $P$  как решение уравнения  $F_K(r) = P$ , где функция  $F_K(r)$  определяется выражением (4.52).

Таким образом, можно сформулировать следующий **алгоритм расчета оптимального числа приборов** в узлах сети обслуживания с конечным числом каналов:

1. Выполнить расчет вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций гауссовской аппроксимации (4.10).
2. Численно решить уравнение  $F_K(r) = P$  и найти значение  $r$ , соответствующее заданному уровню информационной надежности  $P$ .
3. Выполнить расчеты по формулам (4.57).
4. Округлить полученные значения  $a_k^{opt}$  до целого числа в большую сторону.

Следует учитывать, что представленная методика основана на гауссовской аппроксимации (4.10), и поэтому данный подход применим только в случаях, когда применима эта аппроксимация, то есть в условиях высокой интенсивности входящего потока. В п. 5.6 приведен пример расчета оптимального числа приборов для сети массового обслуживания при различных значениях величины информационной надежности  $P$ , а также представлен анализ области применимости данного результата.

#### 4.8 Асимптотический анализ третьего порядка

Применение результатов в виде гауссовских аппроксимаций  $h^{(2)}(\mathbf{u})$  (4.10), полученных в настоящей главе для СеМО с различными типами входящих потоков, достаточно удобно, так как позволяет производить над ними определенные аналитические манипуляции. Например, использовать эти результаты для вычисления оптимального числа приборов (п. 4.7). Однако численные эксперименты (Глава 5) показывают, что допустимая погрешность достигается при достаточно больших значениях параметра высокой интенсивности  $N$  входящего потока. Для меньших значений интенсивности входящего потока можно получить более точную аппроксимацию, используя асимптотический анализ более высокого порядка.

В настоящем разделе приведены результаты применения асимптотического анализа третьего порядка для исследования СеМО с различными входящими потоками, которые могут быть получены аналогично подходу, подробно описанному в теоремах п. 2.7. Полные доказательства представленных теорем не приводятся в виду их большого объема.

#### 4.8.1 Асимптотический анализ третьего порядка для СеМО с входящим рекуррентным потоком

Продолжая материал исследования, изложенный в п. 4.4, введем функцию  $H_3(\mathbf{u}, z, t)$ , которая определяется равенством

$$H(\mathbf{u}, z, t) = H_3(\mathbf{u}, z, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.58)$$

Для этой функции задача (4.16)–(4.17) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \frac{\partial H_3(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} + \\ & + H_3(\mathbf{u}, z, t) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K ju_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} S_k(t) S_m(t) \right\} = \\ & = \frac{\partial H_3(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_3(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$H_3(\mathbf{u}, z, t_0) = R(z), \quad H_3(\mathbf{u}, 0, t) = 0. \quad (4.60)$$

Выполним в этих выражениях следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_3(\mathbf{u}, z, t) = F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon). \quad (4.61)$$

С учетом этих замен проблема (4.59)–(4.60) примет вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \frac{\partial F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \\ & + F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{j\varepsilon w_k j\varepsilon w_m}{2} S_k(t) S_m(t) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[ A(z) - 1 + A(z) \sum_{k=1}^K (e^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \quad (4.62)$$

$$F(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) = R(z), \quad F(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon) = 0. \quad (4.63)$$

Тогда для асимптотического решения  $F(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  задачи (4.62)–(4.63) имеет место следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству Теоремы 2.13 и здесь не приводится.

**Теорема 4.10.** Пусть случайная величина, заданная функцией распределения  $A(x)$ , имеет конечные начальные моменты первого  $a = 1 / \lambda$ , второго  $a_2$  и третьего  $a_3$  порядков, а величины  $\lambda$ ,  $\kappa$  и  $\mu$  определяются соответственно выражениями (1.1), (1.14) и (2.112). Тогда асимптотическое решение задачи (4.62)–(4.63) имеет вид произведения

$$F(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \Phi(\mathbf{w}, t), \quad (4.64)$$

в котором функция  $\Phi(\mathbf{w}, t)$  определяется равенством

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^3}{6} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{jw_k (jw_m)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{jw_k jw_l jw_m}{6} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_l(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.65) \end{aligned}$$

Выполнив в (4.64)–(4.65) замены, обратные (4.61), и подставив результат в (4.58), применяя обозначения

$$Y_k(t) = \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau, \quad V_{km}(t) = \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau, \quad Z_{klm}(t) = \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_l(\tau) S_m(\tau) d\tau,$$

получим следующий вид аппроксимации для частичной характеристической функции  $H(\mathbf{u}, z, t)$ :

$$H(\mathbf{u}, z, t) \approx R(z) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k(t) + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} V_{km}(t) + \right.$$

$$+ N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^3}{6} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k(ju_m)^2}{2} V_{km}(t) + N\mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_l ju_m}{6} Z_{klm}(t) \Big\}.$$

Рассматривая функционирование сети в стационарном режиме, аналогично подходу п. 4.3 положим  $t_0 = -\infty$ ,  $t = T$ . Получим следующий вид аппроксимации третьего порядка  $h^{(3)}(\mathbf{u})$  для характеристической функции  $h(\mathbf{u})$  числа заявок в узлах сети, функционирующей в стационарном режиме:

$$h(\mathbf{u}) \approx h^{(3)}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} V_{km} + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^3}{6} Y_k + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k(ju_m)^2}{2} V_{km} + N\mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_l ju_m}{6} Z_{klm} \right\}, \quad (4.66)$$

где

$$Y_k = \int_0^{\infty} W_k(t) dt, \quad V_{km} = \int_0^{\infty} W_k(t) W_m(t) dt, \quad Z_{klm} = \int_0^{\infty} W_k(t) W_l(t) W_m(t) dt,$$

а величины  $W_k(t)$  вычисляются по формуле (4.6). Таким образом, полученная ранее в пп. 4.2 и 4.4 гауссовская аппроксимация стационарного распределения числа заявок в сети GI-(GI/∞)<sup>K</sup> может быть уточнена с использованием асимптотического результата третьего порядка (4.66). Сравнительный анализ точности этих аппроксимаций, а также область их применимости приведены в Главе 5.

#### 4.8.2 Асимптотический анализ третьего порядка для СеМО с входящим МАР-потоком

Продолжая материал исследования, изложенный в п. 4.5, введем функцию  $\mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t)$ , которая определяется равенством

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.67)$$

Для этой функции задача Коши (4.26)–(4.27) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t)}{\partial t} + \\
& + \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j u_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j u_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{j u_k j u_m}{2} S_k(t) S_m(t) \right\} = \\
& = \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j u_k} - 1) S_k(t) \right], \tag{4.68}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t_0) = \boldsymbol{\theta}. \tag{4.69}$$

Выполним в этих выражениях следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{w}, t, \varepsilon). \tag{4.70}$$

С учетом этих замен задача (4.68)–(4.69) переписется в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} + \\
& + \mathbf{F}(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j \varepsilon w_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j \varepsilon w_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{j \varepsilon w_k j \varepsilon w_m}{2} S_k(t) S_m(t) \right\} = \\
& = \mathbf{F}(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left[ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^K (e^{j \varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \right], \tag{4.71}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}, t_0, \varepsilon) = \boldsymbol{\theta}. \tag{4.72}$$

Тогда для асимптотического решения  $\mathbf{F}(\mathbf{w}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$  задачи (4.71)–(4.72) имеет место следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству Теоремы 2.14 и здесь не приводится.

**Теорема 4.11.** Пусть величины  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$  и вектор  $\boldsymbol{\theta}$  определяются соответственно выражениями (1.24), (2.79), (2.126) и (1.29). Тогда асимптотическое решение задачи (4.71)–(4.72) имеет вид произведения

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}, t) = \boldsymbol{\theta} \Phi(\mathbf{w}, t), \tag{4.73}$$

в котором функция  $\Phi(\mathbf{w}, t)$  определяется равенством

$$\Phi(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j w_k)^3}{6} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{j w_k (j w_m)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau + \right.$$

$$+ \mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{jw_k jw_l jw_m}{6} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_l(\tau) S_m(\tau) d\tau \left. \right\}. \quad (4.74)$$

Выполнив в (4.73)–(4.74) замены, обратные (4.70), подставив результат в (4.67) и применяя обозначения

$$Y_k(t) = \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau, \quad V_{km}(t) = \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau, \quad Z_{klm}(t) = \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_l(\tau) S_m(\tau) d\tau, \quad (4.75)$$

получим следующий вид аппроксимации для характеристической функции  $H(\mathbf{u}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{u}, t)\mathbf{e}$ :

$$H(\mathbf{u}, t) \approx \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k(t) + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} V_{km}(t) + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^3}{6} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k (ju_m)^2}{2} V_{km}(t) + N\mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_l ju_m}{6} Z_{klm}(t) \right\}.$$

Рассматривая функционирование сети в стационарном режиме аналогично подходу п. 4.3 положим  $t_0 = -\infty$ ,  $t = T$ , получим следующий вид аппроксимации третьего порядка  $h^{(3)}(\mathbf{u})$  для характеристической функции  $h(\mathbf{u})$  числа заявок в узлах рассматриваемой сети, функционирующей в стационарном режиме:

$$h(\mathbf{u}) \approx h^{(3)}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} V_{km} + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^3}{6} Y_k + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k (ju_m)^2}{2} V_{km} + N\mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_l ju_m}{6} Z_{klm} \right\}, \quad (4.76)$$

где

$$Y_k = \int_0^{\infty} W_k(t) dt, \quad V_{km} = \int_0^{\infty} W_k(t) W_m(t) dt, \quad Z_{klm} = \int_0^{\infty} W_k(t) W_l(t) W_m(t) dt,$$

а величины  $W_k(t)$  вычисляются по формуле (4.6). Таким образом, полученная ранее в п. 4.5 гауссовская аппроксимация  $h^{(2)}(\mathbf{u})$  стационарного распределения числа заявок в сети МАР– $(GI/\infty)^K$  может быть уточнена с использованием

асимптотического результата третьего порядка (4.76). В Главе 5 приводится численный сравнительный анализ точности указанных аппроксимаций, а также анализируются условия их применимости.

### 4.8.3 Асимптотический анализ третьего порядка для СеМО с входящим полумарковским потоком

Продолжая процедуру анализа, представленную в п. 4.6, введем функцию  $\mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t)$ , которая определяется равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Для этой функции задача (4.34)–(4.35) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} + \\ & + \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K ju_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} S_k(t) S_m(t) \right\} = \\ & = \frac{\partial \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t_0) = \mathbf{R}(z). \quad (4.79)$$

Выполним в этих выражениях следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_3(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon). \quad (4.80)$$

С учетом этих замен задача (4.78)–(4.79) примет вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \\ & + \mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K j\varepsilon w_k S_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{j\varepsilon w_k j\varepsilon w_m}{2} S_k(t) S_m(t) \right\} = \\ & = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \mathbf{A}(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^K (e^{ju_k} - 1) S_k(t) \right] - \mathbf{I} \right\}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t_0, \varepsilon) = \mathbf{R}(z). \quad (4.82)$$

Относительно асимптотического решения  $\mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$  задачи (4.81)–(4.82) имеет место следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству Теоремы 2.15 и здесь не приводится.

**Теорема 4.12.** Пусть величины  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$  и векторная функция  $\mathbf{R}(z)$  определяются выражениями (1.56), (2.99), (2.139) и (1.54) соответственно. Тогда асимптотическое решение задачи (4.81)–(4.82) имеет вид произведения

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}, z, t) = \mathbf{R}(z)\Phi(\mathbf{w}, t), \quad (4.83)$$

в котором функция  $\Phi(\mathbf{w}, t)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{w}, t) = \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^K \frac{(jw_k)^3}{6} \int_{t_0}^t S_k(\tau) d\tau + \kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{jw_k (jw_m)^2}{2} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_m(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{jw_k jw_l jw_m}{6} \int_{t_0}^t S_k(\tau) S_l(\tau) S_m(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.84) \end{aligned}$$

Выполнив в (4.83)–(4.84) замены, обратные (4.80), и подставив результат в (4.77), применяя обозначения (4.75), получим следующий вид аппроксимации для частичной характеристической функции  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k(t) + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} V_{km}(t) + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^3}{6} Y_k(t) + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k (ju_m)^2}{2} V_{km}(t) + N\mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_l ju_m}{6} Z_{klm}(t) \right\}. \end{aligned}$$

Рассматривая функционирование сети в стационарном режиме, аналогично подходу п. 4.3 положим  $t_0 = -\infty$ ,  $t = T$ . Полагая  $z \rightarrow \infty$  и умножая полученное выражение на  $\mathbf{e}$ , получаем следующий вид аппроксимации третьего порядка  $h^{(3)}(\mathbf{u})$  для характеристической функции  $h(\mathbf{u})$  числа заявок в узлах сети, функционирующей в стационарном режиме:

$$h(\mathbf{u}) \approx h^{(3)}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ N\lambda \sum_{k=1}^K ju_k Y_k + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^2}{2} Y_k + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_m}{2} V_{km} + \right. \\ \left. + N\lambda \sum_{k=1}^K \frac{(ju_k)^3}{6} Y_k + N\kappa \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k (ju_m)^2}{2} V_{km} + N\mu \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \frac{ju_k ju_l ju_m}{6} Z_{klm} \right\}, \quad (4.85)$$

где

$$Y_k = \int_0^{\infty} W_k(t) dt, \quad V_{km} = \int_0^{\infty} W_k(t) W_m(t) dt, \quad Z_{klm} = \int_0^{\infty} W_k(t) W_l(t) W_m(t) dt,$$

а величины  $W_k(t)$  вычисляются по формуле (4.6). Таким образом, полученная ранее в п. 4.6 гауссовская аппроксимация  $h^{(2)}(\mathbf{u})$  многомерного стационарного распределения вероятностей числа заявок в сети  $SM-(GI/\infty)^K$  может быть уточнена с использованием асимптотического результата третьего порядка (4.85). Сравнительный анализ точности этих аппроксимаций и анализ областей их применимости приведен в Главе 5.

#### 4.9 Исследование СеМО с экспоненциальным обслуживанием методом начальных моментов

В настоящем разделе представлен анализ сети массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным обслуживанием в узлах, выполненный методом начальных моментов. Для рассматриваемой СеМО получены выражения для вычисления вектора начальных моментов первого порядка и матрицы начальных моментов второго порядка для числа заявок в узлах сети в стационарном режиме ее функционирования, которые могут быть использованы для оценки качества гауссовской аппроксимации (4.10), полученной в асимптотических условиях. В Главе 5 представлено численное сравнение соответствующих асимптотических и допредельных результатов.

Рассмотрим сеть массового обслуживания, состоящую из  $K$  узлов, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход сети поступает рекуррентный поток заявок, в котором длины интервалов между по-

следовательным поступлением заявок имеют функцию распределения  $A(x)$ . Время обслуживания в каждом узле является экспоненциальной случайной величиной с параметром  $\mu_k$  для  $k$ -го узла ( $k = \overline{1, K}$ ). Обозначим через  $i_k(t)$  количество заявок, находящихся на обслуживании в  $k$ -ом узле сети в момент времени  $t$  ( $k = \overline{1, K}$ ). Ставится задача определения начальных моментов первого и второго порядков для многомерного случайного процесса изменения состояний сети  $\mathbf{i}(t) = [i_1(t) \dots i_K(t)]^T$  в стационарном режиме функционирования.

**Система уравнений Колмогорова.** Обозначим  $z(t)$  – длина интервала времени от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки входящего потока. Для распределения вероятностей  $P(\mathbf{i}, z, t) = P\{\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}, z(t) < z\}$  многомерного марковского случайного процесса  $\{\mathbf{i}(t), z(t)\}$  можно записать следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{i}, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(\mathbf{i}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(\mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i}, z, t) \cdot i_k \mu_k + \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\partial P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} A(z) \nu_k + \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l, z, t) \cdot (i_k + 1) \mu_k M_{kl} + \\ & + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i}, z, t) i_k \mu_k M_{kk} + \sum_{k=1}^K P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k, z, t) \cdot (i_k + 1) \mu_k M_{k0} \end{aligned} \quad (4.86)$$

для всех неотрицательных значений  $\mathbf{i}$  и  $z$  (предполагается, что  $P(\mathbf{i}, z, t) = 0$ , если хотя бы один элемент вектора  $\mathbf{i}$  отрицателен). Здесь  $M_{kl}$  – элементы матрицы маршрутизации сети,  $M_{k0} = 1 - \sum_{l=1}^K M_{lv}$ ,  $\mathbf{v} = \{\nu_1, \dots, \nu_K\}$  – вектор разделения входящего потока.

Введем частичную характеристическую функцию

$$H(\mathbf{u}, z, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{j u_1 i_1 + \dots + j u_K i_K} P(\mathbf{i}, z, t)$$

векторного аргумента  $\mathbf{u}$ . Для нее система (4.86) переписывается в виде уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} + j \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k + \sum_{k=1}^K e^{ju_k} \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} A(z) \nu_k - \\ &- j \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K e^{-ju_k} e^{ju_l} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k M_{kl} - j \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k M_{kk} - j \sum_{k=1}^K e^{-ju_k} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k M_{k0}. \end{aligned}$$

Для стационарного режима функционирования сети это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} \sum_k^K [e^{ju_k} A(z) - 1] \nu_k + \\ &+ j \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K M_{kl} e^{ju_l} - M_{kk} - e^{-ju_k} M_{k0} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

**Моменты первого порядка.** Введем функции  $a_k(z)$ , определяемые выражениями

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=0} = j \cdot a_k(z) \quad (4.88)$$

для  $k = \overline{1, K}$ . Известно [111], что начальные моменты первого порядка  $m_k^{(1)}$  определяются выражениями  $m_k^{(1)} = a_k(\infty)$ . Для их нахождения продифференцируем уравнение (4.87) по каждой из переменных  $u_n$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial z \partial u_n} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z \partial u_n} \sum_{k=1}^K [e^{ju_k} A(z) - 1] \nu_k + j \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} e^{ju_n} A(z) \nu_n + \\ &+ j \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k \partial u_n} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K M_{kl} e^{ju_l} - M_{kk} - M_{k0} e^{-ju_k} \right\} + \\ &+ j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_n} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^K M_{nl} e^{ju_l} - j^2 \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} \mu_k e^{-ju_k} M_{kn} e^{ju_n} (1 - \delta_{kn}) + \\ &+ j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_n} \mu_n M_{n0} e^{-ju_n} = 0, \quad n = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

где  $\delta_{kn}$  – символ Кронекера.

Подставляя сюда  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и учитывая, что [107]

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} \right|_{\substack{\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ z=0}} = \lambda,$$

с использованием выражений (4.88) получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно функций  $a_k(z)$ :

$$a'_n(z) + a'_n(0)[A(z) - 1] + \lambda A(z) \nu_n - a_n(z) \mu_n + \sum_{k=1}^K a_k(z) \mu_k M_{kn} = 0, \quad n = \overline{1, K}.$$

Для этой системы применим преобразования Лапласа – Стильеса

$$A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dA(z), \quad a_k^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} da_k(z), \quad k = \overline{1, K},$$

получим:

$$a_n^*(\alpha)(\alpha - \mu_n) + \sum_{k=1}^K a_k^*(\alpha) \mu_k M_{kn} + a'_n(0)[A^*(\alpha) - 1] + \lambda A^*(\alpha) \nu_n = 0, \quad n = \overline{1, K}. \quad (4.90)$$

Подставляя сюда  $\alpha = 0$  и учитывая, что  $A^*(0) = 1$ ,  $\varphi_k^*(0) = \varphi_k(\infty) = m_k^{(1)}$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно первых моментов состояния рассматриваемой сети массового обслуживания:

$$-\mu_n m_n^{(1)} + \sum_{k=1}^K m_k^{(1)} \mu_k M_{kn} + \lambda \nu_n = 0, \quad n = \overline{1, K}.$$

С использованием матричных обозначений  $\boldsymbol{\mu} = \text{diag} \{ \mu_1, \dots, \mu_K \}$ ,  $\mathbf{m}^{(1)} = [m_1^{(1)}, \dots, m_K^{(1)}]$ , эта система переписывается следующим образом:

$$-\mathbf{m}^{(1)} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{m}^{(1)} \boldsymbol{\mu} \mathbf{M} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ее решение имеет вид:

$$\mathbf{m}^{(1)} = \lambda \mathbf{v} [\boldsymbol{\mu} (\mathbf{I} - \mathbf{M})]^{-1}. \quad (4.91)$$

Таким образом, выражение (4.91) полностью определяет среднее число заявок в узлах рассматриваемой сети в стационарном режиме функционирования.

**Моменты второго порядка.** Введем функции  $b_{kl}(z)$ , определяемые выражениями

$$\left. \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k \partial u_l} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = j^2 \cdot b_{kl}(z) \quad (4.92)$$

для  $k, l = \overline{1, K}$ . Известно [111], что начальные моменты второго порядка  $m_{kl}^{(2)}$  состояния рассматриваемой сети определяются равенствами

$$m_{kl}^{(2)} = b_{kl}(\infty). \quad (4.93)$$

Для их нахождения сначала перейдем к пределу  $z \rightarrow \infty$  в системе (4.89):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z \partial u_n} \sum_{k=1}^K [e^{ju_k} - 1] v_k + j \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} e^{ju_n} v_n + \\ & + j \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_k \partial u_n} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K M_{kl} e^{ju_l} - M_{kk} - M_{k0} e^{-ju_k} \right\} + \\ & + j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^K M_{nl} e^{ju_l} - j^2 \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_k} \mu_k e^{-ju_k} M_{kn} e^{ju_n} (1 - \delta_{kn}) + \\ & + j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n} \mu_n M_{n0} e^{-ju_n} = 0, \quad n = \overline{1, K}, \end{aligned}$$

а затем продифференцируем каждое уравнение этой системы по каждой из переменных  $u_s$ ,  $s = \overline{1, K}$ . В результате получим следующую систему из  $K^2$  дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_n \partial u_s} \sum_{k=1}^K [e^{ju_k} - 1] v_k + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_n} j e^{ju_s} v_s + j \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial u_s} e^{ju_n} v_n + \\ & + j \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} j e^{ju_n} v_n \delta_{ns} + j \sum_{k=1}^K \frac{\partial^3 H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_k \partial u_n \partial u_s} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K M_{kl} e^{ju_l} - M_{kk} - M_{k0} e^{-ju_k} \right\} + \\ & + j^2 \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_s \partial u_n} \mu_s e^{-ju_s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^K M_{sl} e^{ju_l} - j^2 \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_k \partial u_n} \mu_k e^{-ju_k} M_{ks} e^{ju_s} (1 - \delta_{ks}) + \\ & + j^2 \frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_s \partial u_n} \mu_s M_{s0} e^{-ju_s} + j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n \partial u_s} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^K M_{nl} e^{ju_l} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -j^3 \delta_{ns} \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^K M_{nl} e^{ju_l} + j^3 (1 - \delta_{ns}) \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n} \mu_n e^{-ju_n} M_{ns} e^{ju_s} - \\
& -j^2 \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_k \partial u_s} \mu_k e^{-ju_k} M_{kn} e^{ju_n} (1 - \delta_{kn}) + j^3 \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_s} \mu_s e^{-ju_s} M_{sn} e^{ju_n} (1 - \delta_{sn}) - \\
& -j^3 \sum_{k=1}^K \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_k} \mu_k e^{-ju_k} M_{kn} e^{ju_n} (1 - \delta_{kn}) \delta_{sn} + j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n \partial u_s} \mu_n M_{n0} e^{-ju_n} - \\
& -j^3 \frac{\partial H(\mathbf{u}, \infty)}{\partial u_n} \mu_n M_{n0} e^{-ju_n} \delta_{sn} = 0, \quad n, s = \overline{1, K}.
\end{aligned}$$

Выполним в этой системе подстановку  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , с учетом (4.92)–(4.93) получаем следующую систему уравнений относительно начальных моментов второго порядка:

$$\begin{aligned}
& a'_n(0) v_s + a'_s(0) v_n - m_{sn}^{(2)} \mu_s - m_{ns}^{(2)} \mu_n + \sum_{k=1}^K m_{kn}^{(2)} \mu_k M_{ks} + \sum_{k=1}^K m_{ks}^{(2)} \mu_k M_{kn} - \\
& - m_n^{(1)} \mu_n M_{ns} - m_s^{(1)} \mu_s M_{sn} + \delta_{ns} \left\{ \lambda v_n + m_n^{(1)} \mu_n + \sum_{k=1}^K m_k^{(1)} \mu_k M_{kn} \right\} = 0, \quad n, s = \overline{1, K}.
\end{aligned}$$

С использованием матричных обозначений эту систему можно записать в виде уравнения

$$\mathbf{m}^{(2)} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{m}^{(2)} = \mathbf{C}, \quad (4.94)$$

где

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{I} - \mathbf{M}),$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}'(0)^T \mathbf{v} + [\mathbf{a}'(0)^T \mathbf{v}]^T - \text{diag} \{ \mathbf{m}^{(1)} \} \boldsymbol{\mu} \mathbf{M} - [\text{diag} \{ \mathbf{m}^{(1)} \} \boldsymbol{\mu} \mathbf{M}]^T + \text{diag} \{ \lambda \mathbf{v} + \mathbf{m}^{(1)} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{m}^{(1)} \boldsymbol{\mu} \mathbf{M} \},$$

$$\mathbf{a}'(0) = [a'_1(0), \dots, a'_K(0)].$$

Константы  $a'_k(0)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , можно найти следующим образом. Запишем (4.90) в матричном виде:

$$\mathbf{a}^*(\alpha)(\alpha \mathbf{I} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{a}^*(\alpha) \boldsymbol{\mu} \mathbf{M} + \mathbf{a}'(0) [A^*(\alpha) - 1] + \lambda A^*(\alpha) \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{a}^*(\alpha) = \{a_1^*(\alpha), \dots, a_K^*(\alpha)\}$ . Отсюда получаем следующее равенство:

$$\mathbf{a}^*(\alpha) [\alpha \mathbf{I} - \mathbf{B}] = [1 - A^*(\alpha)] \mathbf{a}'(0) - \lambda A^*(\alpha) \mathbf{v}. \quad (4.95)$$

Пусть матрица  $\mathbf{B}$  имеет только простые действительные собственные числа

$\alpha_l, l = \overline{1, K}$ . Обозначим собственный вектор этой матрицы, соответствующий  $l$ -му собственному числу через  $\mathbf{X}_l$ . Так как

$$[\alpha_l \mathbf{I} - \mathbf{B}]\mathbf{X}_l = \mathbf{0},$$

то, домножая обе части (4.95) на каждый собственный вектор  $\mathbf{X}_l$ , получаем линейную систему из  $K$  уравнений

$$\left\{ [1 - A^*(\alpha_l)] \mathbf{a}'(0) - \lambda A^*(\alpha_l) \mathbf{v} \right\} \mathbf{X}_l = 0, \quad l = \overline{1, K}$$

относительно  $K$  неизвестных компонент вектора  $\mathbf{a}'(0)$ . Запишем эту систему в матричном виде. Для этого введем следующие обозначения:  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K]$  – матрица, составленная из столбцов  $\mathbf{X}_l$ ,  $\mathbf{y}$  – вектор-строка,

составленная из элементов вида  $\frac{\lambda A^*(\alpha_l)}{1 - A^*(\alpha_l)} \mathbf{v} \mathbf{X}_l, l = \overline{1, K}$ . В итоге получаем

матричное уравнение

$$\mathbf{a}'(0)\mathbf{X} = \mathbf{y}.$$

Так как для различных собственных чисел матрица  $\mathbf{X}$  не вырождена, решение полученной системы можно записать в виде

$$\mathbf{a}'(0) = \mathbf{y}\mathbf{X}^{-1}.$$

Таким образом, найдя различные собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы  $\mathbf{B} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ , мы можем однозначно вычислить элементы вектора  $\mathbf{a}'(0)$ , подставить в (4.94) и найти значения вторых начальных моментов числа заявок в сети GI –  $(M/\infty)^K$  в стационарном режиме функционирования.

#### 4.10 Резюме

В настоящей главе была представлена серия исследований, посвященных анализу сетей обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах. Представлены методы исследования данного типа СеМО, такие как метод выделения первого скачка (п. 4.2) для анализа СеМО с входящим рекуррентным потоком, метод моментов (п. 4.9) для нахождения моментов исследуемо-

го процесса в СеМО с экспоненциальным обслуживанием и ключевой метод многомерного динамического просеивания (п. 4.3), позволяющий исследовать широкий спектр СеМО с различными типами входящих потоков и произвольным обслуживанием.

Установлено, что в условиях высокой интенсивности входящего потока стационарное распределение вероятностей числа заявок в узлах сети является многомерным гауссовским с вектором средних значений  $N\lambda\mathbf{Y}\mathbf{e}$  и матрицей ковариаций  $N[\lambda\mathbf{Y} + \kappa\mathbf{V}]$ , где выражения для величин  $\lambda$  и  $\kappa$  приведены в Таблице 1.1 для соответствующего типа входящего потока, а матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (4.24):

$$\mathbf{Y} = \text{diag} \left\{ \int_0^{\infty} W_k(t) dt \right\}, \quad \mathbf{V} = \int_0^{\infty} [\mathbf{W}(t)]^T \mathbf{W}(t) dt,$$

а вероятности  $\mathbf{W}(t) = \{W_1(t), \dots, W_K(t)\}$  по формуле (4.6):

$$\mathbf{W}(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha t} [\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha} d\alpha.$$

В п. 4.7 представлена методика расчета оптимального числа приборов для сети с конечным числом каналов в узлах. Данное исследование демонстрирует одну из возможностей применения результатов анализа моделей с неограниченным числом приборов к решению практических задач для систем с конечным числом каналов. Полученные формулы (4.57) позволяют рассчитать минимальные необходимые значения числа обслуживающих приборов в каждом узле, которые обеспечат заданный уровень информационной надежности всей СеМО с конечным числом каналов, другими словами, эти значения гарантируют, что вероятность отказа в любом узле сети не превысит заданную величину. Дальнейший анализ функционирования сети с ограниченным числом каналов при перегруженных узлах можно выполнить, например, используя подход [140].

В п. 4.8 представлены результаты асимптотического анализа третьего порядка, которые позволяют построить более точные аппроксимации стацио-

нарного распределения вероятностей числа заявок в узлах сети. Как будет показано в следующей главе, несмотря на то, что эти результаты аналитически получены в условиях высокой интенсивности входящего потока, на практике они дают достаточно малую погрешность и при невысокой интенсивности ( $N \geq 2,5$ ), что существенно расширяет область применимости асимптотических результатов, полученных в диссертации.

Результаты Главы 4 опубликованы в работах автора [91, 104, 107, 109, 112, 211, 221–224].

## **Глава 5 Численный анализ области применимости асимптотических результатов**

### **5.1 Общие вопросы численного анализа области применимости асимптотических результатов**

Основные результаты, представленные в работе, получены в асимптотическом условии высокой интенсивности входящего потока и, по сути, представляют из себя аппроксимации искомым распределений, которые применимы при условии достаточно большого значения интенсивности потока. В связи с этим возникает задача определения нижней границы области значений интенсивности потока, для которой полученные аппроксимации дают удовлетворительную погрешность (не превышающую наперед заданного значения). Аналитическое решение данной задачи не представляется возможным, так как получить «эталонное», аналитически точное, распределение, с которым можно производить такое сравнение, возможно лишь в очень частных случаях, которые не представляют интереса для изложенного в работе исследования. Таким образом, необходимо определить некоторый критерий, по которому можно оценить применимость результатов, полученных в диссертации, на практике.

Во-первых, возникает вопрос «с чем сравнивать?». Так как результатом представленных в диссертации исследований являются аппроксимации законов распределения вероятностей, то для анализа качества этих аппроксимаций требуется иметь некоторые сведения о самих распределениях. В некоторых случаях (в системах и сетях с экспоненциальным обслуживанием) удастся аналитически получить определенные характеристики искомого распределения, в частности, его начальные моменты (см. пп. 2.8, 3.7, 4.9). Таким образом, в качестве одного из критериев можно использовать погрешность моментов аппроксимации относительно моментов, вычисленных по допредельным аналитическим формулам. Результаты такого анализа для СМО и СеМО

с экспоненциальным обслуживанием представлены ниже в соответствующих разделах.

Более широкую возможность для анализа качества аппроксимаций предоставляет метод имитационного моделирования [49, 70]. С помощью этого подхода удастся моделировать реализации поведения систем конкретной конфигурации и получать статистический материал о функционировании системы, на основе которого можно не только вычислить числовые эмпирические характеристики исследуемого процесса, но и построить его эмпирическое распределение вероятностей. Специальные аналитико-имитационные методы анализа сетей обслуживания представлены, например, в [48, 50, 51].

Конечно, применение имитационного моделирования требует определенной осторожности и понимания. В частности, следует обращать особое внимание на необходимый объем получаемой выборки. Дело в том, что результаты имитационного моделирования будут полностью справедливы лишь при объеме выборки, стремящемся к бесконечности. Так как на практике мы имеем дело с конечным временем моделирования и ограниченной памятью ЭВМ, мы физически не можем получать и обрабатывать бесконечные выборки. В связи с этим возникает необходимость определения величины объема выборки, для которой погрешность эмпирических характеристик становится несущественной. С практическими аспектами определения объемов выборок для различных типов статистических задач можно познакомиться, например, в [119]. В настоящей работе при моделировании СМО и СеМО использовались выборки объема  $10^5 \cdot N$ , где  $N$ , с одной стороны – это среднее число заявок в системе или выбранном узле сети, с другой – значение параметра высокой интенсивности входящего потока (пояснение см. ниже при обсуждении вопроса о выборе параметров). Указанные объемы выборок обеспечивают выборочные среднеквадратические отклонения получаемых значений относительных частот, не превышающие 1% от значения самой частоты.

Далее, так как речь идет о сравнении законов распределения вероятностей некоторых дискретных величин, то для этого обычно применяются про-

цедуры проверки гипотез [11, 123]. Нам же видится более удобным вычисление некоторой метрики, которая могла бы количественно демонстрировать близость соответствующих распределений. В качестве такой метрики будем применять расстояние Колмогорова [123, 196], формулу для вычисления которого в общем виде можно записать следующим образом:

$$d = \sup_x |F_1(x) - F_2(x)|, \quad (5.1)$$

где  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – функции распределения сравниваемых величин. В нашем случае одна из них будет эмпирической функцией распределения, построенной на основе результатов имитационного моделирования, другая – аналитическая функция распределения для рассматриваемой аппроксимации. Так как интересующими нас результатами исследований, изложенных в Главах 1–4, являются распределения числа событий в потоке, заявок в СМО или узлах СеМО, то анализу будут подвергаться неотрицательные дискретные случайные величины. Для них формулу (5.1) можно переписать в виде

$$d = \max_{x \geq 0} \left| \sum_{i=0}^x [P_i - F_i] \right|, \quad (5.2)$$

где  $P_i, i = 0, 1, \dots$  – относительные частоты эмпирического распределения, построенного на основе имитационного моделирования,  $F_i, i = 0, 1, \dots$  – закон распределения, построенный на основе соответствующей аппроксимации.

Напомним, что перед нами стоит задача определения нижней границы области значений интенсивности потока, для которой полученные аппроксимации дают удовлетворительную погрешность. В качестве критерия для определения погрешности будем использовать расстояние Колмогорова (5.2), а в качестве «удовлетворительного» значения этой погрешности в настоящей работе выбрана величина 0,03, которую можно считать приемлемой с точки зрения математической статистики.

Несколько слов следует сказать о вычислении величин  $F_i, i = 0, 1, \dots$ . Аппроксимации, на основе которых строятся эти дискретные законы распределения, в полученных в работе результатах являются функциями распределе-

ния нормальных величин. Для получения из нормального распределения закона распределения дискретной случайной величины следует выполнить его дискретизацию и нормирование. Существует несколько способов выполнения этих процедур, в данной работе вероятности  $F_i$  вычисляются по формулам

$$F_i = \frac{1}{1 - G(-\frac{1}{2})} [G(i + \frac{1}{2}) - G(i - \frac{1}{2})]$$

для  $i = 0, 1, \dots$ , где  $G(x)$  – функция распределения нормальной случайной величины.

Теперь поговорим о процедуре оценки применимости аппроксимаций для многофазных СМО и сетей обслуживания. В этом случае результаты представляют из себя многомерные распределения, и, вообще говоря, действуя последовательно, мы должны вычислять расстояние Колмогорова, используя в формуле (5.2) многомерную точку  $\mathbf{i}$  и многократное суммирование. Однако произвести такие вычисления на практике довольно затруднительно. Действительно, если анализируемая многомерная величина содержит хотя бы 10 существенных значений по каждой компоненте, то весь диапазон существенных значений представляет из себя гиперпараллелепипед, содержащий  $10^K$  дискретных точек. Например, для сети из четырех узлов это будет  $10^4$  точек. Если предположить, что для адекватного расчета частоты одной точки достаточно выборки объемом хотя бы 10 000, получаем, что для адекватного расчета частот всех точек нам потребуется получить выборку объемом 100 млн. значений, что уже представляет определенные трудности как в моделировании, так и в статистической обработке, а вопросы выполнения вычислений на суперкомпьютерах и обработки больших данных лежат за рамками настоящего исследования. В связи с вышеизложенным, анализ области применимости результатов для многофазных СМО и СеМО будем производить на основе вычисления расстояния Колмогорова для одной фазы (узла). Принцип выбора конкретной фазы или узла для проведения анализа будет объяснен ниже.

Наконец, следует решить вопрос о выборе параметров моделируемых потоков, систем и сетей. Очевидно, что даже для такой модели, как простейший поток событий, у нас есть два вариативных параметра – это интенсивность  $\lambda$  и время  $t$  наблюдения за потоком. Для более сложных моделей потоков, систем и, тем более, сетей обслуживания количество таких параметров становится очень большим. При этом, очевидно, что для однотипных моделей, имеющих разные параметры, величина (5.2) может существенно различаться. Так как в данной работе рассматриваются модели с высокоинтенсивными входящими потоками, и в качестве параметра, характеризующего, насколько интенсивность является высокой, выступает величина  $N$  (см. Главу 1), то все остальные параметры рассматриваемых моделей будем фиксировать каким-либо понятным образом, а область применимости аппроксимаций определять путем вариации параметра  $N$ . Например, для моделей случайных потоков параметры  $\lambda$  и  $t$  зафиксируем таким образом, чтобы  $\lambda t = 1$ . Так как среднее число событий, наступивших за время  $t$  в высокоинтенсивном потоке равно  $N\lambda t$ , то в этом случае значение  $N$  будет совпадать с этой величиной, а результаты анализа, выполненные для некоторого значения  $N = N_1$ , будут справедливы во всех случаях с другими значениями параметров  $N$ ,  $\lambda$ ,  $t$ , когда  $N\lambda t = N_1$ .

Аналогичным образом для однофазных СМО будем выбирать параметры таким образом, чтобы величина  $\lambda b = 1$  (здесь  $b$  – среднее время обслуживания), чтобы значение  $N\lambda b$ , представляющее собой среднее число заявок в системе в стационарном режиме функционирования, равнялось  $N$ . Для многофазных систем и сетей будем также использовать этот принцип, причем в качестве фазы или узла для проведения сравнений будем выбирать именно тот узел, в котором среднее число заявок равно  $N$ .

Естественно, что на качество аппроксимаций будут оказывать влияние и другие параметры, связанные с типом и параметрами выбранных распределений для моделирования случайных величин для входящего потока и для времени обслуживания. Чтобы максимально охватить возможные варианты, для

целей численного анализа будем использовать в качестве таких величин случайные величины, имеющие гамма-распределение, так как с помощью вариаций параметров этого распределения можно получать законы распределения, близкие к многим другим. В настоящей работе используется двухпараметрическое гамма-распределение [63] с характеристической функцией вида

$$h(x) = \left(1 - j \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha},$$

где  $\alpha$  – параметр формы,  $\beta$  – параметр масштаба. Математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $D$  такой случайной величины равны соответственно

$$M = \frac{\alpha}{\beta}, \quad D = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

а коэффициент вариации составляет  $\eta = \frac{\sqrt{D}}{M} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ .

Следует сказать, что численный анализ результатов проводился для большого числа различных конкретных примеров, которые нет возможности представлять в данной работе в полном объеме. В последующих разделах для каждого типа потока, системы или сети приводится лишь по одному демонстрационному примеру для различных значений  $N$  при фиксированных прочих параметрах. Однако в п. 5.3.3 также представлен материал, позволяющий получить представление о влиянии коэффициента вариации распределений случайных величин, присутствующих в модели, на определение нижней границы значений параметра  $N$ , обеспечивающих удовлетворительное качество аппроксимаций.

## **5.2 Определение области применимости асимптотических результатов для высокоинтенсивных случайных потоков событий**

### **5.2.1 Рекуррентный поток**

В качестве примера выберем рекуррентный поток с гамма-распределением длин интервалов между моментами наступления событий с

параметрами

$$\alpha = 0,5, \quad \beta = N \cdot 0,5.$$

Для такого потока  $\lambda = 1$ ,  $\kappa = 3$ . Согласно (1.20), получаем, что в условиях высокой интенсивности этого потока распределение вероятностей числа событий, наступивших в нем за интервал времени длины  $t = 1$ , аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t = N$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t = 4N$ .

На Рисунке 5.1 представлено сравнение графиков эмпирического и асимптотического распределений числа событий, наступивших в указанном рекуррентном потоке за интервал длины  $t = 1$ , для различных значений  $N$  (для наглядности точки соединены линиями). Из графиков видно, что уже при  $N = 25$  эти два распределения визуально становятся достаточно близки между собой. Вычисление расстояния Колмогорова, результаты которого приведены в Таблице 5.1 и на Рисунке 5.2, говорит о том, что область применимости полученной в работе аппроксимации (1.20), начинается с  $N = 50$  (здесь и далее в таблицах жирным шрифтом выделяются значения, удовлетворяющие заданной погрешности – см. п. 5.1).

Таблица 5.1 – Расстояние Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для рекуррентного потока при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d$	0,085	0,061	0,050	0,042	0,036	<b>0,029</b>	<b>0,019</b>

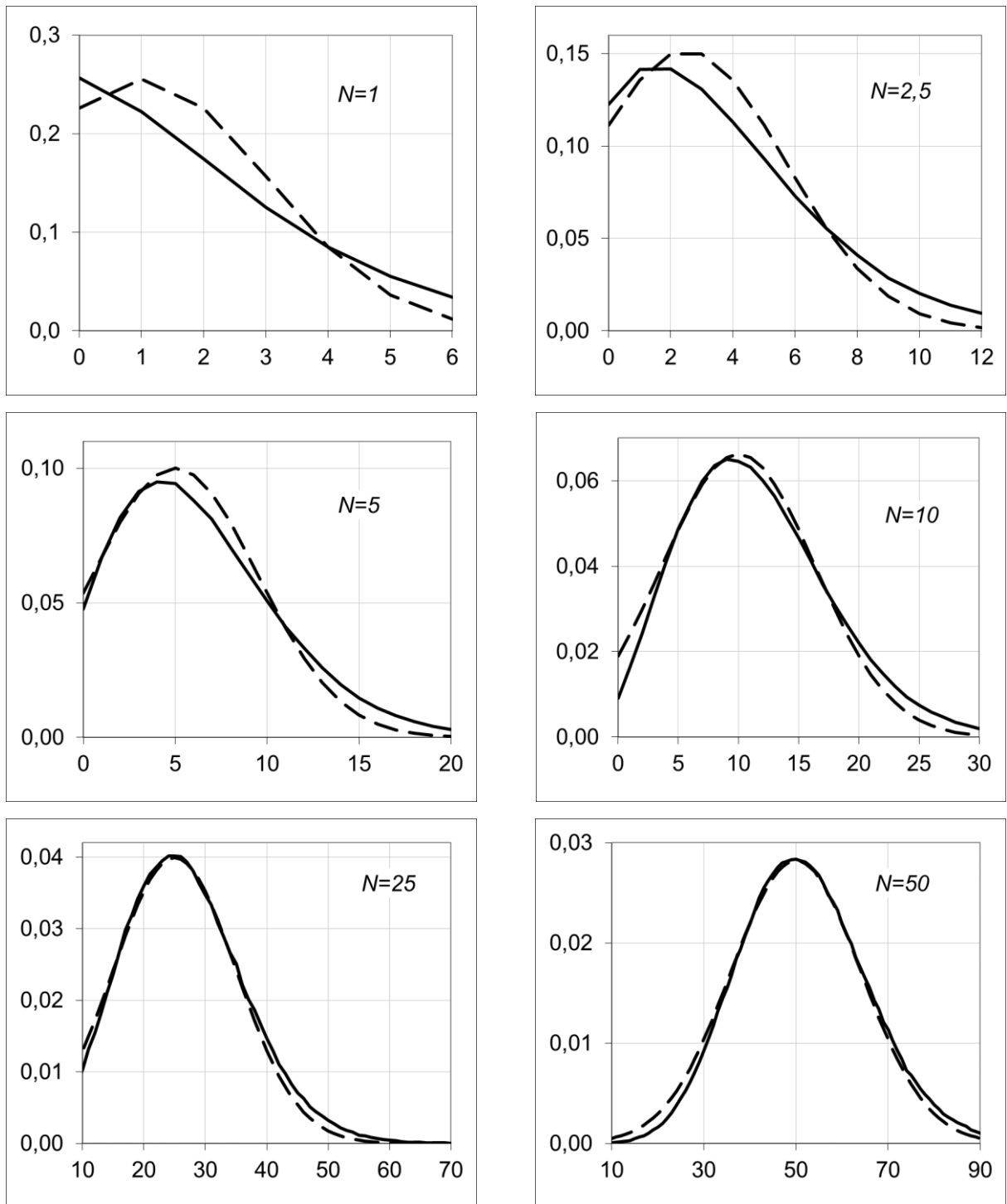


Рисунок 5.1 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений для рекуррентного потока при различных  $N$

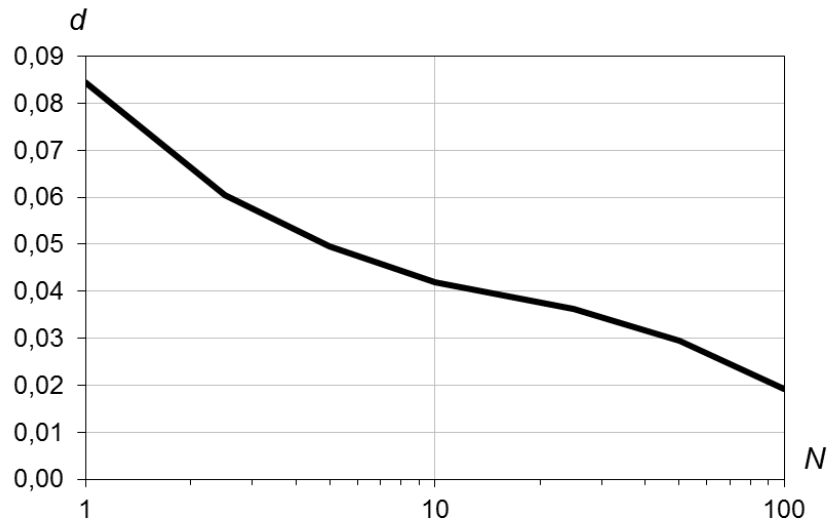


Рисунок 5.2 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для рекуррентного потока при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

### 5.2.2 MAP

В качестве примера выберем MAP-поток, заданный представлением  $(ND_0, ND_1)$ , где матрицы  $D_0$  и  $D_1$  имеют следующие значения:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -8,05 & 4,90 & 0,80 \\ 0,80 & -1,10 & 0,07 \\ 2,40 & 1,50 & -28,50 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0,05 & 2,10 & 0,20 \\ 0,00 & 0,20 & 0,03 \\ 3,60 & 1,00 & 20,00 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Для такого потока  $\lambda \approx 1$ ,  $\kappa \approx 3$ . Согласно (1.47), получаем, что в условиях высокой интенсивности этого MAP-потока распределение вероятностей числа событий, наступивших в нем за интервал времени длины  $t = 1$ , аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t \approx N$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t \approx 4 \cdot N$ .

На Рисунке 5.3 представлены графики эмпирического и асимптотического распределений вероятностей числа событий, наступивших в описанном MAP-потоке за интервал длины  $t = 1$ , для различных значений  $N$ . Из графиков можно заметить, что при  $N = 50$  эти два распределения становятся достаточно близки между собой визуально. Вычисление расстояния Колмогорова показывает, что область применимости полученной в работе аппроксимации (1.47)

действительно начинается с  $N = 50$ . Результаты для других значений  $N$  приведены в Таблице 5.2, а график представлен на Рисунке 5.4.

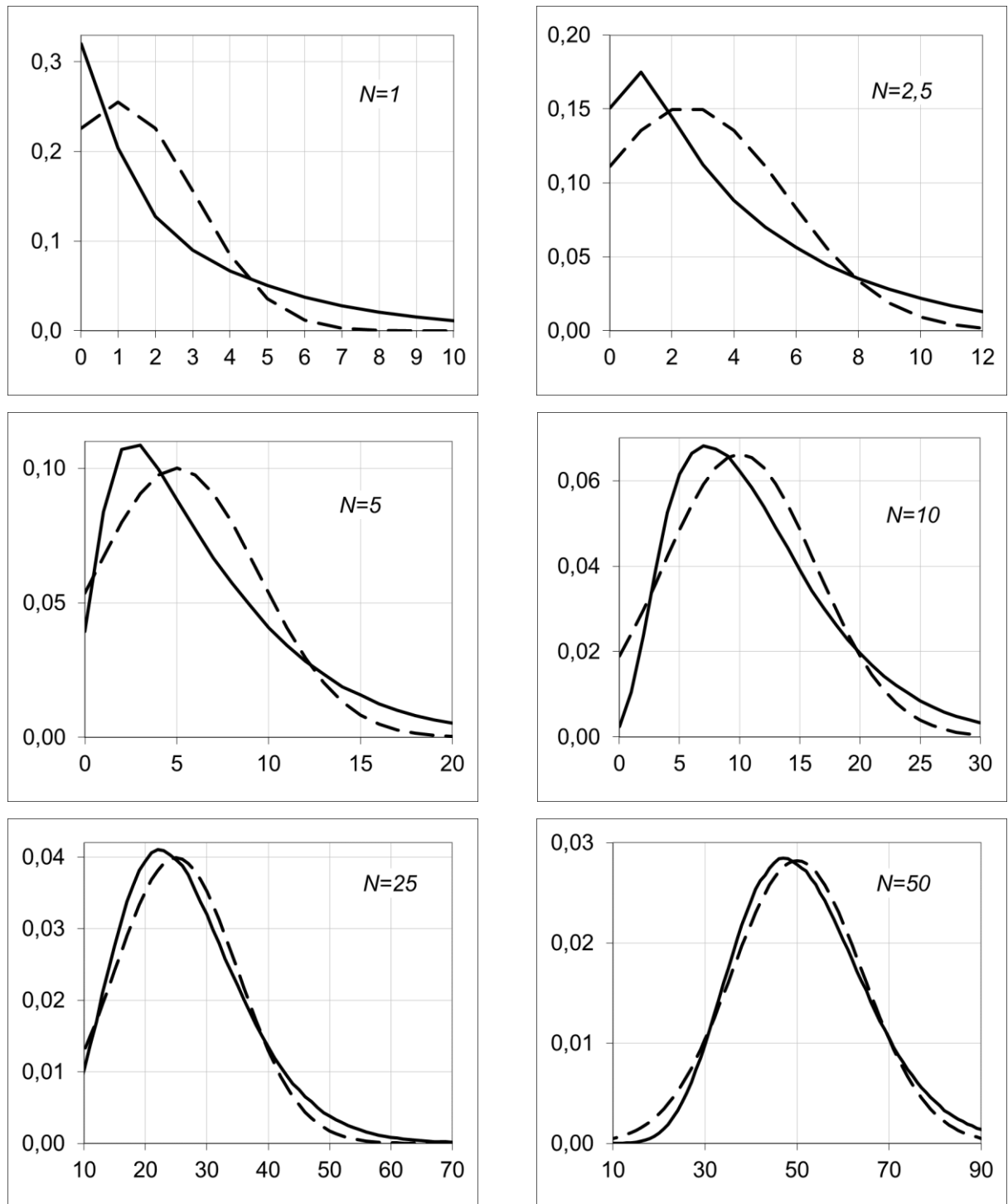


Рисунок 5.3 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений для MAP-потока при различных значениях  $N$

Таблица 5.2 – Расстояние Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для МАР-потока при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d$	0,140	0,090	0,068	0,052	0,041	<b>0,030</b>	<b>0,020</b>

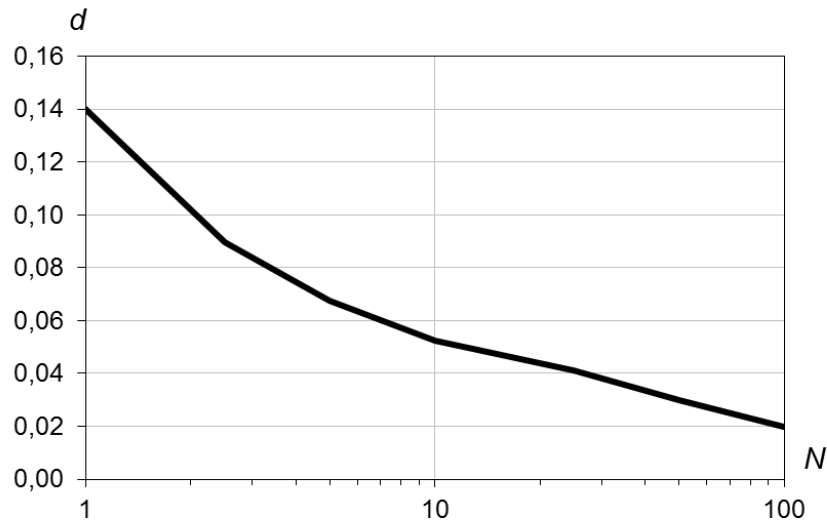


Рисунок 5.4 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для МАР-потока при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

### 5.2.3 Полумарковский поток

В качестве примера рассмотрим задачу моделирования событий в полумарковском потоке, заданном полумарковской матрицей  $\mathbf{A}(x)$  третьего порядка, записанной в форме  $\mathbf{A}(x) = \mathbf{P} \circ \mathbf{G}(x)$ , где  $\mathbf{P}$  – стохастическая матрица,  $\mathbf{G}(x)$  – матрица, составленная из некоторых функций распределения, а операция « $\circ$ » есть адамарово (поэлементное) произведение матриц. Выберем в качестве элементов матрицы  $\mathbf{G}(x)$  функции распределения гамма-величин с параметрами формы  $\alpha_{kv}$  и масштаба  $N\beta_{kv}$ ,  $k, v = \overline{1,3}$ . Значения параметров  $\alpha_{kv}$  и  $\beta_{kv}$  запишем в виде матриц  $\mathbf{\alpha}$  и  $\mathbf{\beta}$  соответственно. Зафиксируем следующие конкретные значения указанных параметров:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\alpha} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 1,5 \\ 0,3 & 1,5 & 3,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\beta} = N \cdot \begin{pmatrix} 2,5 & 0,8 & 3,0 \\ 1,5 & 1,5 & 3,0 \\ 0,1 & 1,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

По формулам Таблицы 1.1 для такого полумарковского потока получаем  $\lambda \approx 1$ ,  $\kappa \approx 3$ . Согласно (1.75), в условиях высокой интенсивности этого потока распределение вероятностей числа событий, наступивших в нем за интервал времени длины  $t = 1$ , аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N\lambda t \approx N$  и дисперсией  $N(\lambda + \kappa)t \approx 4 \cdot N$ .

На Рисунке 5.5 представлены графики эмпирического и асимптотического распределений вероятностей числа событий, наступивших в описанном полумарковском потоке за интервал длины  $t = 1$ , для различных значений  $N$ . Из графиков также можно заметить, что уже при  $N = 25$  эти два распределения достаточно близки между собой визуально. Вычисление расстояния Колмогорова, результаты которого приведены в Таблице 5.3 и представлены в виде графика на Рисунке 5.6, говорят о том, что область применимости полученной в работе аппроксимации (1.75) начинается с  $N = 50$ .

Таблица 5.3 – Расстояние Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для полумарковского потока при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d$	0,057	0,088	0,042	0,040	0,037	<b>0,029</b>	<b>0,026</b>

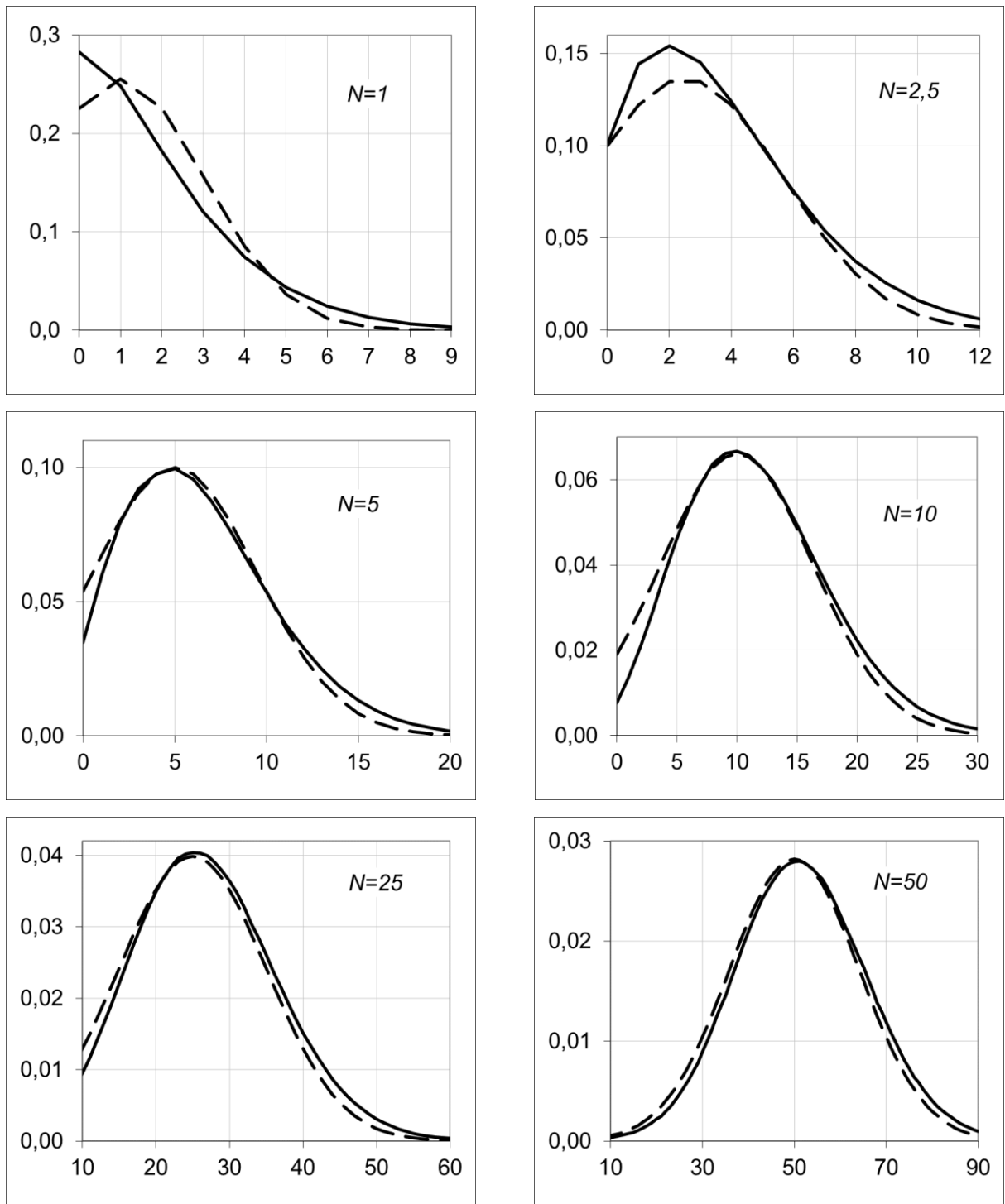


Рисунок 5.5 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений для МАР-потока при различных значениях  $N$

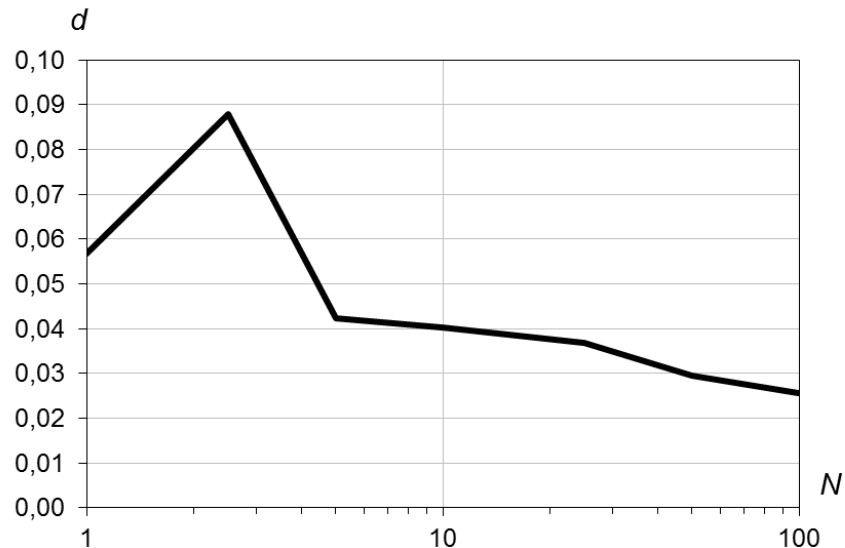


Рисунок 5.6 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для полумарковского потока при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

### 5.3 Область применимости асимптотических результатов для однофазных СМО

#### 5.3.1 СМО с обслуживанием фазового типа

Анализ области применимости найденной в п. 2.1 гауссовской аппроксимации произведем путем сравнения моментов первого и второго порядков для асимптотического и допредельного распределений числа заявок в системе  $GI/PH/\infty$ .

Очевидно, что соответствующие первые моменты (2.11) и (2.27) этих распределений полностью совпадают. Таким образом, анализ области применимости проведем на примере сравнения численных значений дисперсий этих распределений. В Таблице 5.4 приведены относительные погрешности асимптотической дисперсии (2.22) по отношению к допредельной (2.32). Расчеты выполнены для функции  $A(x)$ , соответствующей гамма-распределению с различными коэффициентами вариации  $\eta$ . Коэффициент вариации для времени обслуживания зафиксирован и равен 0,636.

Таблица 5.4 – Относительная погрешность дисперсии гауссовской аппроксимации по отношению к допредельной для системы GI/PH/∞ при различных значениях  $N$  и вариации длин интервалов входящего потока  $\eta$

$\eta \backslash N$	1	5	10	20	30	50	100
5	27,4%	16,0%	11,2%	7,1%	5,1%	<b>3,3%</b>	<b>1,7%</b>
2,5	16,0%	6,5%	<b>3,7%</b>	<b>1,9%</b>	<b>1,3%</b>	<b>0,7%</b>	<b>0,4%</b>
1	<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>0%</b>
0,5	8,4%	<b>1,6%</b>	<b>0,8%</b>	<b>0,4%</b>	<b>0,3%</b>	<b>0,2%</b>	<b>0,1%</b>
0,2	12,2%	<b>2,3%</b>	<b>1,1%</b>	<b>0,6%</b>	<b>0,4%</b>	<b>0,2%</b>	<b>0,1%</b>
0,01	13,1%	<b>2,4%</b>	<b>1,2%</b>	<b>0,6%</b>	<b>0,4%</b>	<b>0,2%</b>	<b>0,1%</b>

Из таблицы видно, что при коэффициенте вариации  $\eta = 1$ , то есть при входящем простейшем потоке, асимптотические формулы дают точный результат. Если принять в качестве допустимой относительной погрешности 5%, то асимптотические результаты можно считать приемлемыми при  $N > 30$  для коэффициента вариации  $\eta > 1$  и при  $N \geq 5$  – для  $\eta < 1$ .

### 5.3.2 Сравнение начальных моментов для СМО с экспоненциальным обслуживанием

Выполним сравнение моментов аппроксимации (2.47), полученной методом асимптотического анализа для системы GI/GI/∞, с результатами, полученными в допредельной ситуации в п. 2.8 (формулы (2.152) и (2.154)–(2.155)).

Для случая экспоненциального времени обслуживания с параметром  $\mu$  по формулам (2.46) и (2.48) получаем

$$b = \frac{1}{\mu}, \quad \beta = \frac{1}{2\mu}.$$

Очевидно, в этом случае выражения для первых моментов полностью совпадают. Более того, в случае простейшего входящего потока совпадают и дисперсии – в этом случае параметр  $k$  из (2.42) равен нулю.

Для произвольного же распределения длин интервалов во входящем ре-

куррентном потоке произвести сравнение выражений для дисперсии аналитически не представляется возможным. Поэтому для определения качества оценки гауссовской аппроксимации для дисперсии числа заявок в системе в стационарном режиме выполним анализ результатов численных расчетов.

В Таблице 5.5 приведены значения дисперсий, вычисленных на основе формул (2.154)–(2.155) и (2.47), а также значение относительной погрешности оценки дисперсии, полученной на основе гауссовской аппроксимации, для случая, когда длины интервалов во входящем потоке имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = N\alpha$ , где величина  $N$  определяет интенсивность потока.

Таблица 5.5 – Относительная погрешность  $\delta$  дисперсии гауссовской аппроксимации по отношению к допредельной для системы GI/M/ $\infty$  при различных значениях  $N$

$N$	1	5	10	20	50	100
$\delta$	9,8%	<b>2,9%</b>	<b>1,5%</b>	<b>0,8%</b>	<b>0,3%</b>	<b>0,2%</b>

Из таблицы видно, что при интенсивности  $N \geq 5$  погрешность дисперсии гауссовской аппроксимации (2.47) не превышает 3%, а при  $N \geq 20$  составляет менее 1%.

### 5.3.3 Анализ области применимости асимптотических результатов для СМО с рекуррентным входящим потоком

При анализе области применимости асимптотического результата (2.47) для распределения вероятностей числа заявок в системе в стационарном режиме следует учитывать, что на качество аппроксимации при фиксированных значениях  $\lambda = b = 1$  (см. п. 5.1) влияет не только уровень высокой интенсивности входящего потока  $N$ , но и такие параметры, как коэффициенты вариации для длин интервалов между заявками входящего потока и для времени обслуживания. Ниже представлен численный анализ влияния значений этих параметров на область применимости, а во всех последующих разделах приво-

дится всего по одному примеру для фиксированных значений указанных коэффициентов вариации, так как общий характер влияния этих параметров в различных моделях сохраняется.

**Зависимость области применимости от коэффициента вариации длин интервалов во входящем потоке.** Итак, рассмотрим СМО вида  $GI/GI/\infty$ , в которой длины интервалов между последовательным поступлением заявок являются гамма-величинами с параметрами  $\alpha = \frac{1}{\eta^2}$ ,  $\beta = N\alpha$ , где  $\eta$  – коэффициент вариации указанных величин (при  $N = 1$ ), для которого мы будем брать различные значения. Интенсивность такого потока равна  $N$ . Время обслуживания одной заявки в системе зададим в виде случайной величины, имеющей гамма-распределение с параметрами  $\alpha = 0,25$  и  $\beta = 0,25$ . Таким образом, среднее время обслуживания  $b = 1$ , а коэффициент вариации длительности обслуживания составляет 2.

Таблица 5.6 – Расстояние Колмогорова между гауссовской аппроксимацией и эмпирическим распределением для системы  $GI/GI/\infty$  при различных значениях интенсивности  $N$  и коэффициента вариации длин интервалов во входящем потоке  $\eta$

$N \backslash \eta$	1	2,5	5	10	25	50	100
10	0,674	0,437	0,455	0,349	0,205	0,114	0,059
5	0,455	0,328	0,234	0,148	0,064	0,035	<b>0,030</b>
2	0,194	0,111	0,065	0,037	<b>0,023</b>	<b>0,018</b>	<b>0,012</b>
1	0,107	0,060	0,031	<b>0,022</b>	<b>0,019</b>	<b>0,010</b>	<b>0,006</b>
0,5	0,080	0,044	<b>0,025</b>	<b>0,015</b>	<b>0,014</b>	<b>0,008</b>	<b>0,005</b>
0,1	0,075	0,037	<b>0,021</b>	<b>0,014</b>	<b>0,012</b>	<b>0,007</b>	<b>0,004</b>

В Таблице 5.6 представлены значения расстояния Колмогорова  $d$  (5.2) между гауссовской аппроксимацией (2.47) числа заявок в системе и эмпирическим распределением, построенным на основе имитационного моделирования соответствующих моделей. Жирным шрифтом выделены значения, удо-

влетворяющие критерию  $d \leq 0,03$ . Из таблицы видно, что при значениях  $\eta \leq 1$  гауссовская аппроксимация применима уже при  $N \geq 10$  и даже для меньших значений  $N$  для  $\eta \leq 0,5$ . При увеличении коэффициента вариации  $\eta$  область применимости асимптотических результатов сужается.

**Зависимость области применимости от коэффициента вариации длительности обслуживания заявки.** Рассмотрим теперь СМО вида GI/GI/ $\infty$ , в которой длины интервалов между последовательным поступлением заявок являются гамма-величинами с параметрами  $\alpha = 0,25$  и  $\beta = N\alpha$ . Интенсивность такого потока равна  $N$ , а коэффициент вариации длин интервалов при  $N = 1$  равен 2. Время обслуживания одной заявки в системе зададим в виде случайной величины, имеющей гамма-распределение с параметрами  $\alpha = \beta = \frac{1}{\eta^2}$ , где  $\eta$  – коэффициент вариации данной величины, для которого мы будем брать различные значения. В этом случае среднее время обслуживания  $b = 1$ .

В Таблице 5.7 представлены значения расстояния Колмогорова  $d$  (5.2) между гауссовской аппроксимацией (2.47) числа заявок в системе и эмпирическим распределением, построенным на основе имитационного моделирования соответствующих моделей, при различных значениях  $N$  и  $\eta$ . Жирным шрифтом выделены значения, удовлетворяющие критерию  $d \leq 0,03$ . Из таблицы видно, что изменение значения коэффициента вариации длительности обслуживания имеет эффект, обратный по отношению к изменению значения коэффициента вариации длин интервалов между последовательными событиями входящего потока: при увеличении коэффициента вариации длительности обслуживания область применимости асимптотических результатов расширяется. На основе Таблицы 5.7 можно сделать вывод о том, что гауссовская аппроксимация (2.47) применима при  $N \geq 25$ , а при  $\eta \geq 10$  – и при меньших значениях интенсивности входящего потока ( $N = 5$ ).

Таблица 5.7 – Расстояние Колмогорова между гауссовской аппроксимацией и эмпирическим распределением для системы GI/GI/∞ при различных значениях интенсивности входящего потока  $N$  и коэффициента вариации длительности обслуживания  $\eta$

$N \backslash \eta$	1	2,5	5	10	25	50	100
10	0,110	0,058	<b>0,027</b>	<b>0,025</b>	<b>0,014</b>	<b>0,010</b>	<b>0,009</b>
5	0,130	0,068	0,037	0,032	<b>0,021</b>	<b>0,014</b>	<b>0,009</b>
2	0,194	0,111	0,065	0,037	<b>0,023</b>	<b>0,018</b>	<b>0,012</b>
1	0,271	0,158	0,096	0,054	<b>0,024</b>	<b>0,020</b>	<b>0,013</b>
0,5	0,328	0,201	0,119	0,060	<b>0,025</b>	<b>0,021</b>	<b>0,014</b>
0,1	0,373	0,232	0,137	0,070	<b>0,026</b>	<b>0,022</b>	<b>0,014</b>

**Сравнение областей применимости аппроксимаций второго и третьего порядков.** В пп. 2.2 и 2.4 получена гауссовская аппроксимация (2.47) характеристической функции числа заявок в СМО GI/GI/∞ в стационарном режиме, которую в дальнейшем будем называть аппроксимацией второго порядка. В п. 2.7.1 для этой функции получена аппроксимация (2.123), которую будем называть аппроксимацией третьего порядка. Ниже представлен сравнительный анализ этих аппроксимаций, выполненный на основе вычисления расстояния Колмогорова от соответствующих распределений вероятностей для каждой из них до эмпирической функции распределения, построенной на основе результатов имитационного моделирования.

На Рисунке 5.7 представлено сравнение графиков эмпирического распределения и аппроксимаций второго и третьего порядков распределений вероятностей числа заявок в системе GI/GI/∞ в стационарном режиме для случая, когда коэффициенты вариации длин интервалов входящего потока и продолжительности обслуживания равны 2, при различных значениях параметра высокой интенсивности входящего потока  $N$ .

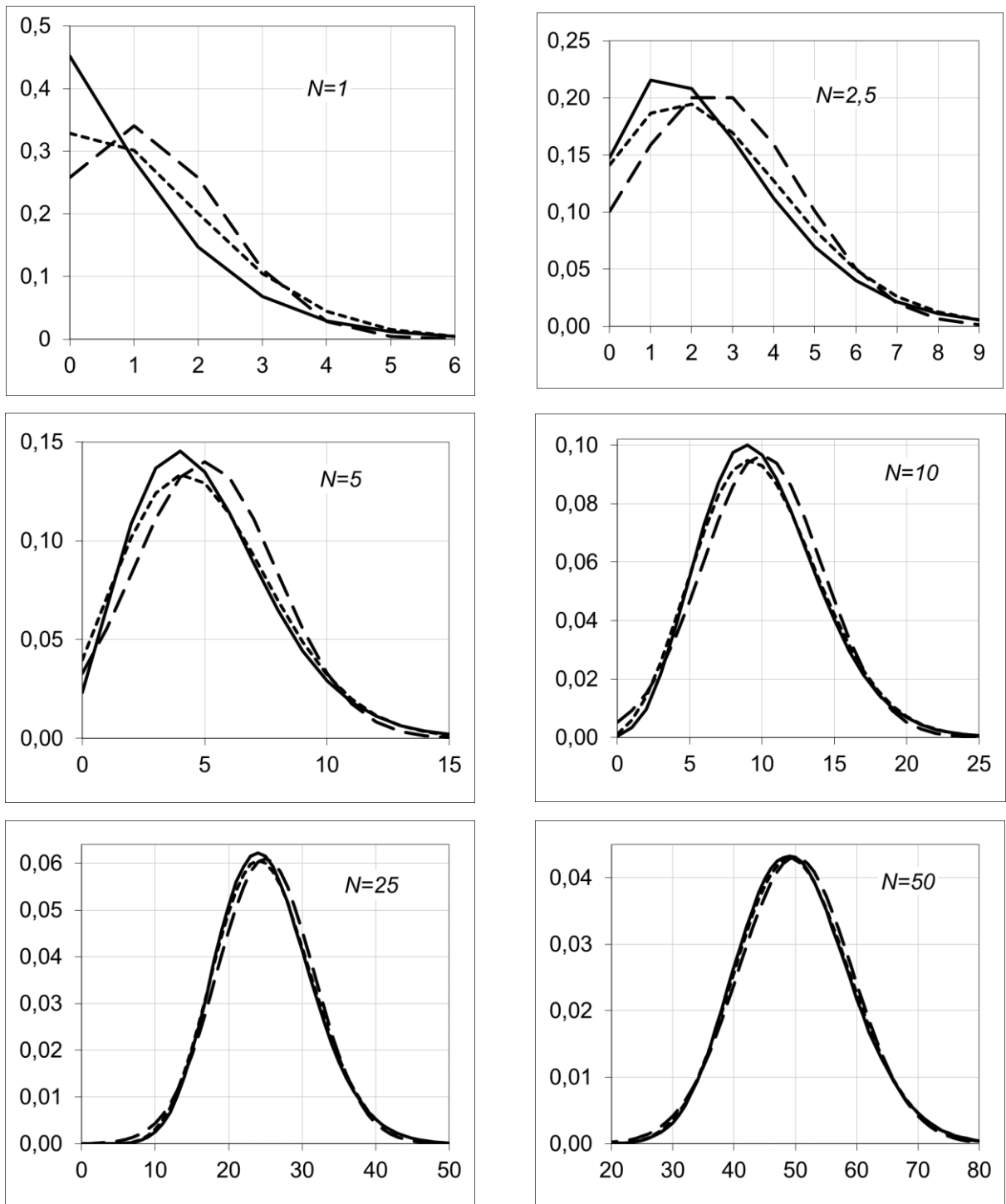


Рисунок 5.7 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотических распределений второго (пунктирная линия) и третьего (точечная линия) порядков для системы  $GI/GI/\infty$  при различных  $N$

Из графиков видно, что гауссовская аппроксимация становится визуально достаточно близка к эмпирическому распределению при  $N \geq 25$ , в то время как аппроксимация третьего порядка достигает этого эффекта уже при  $N = 5$ .

Вычисление расстояния Колмогорова (Таблицах 5.8) показывает, что область применимости гауссовской аппроксимации (2.47) при выбранных параметрах действительно начинается с  $N = 25$ , а область применимости аппроксимации третьего порядка – со значения  $N = 5$ . На Рисунке 5.8 представлен график изменения расстояния Колмогорова для обеих аппроксимаций в зависимости от значения  $N$ .

Таблица 5.8 – Расстояния Колмогорова  $d_2$  и  $d_3$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго и третьего порядков для системы GI/GI/ $\infty$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d_2$	0,194	0,111	0,065	0,037	<b>0,023</b>	<b>0,018</b>	<b>0,012</b>
$d_3$	0,123	0,049	<b>0,027</b>	<b>0,015</b>	<b>0,012</b>	<b>0,009</b>	<b>0,008</b>

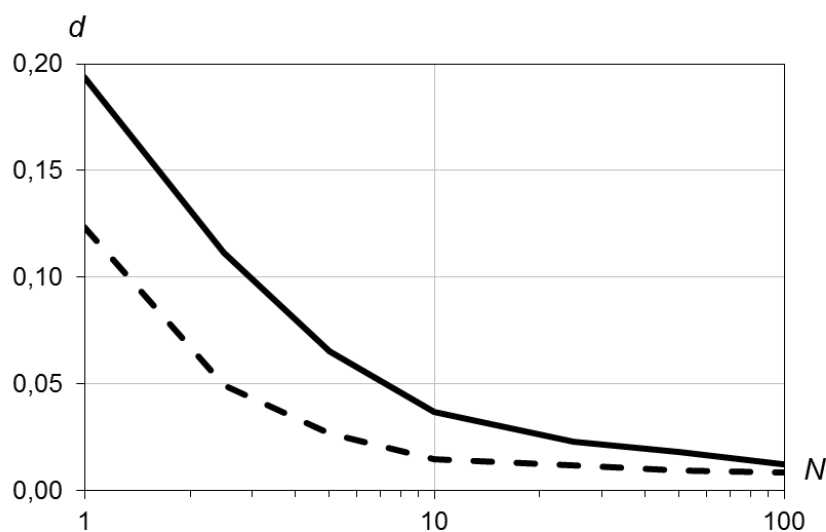


Рисунок 5.8 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) порядков для системы GI/GI/ $\infty$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

### 5.3.4 Система MAP/GI/ $\infty$

Демонстрацию точности аппроксимаций второго (2.85) и третьего (2.132) порядков для системы MAP/GI/ $\infty$  проведем на примере входящего MAP-

потока, заданного представлением  $(ND_0, ND_1)$ , где матрицы  $D_0$  и  $D_1$  определяются выражениями (5.3). Длительность обслуживания является случайной величиной, имеющей гамма-распределение с параметрами масштаба и формы равными 0,25. Таким образом, среднее время обслуживания равно 1, а коэффициент вариации длительности обслуживания равен 2.

На Рисунке 5.9 представлены графики законов распределения вероятностей для эмпирического распределения, составленного на основе результатов имитационного моделирования, и распределений, полученных на основе аппроксимаций второго (2.85) и третьего (2.132) порядков. Из графиков видно, что при  $N \geq 10$  аппроксимация третьего порядка визуально достаточно близка к эмпирическому распределению, для аппроксимации второго порядка этот эффект достигается только при  $N \geq 25$ . И действительно, на основе данных из Таблицы 5.9 видно, что область применимости гауссовской аппроксимации (2.85) составляет  $N \geq 25$ , в то время как аппроксимация третьего порядка расширяет ее до  $N \geq 10$ . На Рисунке 5.10 представлен график изменения расстояния Колмогорова в зависимости от значения  $N$  для системы с указанными параметрами.

Таблица 5.9 – Расстояния Колмогорова  $d_2$  и  $d_3$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго и третьего порядков для системы MAF/GI/ $\infty$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d_2$	0,198	0,130	0,082	0,050	<b>0,030</b>	<b>0,018</b>	<b>0,018</b>
$d_3$	0,203	0,069	0,034	<b>0,021</b>	<b>0,012</b>	<b>0,007</b>	<b>0,006</b>

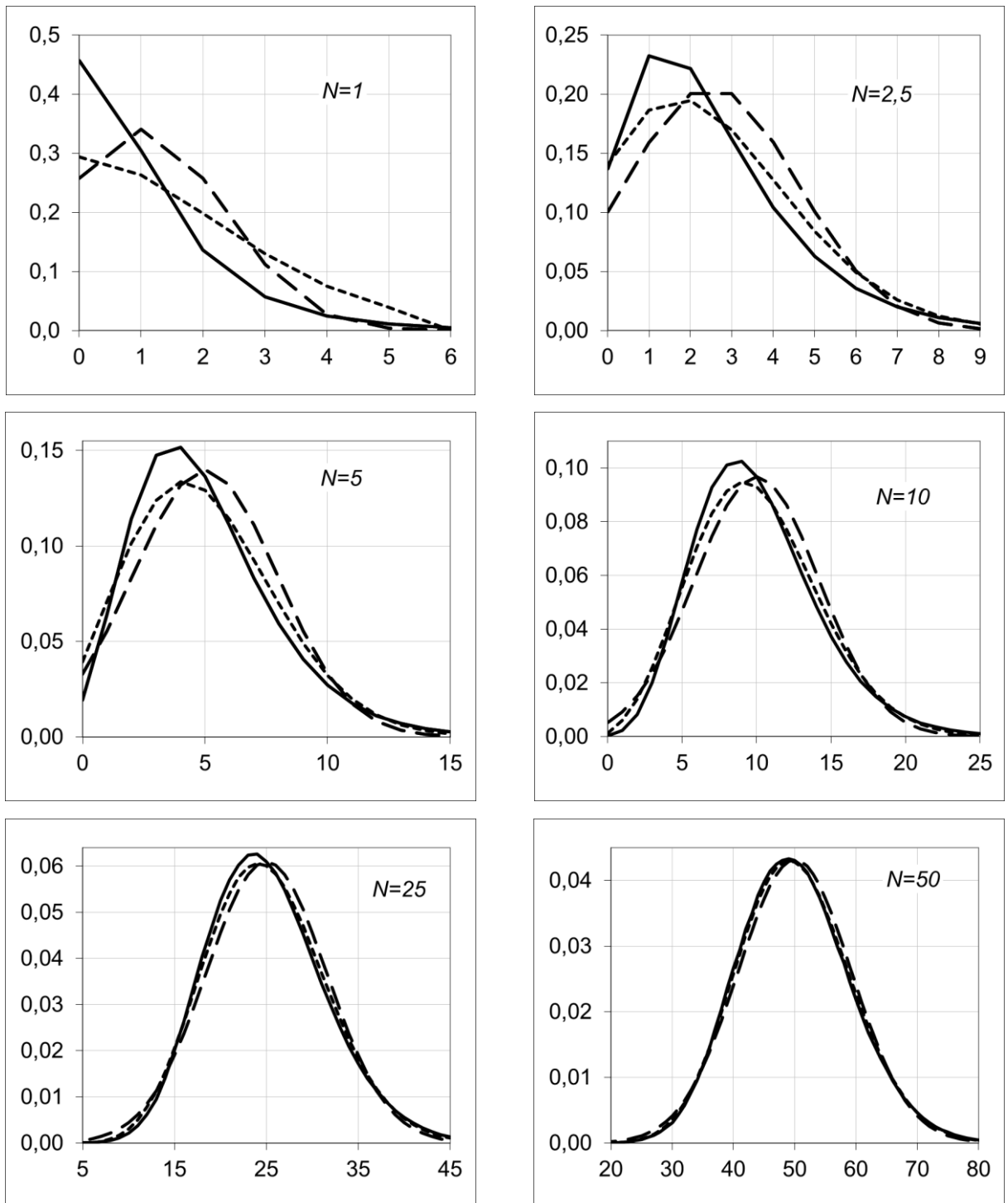


Рисунок 5.9 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) распределения с асимптотическими второго (пунктирная линия) и третьего (точечная линия) порядков для системы MAP/GI/ $\infty$  при различных  $N$

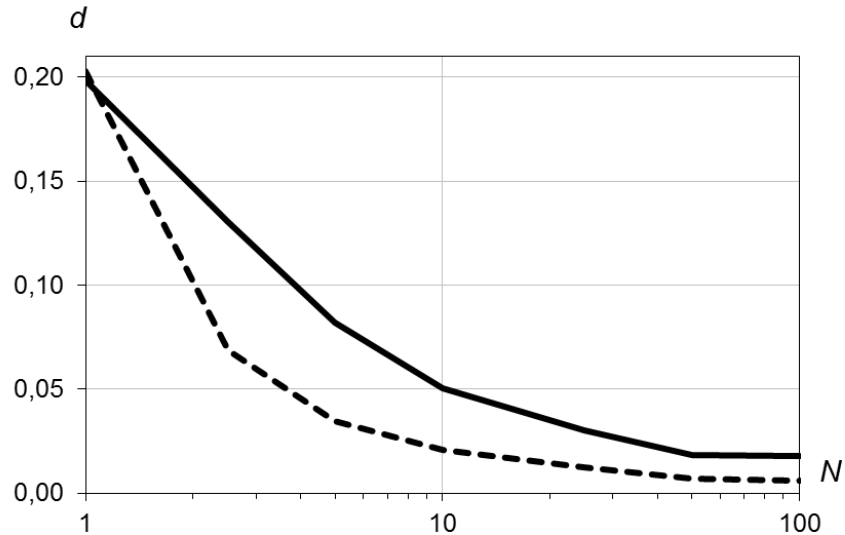


Рисунок 5.10 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) порядков для системы  $MAP/GI/\infty$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

### 5.3.5 Система $SM/GI/\infty$

Для анализа области применимости гауссовской аппроксимации (2.105) и аппроксимации третьего порядка (2.149) распределения вероятностей числа заявок в системе  $SM/GI/\infty$  в стационарном режиме функционирования в качестве параметров входящего полумарковского потока заявок выберем параметры, описанные в п. 5.2.3. Время обслуживания зададим так же, как и в предыдущих разделах (гамма-распределение с параметрами  $\alpha = \beta = 0,25$ ).

На Рисунке 5.11 представлено сравнение графиков эмпирического и асимптотических распределений числа заявок в системе  $SM/GI/\infty$ . Из графиков видно, что гауссовская аппроксимация становится достаточно близка визуально к эмпирическому распределению при  $N = 25$ . Для аппроксимации третьего порядка этот эффект достигается уже при  $N = 5$ . Результаты вычисления расстояния Колмогорова, представленные в Таблице 5.10, показывают, что область применимости аппроксимации второго порядка (2.105) при выбранных параметрах действительно начинается с  $N = 25$ , а аппроксимации третьего порядка (2.149) – со значения  $N = 5$ . На Рисунке 5.12 представлены

графики изменения расстояния Колмогорова для этих аппроксимаций с ростом значения  $N$ .

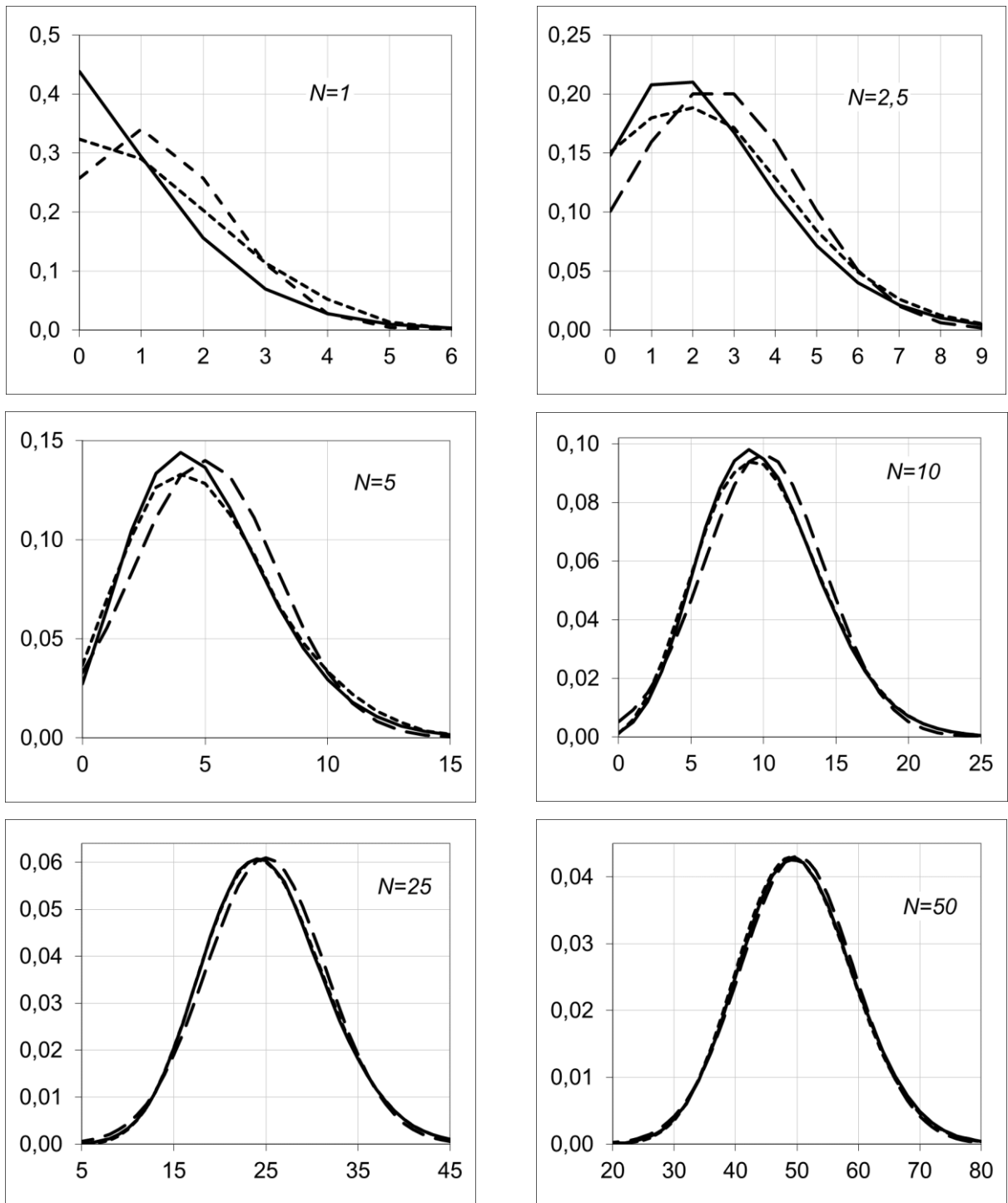


Рисунок 5.11 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) с асимптотическими распределениями второго (пунктирная линия) и третьего (точечная линия) порядков для распределения числа заявок в системе  $SM/GI/\infty$

Таблица 5.10 – Расстояния Колмогорова  $d_2$  и  $d_3$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго и третьего порядков для системы  $SM/GI/\infty$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d_2$	0,181	0,106	0,060	0,033	<b>0,022</b>	<b>0,010</b>	<b>0,009</b>
$d_3$	0,118	0,047	<b>0,018</b>	<b>0,015</b>	<b>0,009</b>	<b>0,008</b>	<b>0,008</b>

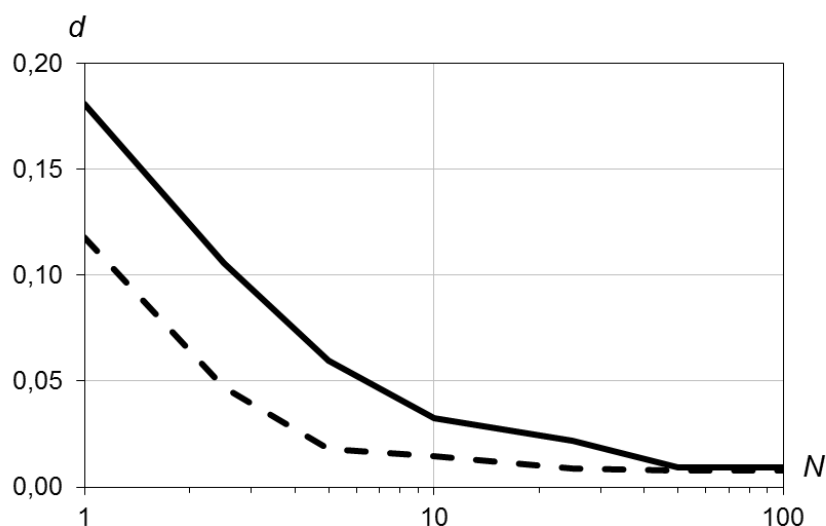


Рисунок 5.12 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) порядков для системы  $SM/GI/\infty$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

## 5.4 Область применимости асимптотических результатов для многофазных СМО

### 5.4.1 Сравнение моментов для многофазной системы с экспоненциальным обслуживанием

В п. 3.2 показано, что в условиях высокой интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей состояний многофазной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком и произвольным распределением времени обслуживания на фазах в стационарном режиме функционирования аппроксимируется многомерным гауссовским распределением со следующими параметрами. Компоненты вектора средних

этого распределения равны

$$m_k = N\lambda b_k, \quad (5.4)$$

где  $b_k$  – среднее время обслуживания на  $k$ -ой фазе системы. Значения дисперсий  $D_k$  и ковариаций  $R_{kl}$  определяются выражениями

$$D_k = N \left\{ \lambda b_k + \kappa \int_0^{\infty} [B_k^*(t) - B_{k-1}^*(t)]^2 dt \right\}, \quad (5.5)$$

$$R_{kl} = N\kappa \int_0^{\infty} [B_k^*(t) - B_{k-1}^*(t)][B_l^*(t) - B_{l-1}^*(t)] dt. \quad (5.6)$$

Выполним сравнение полученных в п. 3.7 допредельных результатов с результатами асимптотической гауссовской аппроксимации для многофазной системы с экспоненциальным распределением времени обслуживания. Очевидно, что в этом случае формулы для средних (3.81) и (5.4) дают одинаковый результат.

Произвести сравнение выражений для вторых моментов (3.83) и (5.5)–(5.6) в аналитической форме не представляется возможным. Поэтому оценим погрешности значений асимптотических вторых моментов по сравнению с допредельными, выполнив численные реализации. Для этого рассмотрим четырёхфазную систему массового обслуживания с входящим рекуррентным потоком, длины интервалов между последовательными поступлениями заявок в котором имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба соответственно равными  $\alpha$  (его значение определим позже) и  $\beta = N \cdot \alpha$ . Для такого потока интенсивность составляет  $N$ . Длительность обслуживания на каждой фазе системы распределена по экспоненциальному закону с соответствующим параметром  $\mu_k$ :

$$\mu_1 = 0,5, \quad \mu_2 = 1,0, \quad \mu_3 = 2,0, \quad \mu_4 = 4,0,$$

где  $k$  – номер фазы.

Численные расчеты по формулам (3.83), (5.5), (5.6), показывают, что для параметра формы  $\alpha > 0,4$  относительная погрешность асимптотических вторых моментов не превышает 2% даже для входящего потока низкой интен-

сивности ( $N = 1$ ). При уменьшении параметра  $\alpha$  погрешность асимптотических вторых моментов сильно увеличивается при низкой интенсивности входящего потока. В Таблице 5.11 приведены максимальные значения относительной погрешности вычисления вторых моментов по аппроксимационным формулам (5.5)–(5.6) для входящего потока с параметрами  $\alpha = 0,1$  и  $\alpha = 0,01$  (жирным шрифтом выделены допустимые значения, когда относительная погрешность не превышает 5%).

Таблица 5.11 – Динамика изменения погрешности аппроксимационных формул для вторых моментов при увеличении интенсивности входящего потока

Интенсивность входящего потока, $N$	1	5	10	20	50	100
Относительная погрешность при $\alpha = 0,1$	21,1%	<b>3,7%</b>	<b>1,3%</b>	<b>0,4%</b>	<b>0,1%</b>	<b>менее 0,1%</b>
Относительная погрешность при $\alpha = 0,01$	102,6%	43,8%	25,6%	13,0%	<b>4,1%</b>	<b>1,5%</b>

#### 5.4.2 Анализ области применимости для многофазной системы $GI/(GI/\infty)^K$

В качестве примера рассмотрим многофазную СМО с рекуррентным входящим потоком, в котором длины интервалов между последовательными моментами поступления заявок имеют гамма-распределение с параметрами  $\alpha = 0,25$  и  $\beta = N\alpha$ . Длительности обслуживания на фазах системы также имеют гамма-распределение, параметры которого приведены в Таблице 5.12.

Для демонстрации результатов сравнения будем анализировать число заявок на второй фазе рассматриваемой СМО, для которой среднее число заявок в стационарном режиме функционирования составляет  $m_2 = N$ . Таким образом, приведенные результаты определения области применимости аппроксимации (3.20) будет удобно интерпретировать и для других значений среднего числа заявок на фазе  $m_k = N\lambda b_k$ .

Таблица 5.12 – Параметры гамма-распределения продолжительности обслуживания на фазах системы

Номер фазы	1	2	3	4
Параметр формы	0,25	0,25	1,50	4,00
Параметр масштаба	0,50	0,25	3,00	2,00

На Рисунке 5.13 представлено сравнение графиков эмпирического и асимптотического распределений числа заявок на второй фазе рассматриваемой системы. Из графиков видно, что уже при  $N = 25$  эти два распределения визуально становятся достаточно близки между собой. Вычисление расстояния Колмогорова показывает, что область применимости полученной в работе аппроксимации (3.20) при выбранных параметрах действительно начинается с  $N = 25$ . Значения расстояния Колмогорова для других  $N$  представлены в Таблице 5.13 и в виде графика на Рисунке 5.14.

Таблица 5.13 – Расстояние Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями числа заявок на второй фазе системы  $GI/(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d$	0,178	0,096	0,056	0,033	<b>0,022</b>	<b>0,016</b>	<b>0,015</b>

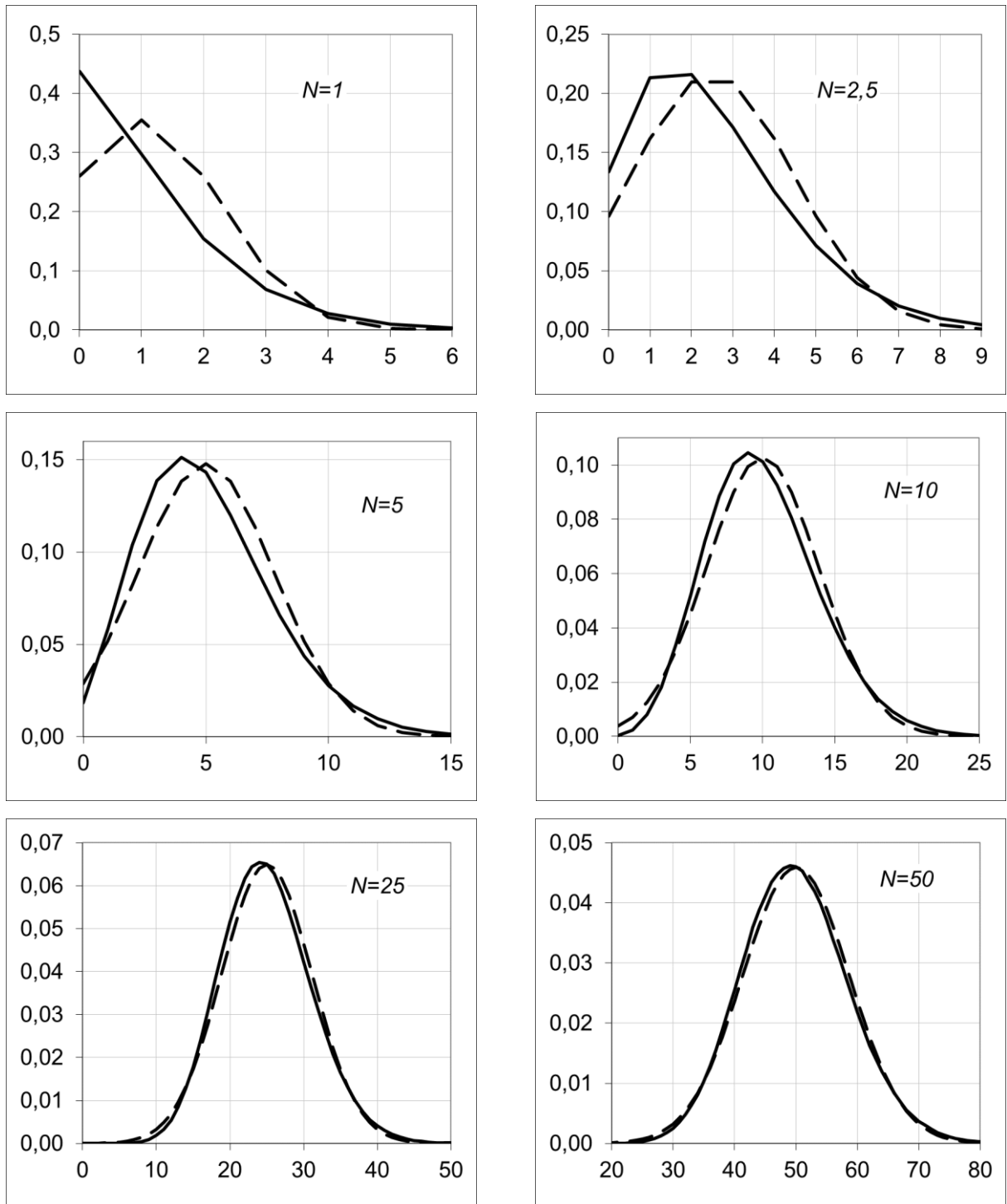


Рисунок 5.13 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений для числа заявок на второй фазе системы  $GI/(GI/\infty)^K$  при различных  $N$

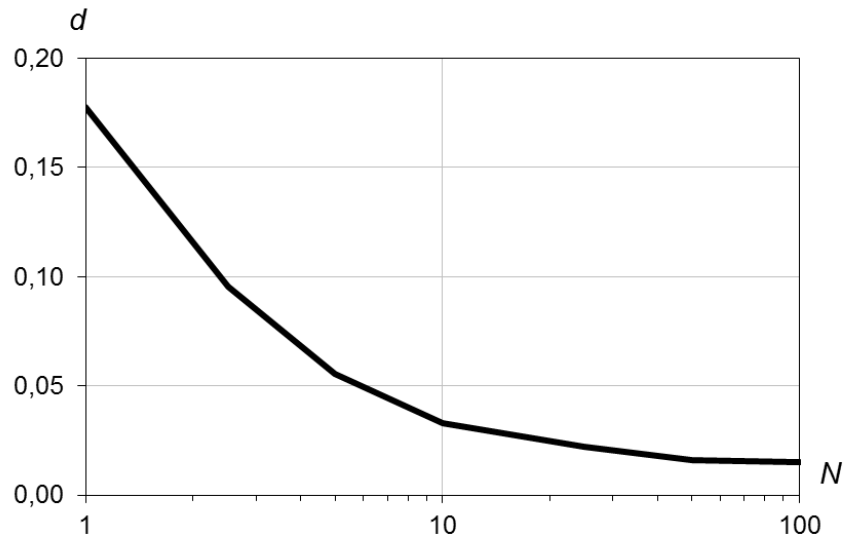


Рисунок 5.14 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для второй фазы системы  $GI/(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

#### 5.4.3 Система $MAP/(GI/\infty)^K$

Определение области применимости гауссовской аппроксимации, полученной в п. 3.5, проведем на примере многофазной СМО с входящим MAP-потокком, заданным представлением  $(ND_0, ND_1)$ , где матрицы  $D_0$  и  $D_1$  определяются выражениями (5.3). Длительности обслуживания на фазах системы являются случайными величинами, имеющими гамма-распределение с параметрами масштаба и формы, представленными в Таблице 5.12. Аналогично предыдущему разделу представим результаты для второй фазы системы, среднее число заявок в которой в стационарном режиме равно  $N$ .

На Рисунке 5.15 представлено сравнение графиков эмпирического и асимптотического распределений числа заявок на второй фазе рассматриваемой системы. Из графиков видно, что при  $N = 25$  эти два распределения становятся достаточно близки друг к другу визуально. Расстояния Колмогорова, представленные в Таблице 5.14 и в виде графика на Рисунке 5.16, показывают, что область применимости полученной в работе гауссовской аппроксимации при выбранных параметрах действительно начинается с  $N = 25$ .

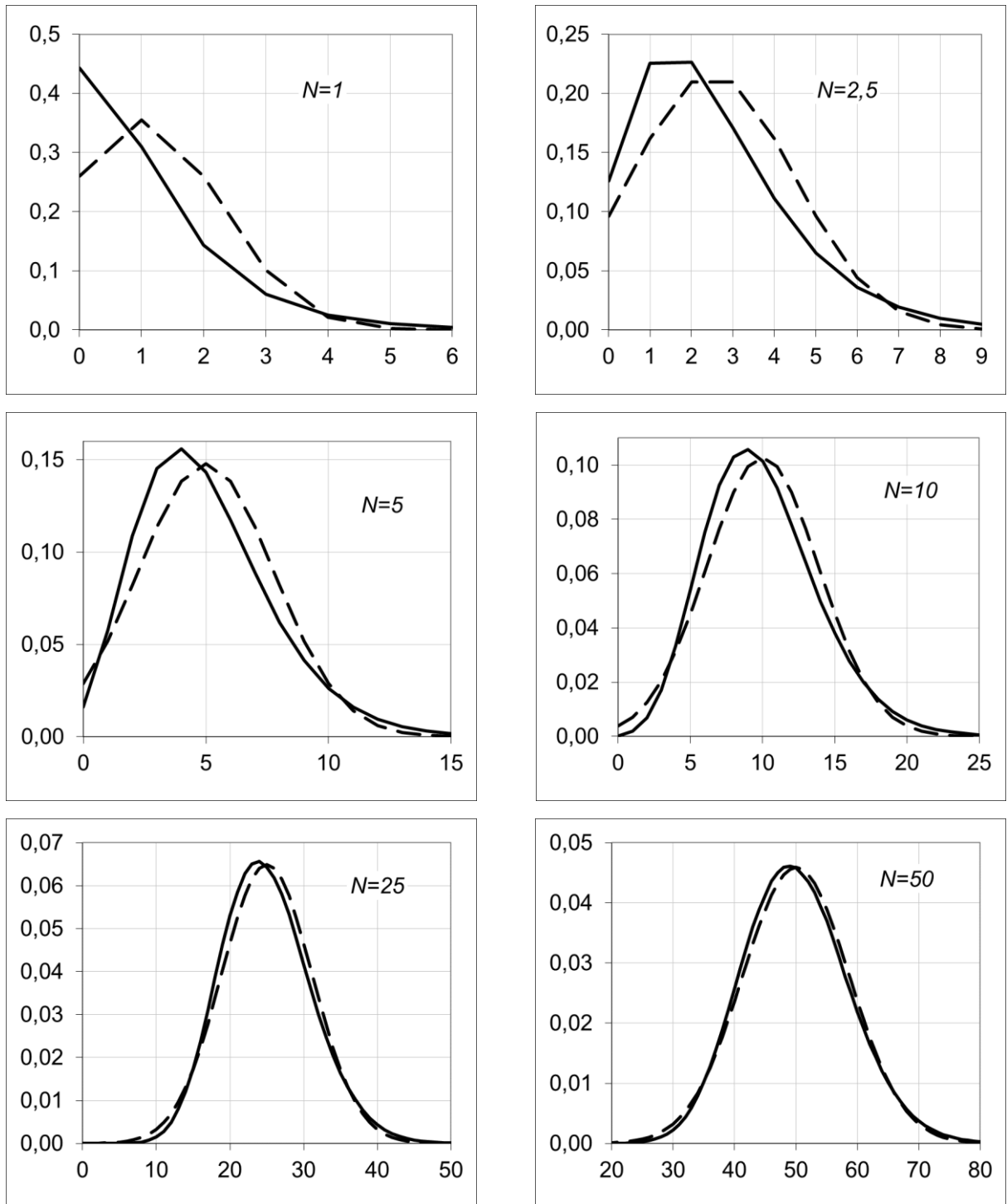


Рисунок 5.15 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений для числа заявок на второй фазе системы  $MAP/(GI/\infty)^K$  при различных  $N$

Таблица 5.14 – Расстояние Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями числа заявок на второй фазе системы  $MAR/(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d$	0,183	0,110	0,069	0,043	<b>0,026</b>	<b>0,016</b>	<b>0,011</b>

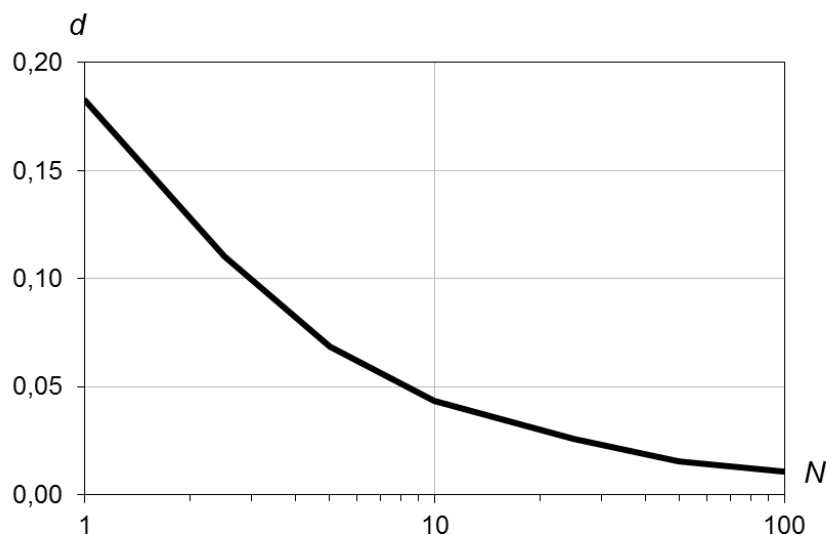


Рисунок 5.16 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для второй фазы системы  $MAR/(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

#### 5.4.4 Система $SM/(GI/\infty)^K$

Для анализа области применимости полученной в п. 3.6 многомерной гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в системе  $SM/(GI/\infty)^K$  в стационарном режиме функционирования в качестве параметров входящего полумарковского потока выберем параметры, представленные в п. 5.2.3. Длительности обслуживания на фазах системы являются случайными величинами, имеющими гамма-распределение с параметрами масштаба и формы, представленными в Таблице 5.12. Аналогично предыдущим разделам представим результаты для второй фазы системы.

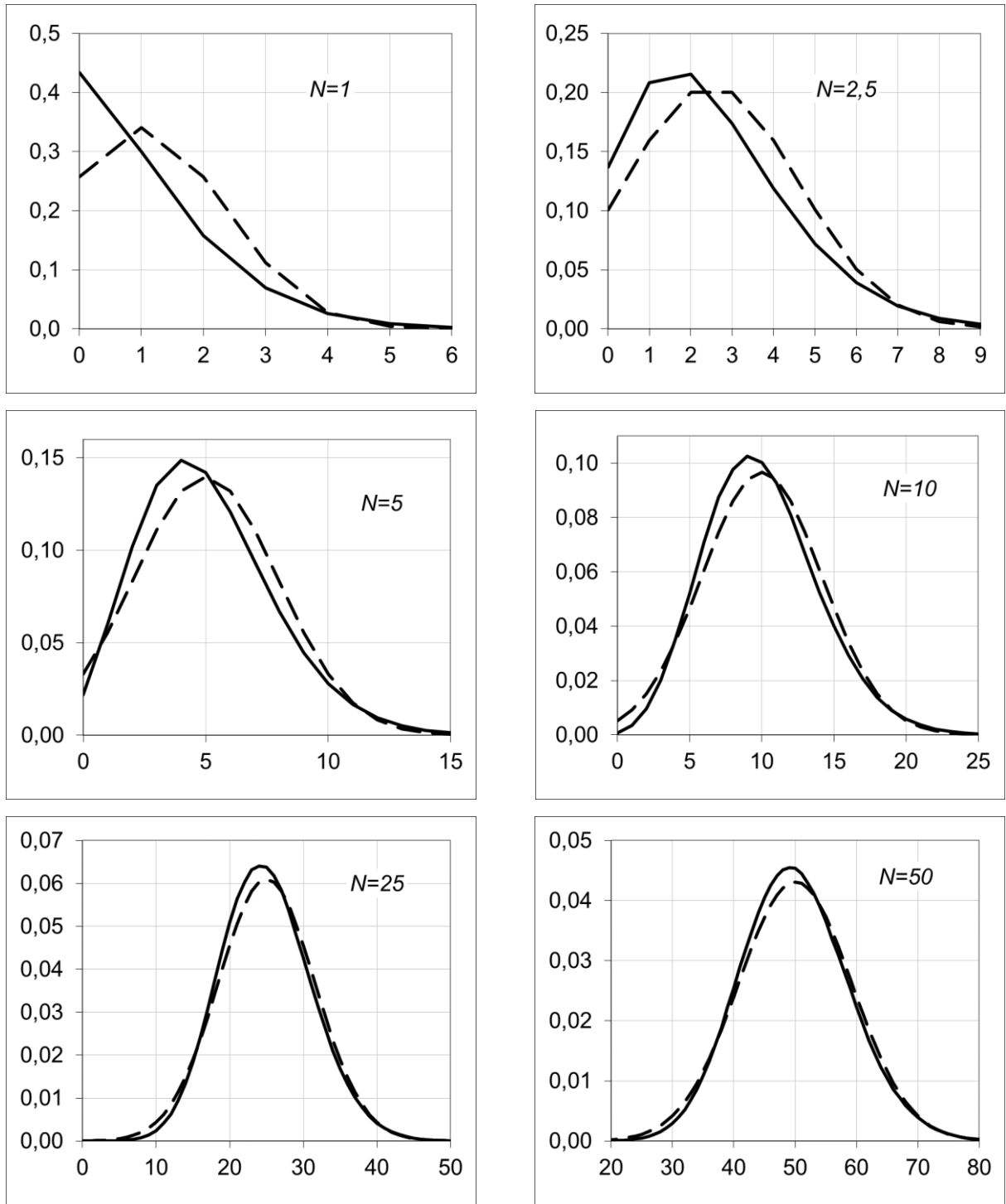


Рисунок 5.17 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений для числа заявок на второй фазе системы  $SM/(GI/\infty)^K$  при различных  $N$

На Рисунке 5.17 представлено сравнение графиков эмпирического и асимптотического распределений числа заявок на второй фазе рассматриваемой системы. Из графиков видно, что при  $N = 25$  эти два распределения визу-

ально становятся достаточно близки друг к другу. Расстояния Колмогорова, представленные в Таблице 5.15 и на Рисунке 5.18, показывают, что область применимости полученной в работе гауссовской аппроксимации при выбранных параметрах действительно начинается с  $N = 25$ .

Таблица 5.15 – Расстояние Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями числа заявок на второй фазе системы  $SM/(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d$	0,176	0,101	0,055	0,034	<b>0,025</b>	<b>0,020</b>	<b>0,015</b>

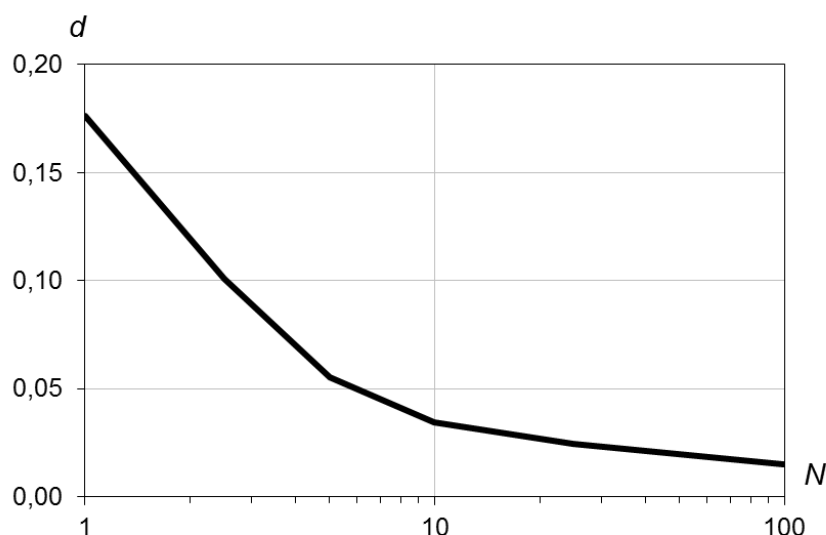


Рисунок 5.18 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическим распределениями для второй фазы системы  $SM/(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

## 5.5 Область применимости асимптотических результатов для сетей массового обслуживания

### 5.5.1 Сравнение моментов для сети с экспоненциальным обслуживанием

В п. 4.2 показано, что в условиях высокой интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей состояний сети массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком и произвольным распределе-

нием времени обслуживания в узлах сети в стационарном режиме функционирования аппроксимируется многомерным гауссовским распределением с вектором средних

$$\mathbf{m}^{(1)} = N\lambda \mathbf{Y} \mathbf{e} \quad (5.7)$$

и матрицей ковариаций  $N[\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V}]$ , где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$  определяются выражениями (4.11). В п. 4.9 получено выражение (4.91) для допредельных значений моментов первого порядка для состояний сети вида GI-(M/∞)<sup>K</sup>. С учетом выражения (4.12) для вектора  $\mathbf{Y} \mathbf{e}$  получаем, что для сети с экспоненциальным обслуживанием значения асимптотических (5.7) и допредельных (4.91) первых моментов числа заявок в узлах сети совпадают.

Относительно допредельных моментов второго порядка получено матричное уравнение (4.94), в виду чего произвести аналитическое сравнение выражений для элементов матрицы ковариаций в допредельном и асимптотическом случаях не представляется возможным. Поэтому оценим погрешности значений асимптотических вторых моментов по сравнению с допредельными, выполнив численные реализации. Для этого рассмотрим сеть массового обслуживания, состоящую из четырех узлов, с входящим рекуррентным потоком, длины интервалов между последовательными поступлениями заявок в котором имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба соответственно равными  $\alpha = 0,25$  и  $\beta = N \cdot \alpha$ . Интенсивность такого потока составляет  $N$ . Зададим следующие значения компонентов вектора  $\mathbf{v}$  разделения входящего потока по узлам и матрицы  $\mathbf{M}$  маршрутизации в сети:

$$\mathbf{v} = (0,2 \quad 0,2 \quad 0,1 \quad 0,5), \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Длительность обслуживания в каждом узле сети распределена по экспоненциальному закону с соответствующим параметром  $\mu_k$ :

$$\mu_1 = 0,5, \quad \mu_2 = 1,0, \quad \mu_3 = 2,0, \quad \mu_4 = 4,0,$$

где  $k$  – номер фазы.

В Таблице 5.16 приведены максимальные значения относительной погрешности вычисления вторых центральных моментов многомерной гауссовской аппроксимации (4.10) по отношению к допредельным значениям, вычисленным на основе матричного уравнения (4.94) для начальных моментов второго порядка. Из таблицы видно, что уже при  $N = 5$  максимальная относительная погрешность вычисления вторых центральных моментов составляет менее 5%, что можем считать приемлемым результатом.

Таблица 5.16 – Динамика изменения погрешности аппроксимационных формул для вторых моментов при увеличении интенсивности входящего потока в сети  $GI-(M/\infty)^K$

Интенсивность входящего потока, $N$	1	5	10	50	100
Относительная погрешность	14,0%	<b>4,6%</b>	<b>2,7%</b>	<b>2,2%</b>	<b>1,9%</b>

### 5.5.2 Анализ области применимости асимптотических результатов для $SeMO$ $GI-(GI/\infty)^K$

Для анализа области применимости полученной в п. 4.2 гауссовской аппроксимации (4.10) и полученной в п. 4.8.1 аппроксимации третьего порядка (4.66) выполним их сравнение с результатами имитационного моделирования на основе вычисления расстояния Колмогорова.

Для демонстрации результатов рассмотрим пример сети вида  $GI-(GI/\infty)^K$ , состоящей из 4 узлов. Длины интервалов между последовательным поступлением заявок входящего потока имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба, равными соответственно  $\alpha = 0,25$ ,  $\beta = N\alpha$ . Значения компонентов вектора  $\mathbf{v}$  разделения входящего потока по узлам и матрицы  $\mathbf{M}$  маршрутизации заявок в сети выберем соответственно (5.8). Пусть продолжительность обслуживания одной заявки в каждом узле имеет гамма-распределение со значениями параметров формы и масштаба, представленными в Таблице 5.17.

Таблица 5.17 – Параметры гамма-распределения продолжительности обслуживания в узлах сети

Номер узла	1	2	3	4
Параметр формы	0,25	0,25	1,50	4,00
Параметр масштаба	0,50	0,25	3,00	2,00

Для такой сети в стационарном режиме функционирования среднее число заявок, находящихся на обслуживании во втором узле, приблизительно равно  $N$ . Поэтому демонстрацию результатов анализа приведем на примере маргинального распределения вероятностей числа заявок в этом узле рассматриваемой сети. Для других случаев общие тенденции зависимости от значения параметра  $N$ , которая представлена в настоящем разделе, а также от значений вариации длин интервалов входящего потока и времени обслуживания, описанных в п. 5.3.3, сохраняются.

На Рисунке 5.19 представлены графики маргинальных законов распределения вероятностей значений числа заявок во втором узле рассматриваемой сети для эмпирического распределения, составленного на основе результатов имитационного моделирования, и распределений, полученных на основе аппроксимаций второго (4.10) и третьего (4.66) порядков. Из графиков видно, что уже при  $N = 1$  аппроксимация третьего порядка визуально достаточно близка к эмпирическому распределению, для аппроксимации второго порядка этот эффект достигается только при  $N \geq 10$ . На основе вычисления соответствующих расстояний Колмогорова можно сделать вывод, что область применимости гауссовской аппроксимации составляет  $N \geq 10$ , а аппроксимации третьего порядка –  $N \geq 2,5$ . В Таблице 5.18 и на Рисунке 5.20 представлены результаты вычисления расстояний Колмогорова для этих распределений при различных  $N$ .

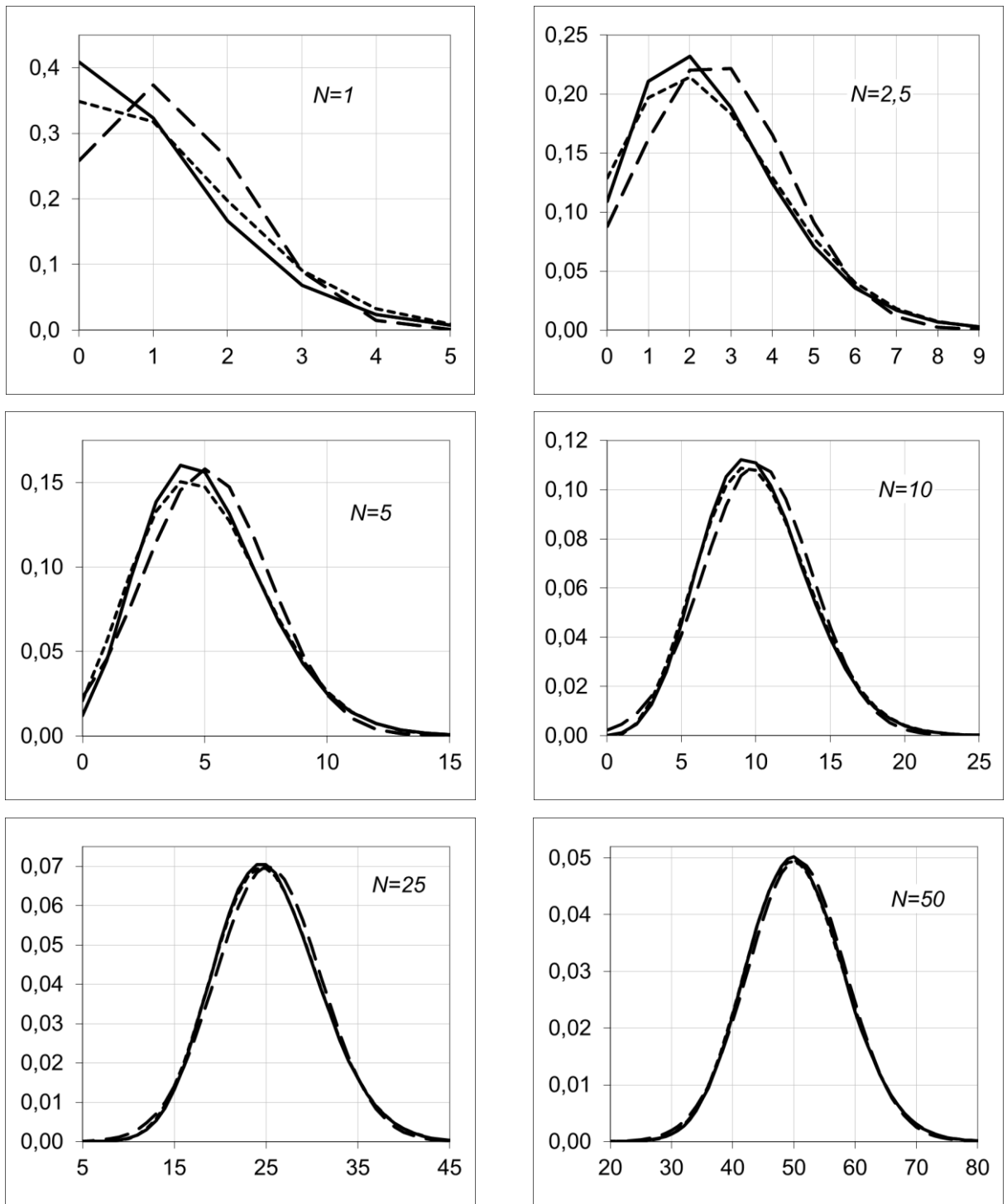


Рисунок 5.19 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотических распределений второго (пунктирная линия) и третьего (точечная линия) порядков для числа заявок во втором узле сети  $GI-(GI/\infty)^K$  при различных  $N$

Таблица 5.18 – Расстояния Колмогорова  $d_2$  и  $d_3$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго и третьего порядков числа заявок во втором узле сети  $GI-(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d_2$	0,150	0,082	0,043	<b>0,030</b>	<b>0,018</b>	<b>0,011</b>	<b>0,007</b>
$d_3$	0,065	<b>0,028</b>	<b>0,022</b>	<b>0,008</b>	<b>0,005</b>	<b>0,004</b>	<b>0,004</b>

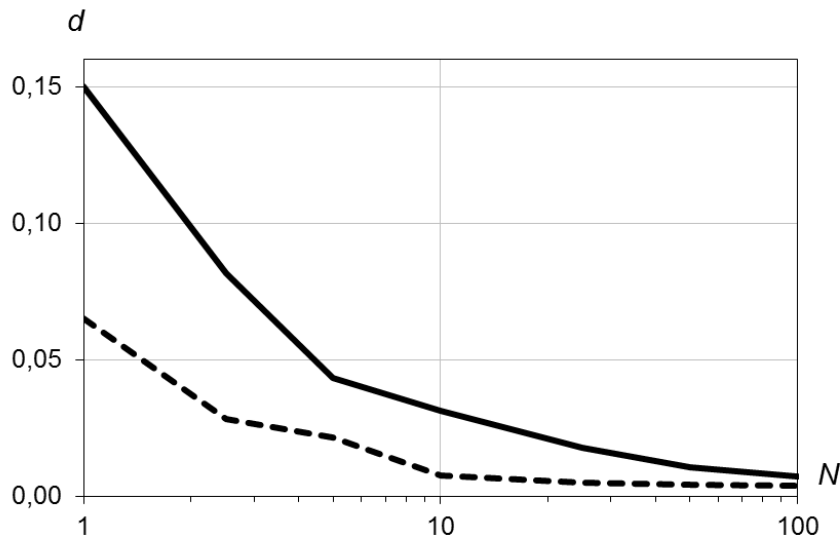


Рисунок 5.20 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) порядков для второго узла сети  $GI-(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

### 5.5.3 СеМО MAP-(GI/∞)<sup>K</sup>

Для определения области применимости полученной в п. 4.5 гауссовской аппроксимации (4.10) и полученной в п. 4.8.2 аппроксимации третьего порядка (4.76) выполним их сравнение с результатами имитационного моделирования на основе вычисления расстояния Колмогорова. Рассмотрим пример сети вида MAP-(GI/∞)<sup>K</sup>, состоящей из 4 узлов, с входящим MAP-поток, заданным представлением  $(ND_0, ND_1)$ , где матрицы  $D_0$  и  $D_1$  определяются выражениями (5.3). Значения компонентов вектора  $\mathbf{v}$  разделения входящего потока

по узлам и матрицы  $\mathbf{M}$  маршрутизации заявок в сети выберем соответственно (5.8). Пусть продолжительность обслуживания одной заявки в каждом узле имеет гамма-распределение со значениями параметров формы и масштаба, представленными в Таблице 5.17.

Так же, как и в предыдущем разделе, для такой сети в стационарном режиме функционирования среднее число заявок, находящихся на обслуживании во втором узле, приблизительно равно  $N$ , поэтому демонстрацию результатов анализа области применимости асимптотических результатов приведем на примере маргинального распределения вероятностей числа заявок именно в этом узле рассматриваемой сети.

На Рисунке 5.21 представлены графики маргинальных законов распределения вероятностей значений числа заявок во втором узле рассматриваемой сети для эмпирического распределения, составленного на основе результатов имитационного моделирования, и распределений, полученных на основе аппроксимаций второго (4.10) и третьего (4.76) порядков. Из графиков видно, что уже при  $N = 1$  аппроксимация третьего порядка визуально достаточно близка к эмпирическому распределению, для аппроксимации второго порядка этот эффект достигается только при  $N \geq 10$ . На основе вычисления соответствующих расстояний Колмогорова можно сделать вывод, что область применимости гауссовской аппроксимации составляет  $N \geq 10$ , а аппроксимации третьего порядка –  $N \geq 2,5$ . В Таблице 5.19 и на Рисунке 5.22 представлены результаты вычисления расстояний Колмогорова для этих распределений при различных  $N$ .

Таблица 5.19 – Расстояния Колмогорова  $d_2$  и  $d_3$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго и третьего порядков числа заявок во втором узле сети MAP–(GI/∞)<sup>K</sup> при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d_2$	0,153	0,086	0,052	<b>0,029</b>	<b>0,022</b>	<b>0,010</b>	<b>0,008</b>
$d_3$	0,073	<b>0,026</b>	<b>0,023</b>	<b>0,011</b>	<b>0,007</b>	<b>0,006</b>	<b>0,005</b>

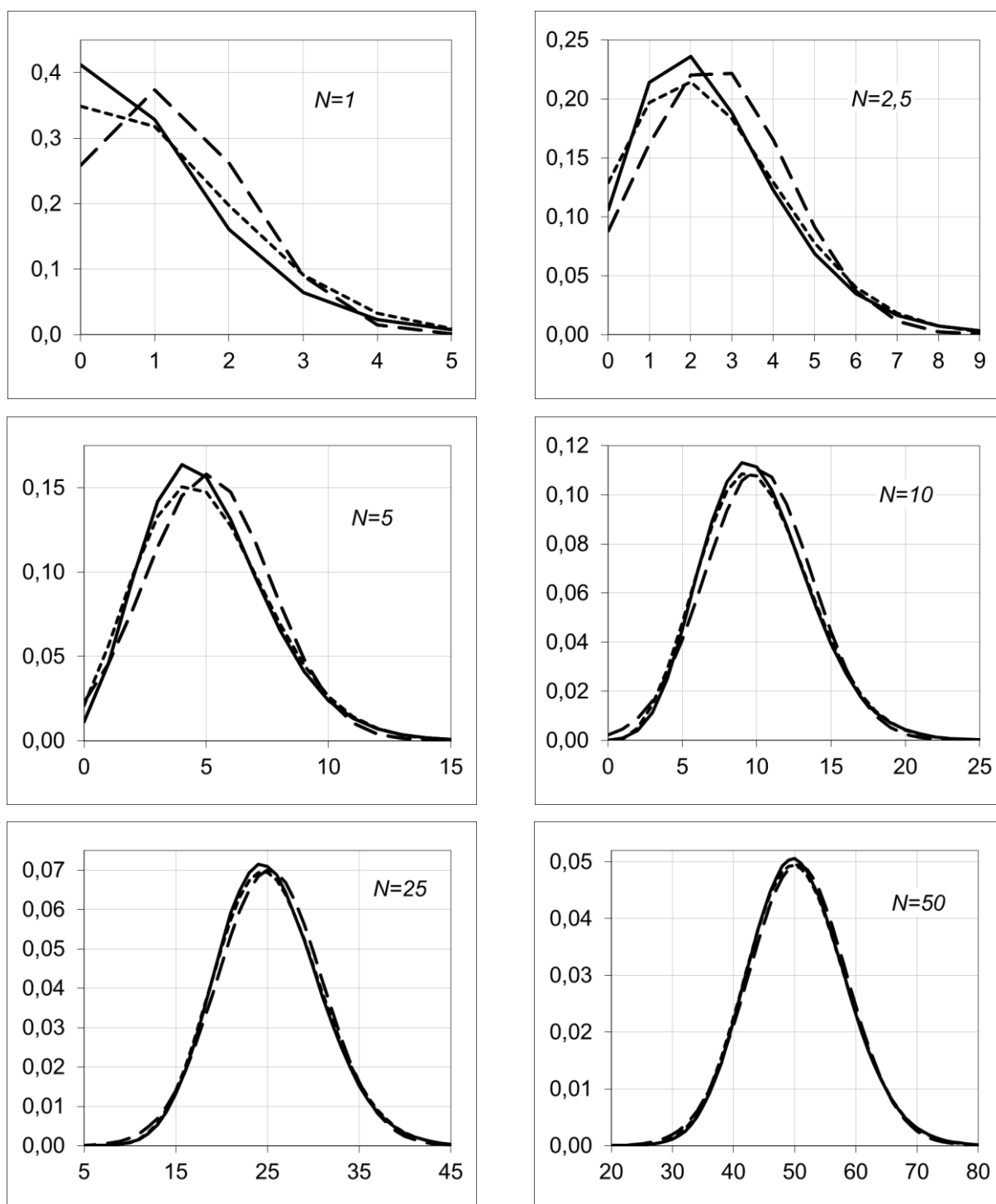


Рисунок 5.21 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотических распределений второго (пунктирная линия) и третьего (точечная линия) порядков для числа заявок во втором узле сети  $MAP-(GI/\infty)^K$  при различных  $N$

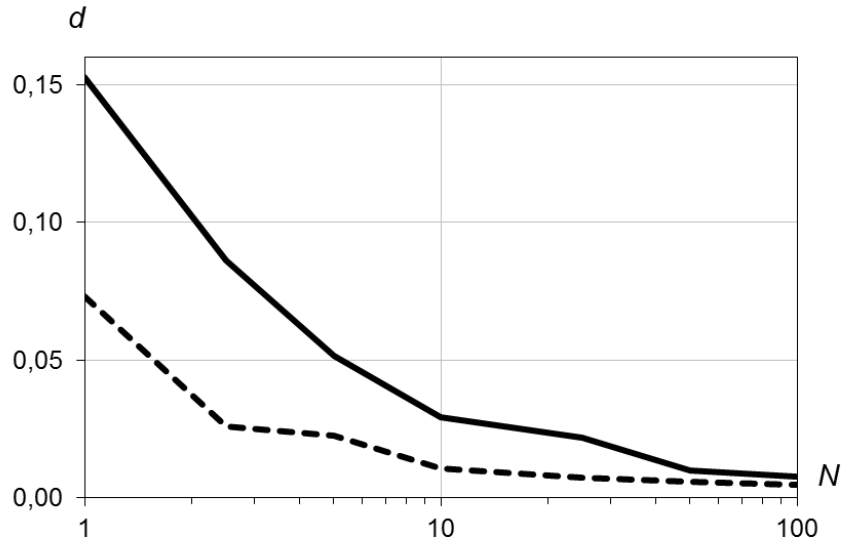


Рисунок 5.22 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) порядков для второго узла сети  $MAP-(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

#### 5.5.4 CeMO $SM-(GI/\infty)^K$

Проведем анализ области применимости полученной в Главе 4 гауссовской аппроксимации вида (4.10) и аппроксимации третьего порядка (4.85) для сети вида  $SM-(GI/\infty)^K$  на примере CeMO из 4 узлов, на вход которой поступает полумарковский поток заявок, заданный полумарковской матрицей описанным в п. 5.2.3 образом, с теми же значениями параметров. Значения компонентов вектора  $\mathbf{v}$  разделения входящего потока по узлам и матрицы  $\mathbf{M}$  маршрутизации заявок в сети определяются (5.8). Продолжительность обслуживания одной заявки для каждого узла имеет гамма-распределение со значениями параметров формы и масштаба, представленными в Таблице 5.17.

Так же, как и в предыдущих разделах, для такой сети в стационарном режиме функционирования среднее число заявок, находящихся на обслуживании во втором узле, приблизительно равно  $N$ , поэтому демонстрацию результатов анализа области применимости асимптотических результатов приведем на примере маргинального распределения вероятностей числа заявок именно в этом узле рассматриваемой сети.

На Рисунке 5.23 представлены графики маргинальных законов распределения вероятностей значений числа заявок во втором узле рассматриваемой сети для эмпирического распределения, составленного на основе результатов имитационного моделирования, аппроксимаций второго и третьего порядков, полученных соответственно в пп. 4.6 и 4.8.3. Из графиков видно, что уже при  $N = 10$  гауссовская аппроксимация визуально достаточно близка к эмпирическому распределению. Для аппроксимации третьего порядка этот эффект достигается при  $N = 2,5$ . В Таблице 5.20 приведены расстояния Колмогорова между эмпирическим распределением и указанными аппроксимациями для различных  $N$ . Значения, приведенные в этой таблице, подтверждают визуальные наблюдения. На Рисунке 5.24 данные Таблицы 5.20 представлены в виде графиков.

Таблица 5.20 – Расстояния Колмогорова  $d_2$  и  $d_3$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго и третьего порядков числа заявок во втором узле сети  $SM-(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$d_2$	0,150	0,083	0,048	<b>0,026</b>	<b>0,020</b>	<b>0,015</b>	<b>0,006</b>
$d_3$	0,063	<b>0,017</b>	<b>0,017</b>	<b>0,009</b>	<b>0,008</b>	<b>0,006</b>	<b>0,004</b>

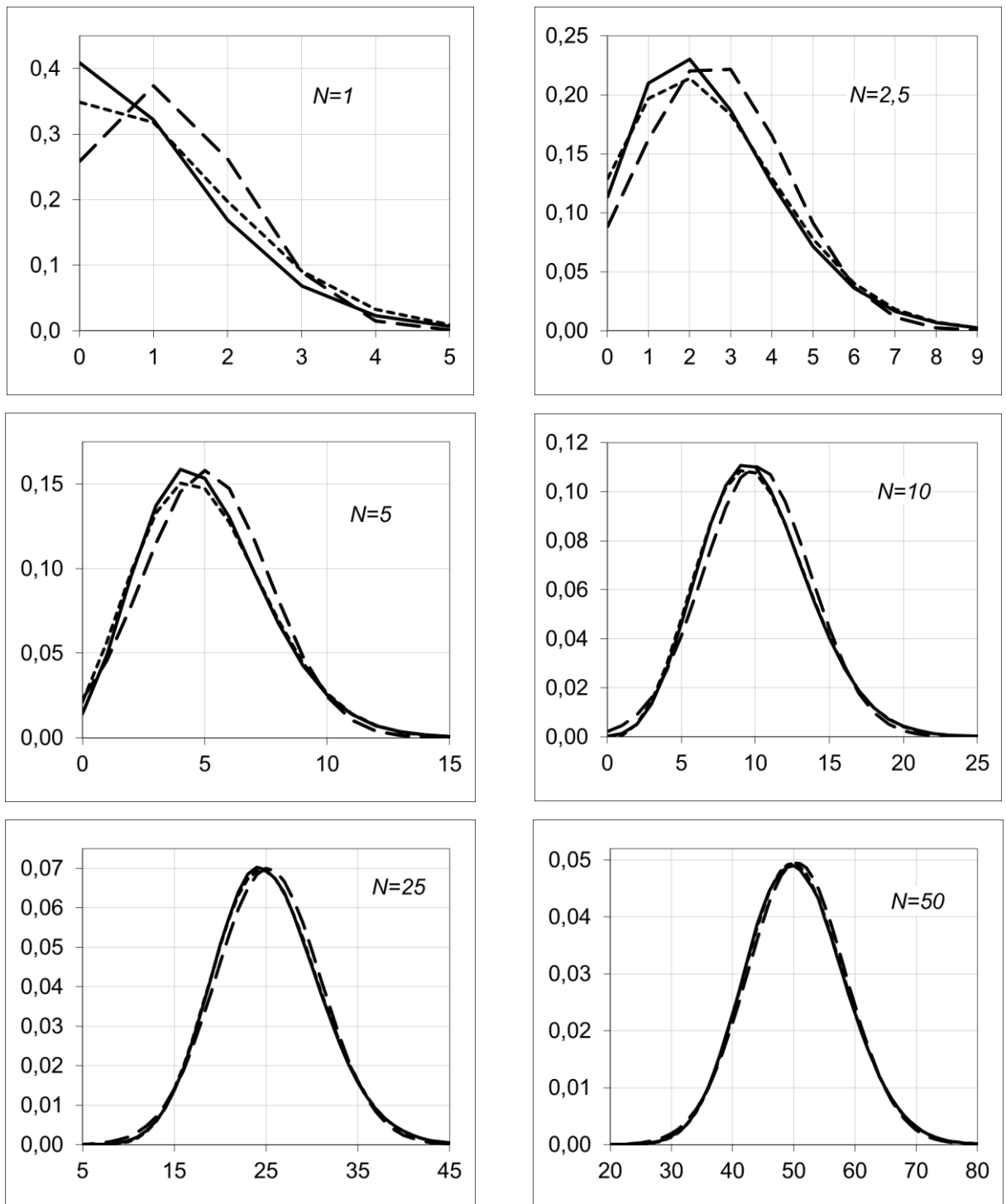


Рисунок 5.23 – Сравнение эмпирического распределения (сплошная линия) с асимптотическими распределениями второго (пунктирная линия) и третьего (точечная линия) порядков для числа заявок во втором узле сети  $SM-(GI/\infty)^K$  при различных  $N$

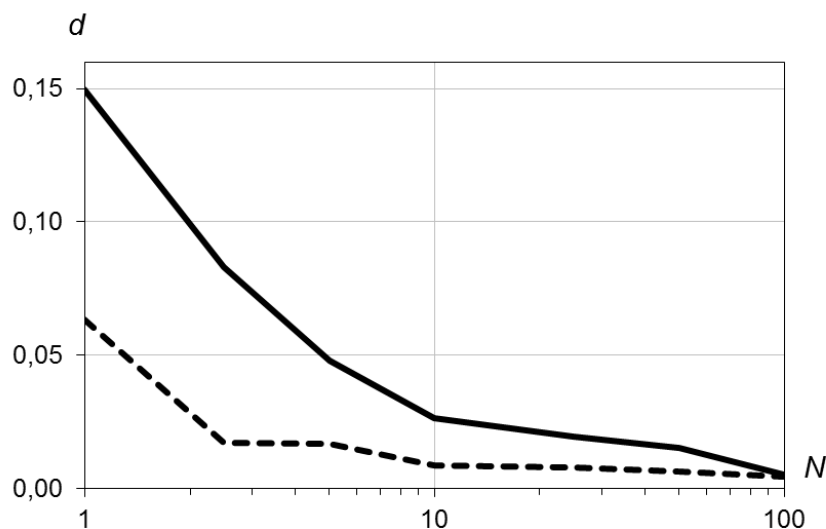


Рисунок 5.24 – Значения расстояния Колмогорова  $d$  между эмпирическим и асимптотическими распределениями второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) порядков для второго узла сети  $SM-(GI/\infty)^K$  при различных значениях  $N$  (логарифмическая шкала)

## 5.6 Оптимальное число приборов

В настоящем разделе проведем численную демонстрацию результатов, полученных в п. 4.7, на примере вычисления оптимального числа приборов для СеМО вида  $GI-(GI/\infty)^K$ , описанной в п. 5.5.2. В Таблице 5.21 представлены значения математических ожиданий и дисперсий числа заявок в узлах сети, вычисленные на основе гауссовской аппроксимации (4.10) при  $N = 1$ .

Таблица 5.21 – Математические ожидания и дисперсии гауссовской аппроксимации

Узел	1	2	3	4
Матожидание	0,305	1,009	0,530	1,616
Дисперсия	0,346	1,297	0,656	3,248

Значения оптимального числа приборов для второго узла сети при различных значениях интенсивности входящего потока  $N$  и для различных уровней информационной надежности  $P$  представлены в Таблице 5.22.

Таблица 5.22 – Значения оптимального числа приборов для второго узла сети при значениях интенсивности входящего потока  $N$  и информационной надежности  $P$

Интенсивность входящего потока $N$	Уровень информационной надежности $P$			
	$1 - 10^{-3}$	$1 - 10^{-6}$	$1 - 10^{-9}$	$1 - 10^{-12}$
1	6	8	9	10
2,5	11	13	15	17
5	16	20	23	26
10	26	31	35	39
25	50	59	65	71
50	85	97	107	114
100	150	167	180	191

Можно обратить внимание, что оптимальное число приборов растет медленнее, чем интенсивность входящего потока: при уровне информационной надежности  $P = 1 - 10^{-3}$  оптимальное число приборов увеличивается в 25 в то время, как интенсивность входящего потока возрастает в 100 раз. С другой стороны, при уменьшении доли потерь в миллиард раз (с  $10^{-3}$  до  $10^{-12}$ ) оптимальное число приборов увеличивается менее, чем в 2 раза (не более, чем в 1,5 раза – при  $N \geq 10$ ).

В Таблице 5.23 представлены результаты расчета относительной частоты превышения оптимального числа приборов текущим числом заявок во втором узле сети для информационной надежности  $P = 1 - 10^{-6}$ , полученные на основе имитационного моделирования для различных значений интенсивности входящего потока (жирным шрифтом выделены значения, удовлетворяющие критерию информационной надежности). Из таблицы видно, что оптимальное число приборов, рассчитанное по формуле (4.57), обеспечивает уровень потерь, не превышающий заданную информационную надежность при  $N \geq 10$ . Это объясняется тем, что оптимальное число приборов в СеМО вычисляется из предположения, что распределение числа заявок в сети близко к гауссовскому, а это, как установлено в предыдущем разделе, выполняется при указанных значениях интенсивности входящего потока.

Таблица 5.23 – Относительные частоты  $\omega$  превышения оптимального числа приборов во втором узле сети при различных значениях интенсивности входящего потока  $N$

$N$	1	2,5	5	10	25	50	100
$\omega$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	<b><math>3,1 \cdot 10^{-7}</math></b>	<b><math>2,7 \cdot 10^{-7}</math></b>	<b><math>1,1 \cdot 10^{-7}</math></b>	<b><math>5,3 \cdot 10^{-8}</math></b>

## 5.7 Резюме

В данной главе представлены результаты численного анализа областей применимости полученных в предыдущих главах аппроксимаций. Сравнение производилось на основе анализа расстояния Колмогорова между эмпирическим распределением, полученным в результате имитационного моделирования, с соответствующей аппроксимацией. Установлено, что действительно при возрастающей интенсивности  $N$  потока заявок асимптотические результаты становятся все более точными.

В частности, установлено, что в большинстве случаев для однофазных и многофазных СМО область применимости гауссовских аппроксимаций составляет  $N \geq 25$ , для сетей –  $N \geq 10$  (расстояние Колмогорова не превышает 0,03). Область применимости аппроксимаций третьего порядка еще шире:  $N > 5$  для систем и  $N \geq 2,5$  для сетей.

Для моделей с экспоненциальным обслуживанием и обслуживанием фазового типа проведено сравнение асимптотических и допредельных моментов. Показано, что аналитические выражения для первых моментов в допредельных и асимптотических условиях полностью совпадают. Для вторых же моментов проведено численное сравнение и установлено, что в большинстве случаев допустимая относительная погрешность дисперсии 5% достигается при  $N \geq 5$ .

В п. 5.6 представлено решение задачи определения оптимального числа приборов на практике. Также представлен анализ области применимости данного результата, который соответствует результатам анализа области приме-

нимости гауссовских аппроксимаций и составляет  $N \geq 10$ .

Результаты настоящей главы представлены в работах автора [78, 83, 85, 92, 95, 109, 126, 210, 211, 215].

## **Глава 6 Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания**

В современной науке компьютерный эксперимент [4, 10] занимает важное место в научных исследованиях во многих ее областях. Поэтому разработка программных систем для компьютерных экспериментов является актуальной задачей.

В Главах 1–4 настоящей работы изложены теоретические исследования моделей массового обслуживания, результатами которых являются аппроксимационные формулы, такие как, например, (1.20), (2.47), (3.20), (4.66) и др. Компьютерное моделирование для указанных результатов может применяться, с одной стороны, для расчета параметров распределений по полученным формулам. При этом в некоторых случаях требуется применение соответствующих численных методов (см., например, формулы (3.20) и (4.66)). С другой стороны, компьютерное моделирование может применяться для анализа области применимости указанных аппроксимаций. Поскольку для поставленных в работе задач исследования моделей массового обслуживания получены асимптотические решения, то анализ области применимости результатов работы в допредельной ситуации выполнен на основе сравнения с результатами имитационного моделирования соответствующих систем. Результаты такого анализа представлены в Главе 5.

В настоящей главе представлен комплекс программ и алгоритмов для имитационного моделирования процессов массового обслуживания, а также численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем и сетей обслуживания на основе полученных в работе аппроксимаций. Базовая часть [94] разработанного программного комплекса имитационного моделирования [96] реализована в рамках выполнения проекта [121] и включает моделирование не только систем и сетей обслуживания, которые являются объектом исследования предыдущих глав диссертации, но и некоторых других классов моделей обслуживания (конечнолинейные системы, системы с

повторными вызовами и др.). Разработанный программный продукт в течение нескольких лет успешно применяется для выполнения моделирования в рамках различных научных работ и проектов. В частности, представленный программный комплекс использовался при выполнении заданий [58, 121], диссертационных исследований [71, 99, 130], а также при выполнении ряда проектов группы компаний ИНКОМ (г. Томск) и проектов Томского государственного университета. В настоящее время данный программный продукт продолжает использоваться в Томском государственном университете для научно-исследовательской работы и проведения учебных дисциплин, связанных с теорией массового обслуживания.

Имитационное моделирование и его реализация в виде программных продуктов появились достаточно давно [166, 240] и в настоящее время представлены рядом программных продуктов, таких как [57, 80, 176] и др. Основной целью разработки собственного программного продукта была адаптация интерфейса пользователя под формальные математические описания, лишённые элементов конструирования и программирования. Таким образом, созданный программный продукт позволяет быстро описывать модели, проводить их имитацию и анализ результатов. При этом в данном программном продукте имеется достаточный набор разнообразных инструментов для формального задания параметров моделей. Кроме того, данное программное приложение разработано таким образом, что имеется возможность его расширять и дополнять с помощью новых компонентов базового слоя без необходимости перестройки ядра системы. Проектирование системы выполнено на основе объектно-ориентированного подхода [17, 141], паттернов проектирования [32, 67, 133] и языка моделирования UML [122, 248], а сам программный комплекс реализован на платформе Microsoft .NET Framework [118].

В настоящей работе из-за ограниченности объема представлены не все аспекты реализации данного программного продукта, а изложены лишь базовые принципы реализации основного функционала. В частности, в работу не вошло описание распределенной архитектуры и соответствующих компонен-

тов приложения [25], а также использование GRID-технологий [253] и технологии MPI [43, 219, 220] для реализации распределенных вычислений [23, 79, 88, 93].

Разработанный комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания состоит из программы имитационного моделирования сетей обслуживания, описание архитектуры и работы которой представлено в пп. 6.1–6.4, а также алгоритмов для численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем и сетей обслуживания на основе полученных в работе результатов, представленных в п. 6.5.

В п. 6.1 обсуждаются общие вопросы имитационного моделирования. Здесь же представлен анализ модели предметной области задач имитации функционирования систем и сетей массового обслуживания, предложена объектно-ориентированная модель представления базовых элементов программной системы. Основные элементы архитектуры программного комплекса и реализация его отдельных компонентов представлены в пп. 6.2, 6.3. В п. 6.4 приведено описание работы с приложением.

Алгоритмы для численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем и сетей обслуживания на основе полученных в работе аппроксимаций реализованы в виде документов математического процессора Mathcad [120] и представлены в п. 6.5.

### **6.1 Объектная модель слоя предметной области задач имитации функционирования систем и сетей обслуживания**

Суть метода имитационного моделирования [70] заключается в том, что на компьютере воссоздается достаточно точная копия (модель) исследуемой системы и выполняется моделирование ее функционирования. При этом в отличие от аналитических исследований имитационная модель может учитывать все известные свойства и особенности моделируемого объекта. Основным ограничением для имитационного моделирования являются лишь ресур-

сы вычислительной техники (оперативная память, производительность процессора) и время проведения вычислений.

Существуют различные методики проведения имитационного моделирования, но наиболее подходящим для имитационного моделирования стохастических систем, к которым относятся и модели массового обслуживания, является дискретно-событийный подход [239]. Данный подход применяется для марковизированных исследуемых случайных процессов [54]. В этом случае его применение является математически корректным и обоснованным. С другой стороны, данный подход является достаточно эффективным для реализации на ЭВМ, так как позволяет избежать исполнения моделирования для интервалов времени, в которые состояние системы не изменялось.

Ниже представлены основные понятия и механизмы дискретно-событийного подхода применительно к моделированию систем и сетей массового обслуживания. Очевидно, что СеМО является более общей моделью, поэтому анализ предметной области выполнен именно для вопросов моделирования сетей обслуживания.

### **6.1.1 Основные элементы имитационной модели сети массового обслуживания**

В теории массового обслуживания объекты, подлежащие обработке внутри системы или сети обслуживания, называют *заявками* или *требованиями*. Такие объекты, обычно, поступают на вход системы, затем некоторое время находятся внутри нее и в том или ином виде покидают систему. Именно эти объекты и формируют характеристики, подлежащие исследованию (состояние системы, длина очереди, выходящий поток и т.д.). Поскольку объекты-заявки должны поступить на вход системы, то выделяют специальный гипотетический объект, называемый *входящим потоком заявок*, который отвечает за поступление заявок в систему.

Для представления механизмов обработки заявок в СМО используется понятие *обслуживающего прибора* или *блока обслуживающих приборов*, если их несколько в одной СМО. Именно в нем производятся некоторые манипу-

ляции над объектом-заявкой, которые называют обслуживанием. В результате этих действий заявка может быть обслужена и покинуть систему. Если же по каким-либо причинам приборы не могут обработать заявку, то она либо покидает систему необслуженной (такую ситуацию еще называют *отказом*), либо помещается в специальный *накопитель* (буфер), где заявка ожидает возможности быть обработанной. В ТМО применяются модели накопителей различных типов. Для целей исследования будем классифицировать их следующим образом:

1) *пассивные* – это такие накопители, заявки из которых могут быть извлечены только самим блоком обслуживающих приборов в момент изменения его состояния – окончания обслуживания очередной заявки; в качестве примера такого накопителя можно привести буфер заявок, которые извлекаются из него согласно дисциплине FIFO;

2) *активные* – это накопители, которые самостоятельно отправляют находящиеся в них заявки на обслуживание независимо от текущего состояния блока приборов, такие накопители еще называют источниками повторных вызовов (ИПВ).

Для моделирования сети массового обслуживания требуется произвести маршрутизацию заявок от входящего потока к узлам и между узлами после их частичной обработки, поэтому в системе должен существовать некоторый, пусть гипотетический, объект, отвечающий за маршрутизацию. Этот объект будем называть *маршрутизатором*.

Таким образом, можно выделить следующие основные классы элементов сетей массового обслуживания, с помощью которых можно конструировать модели различного вида:

1) заявка – некий объект, который поступает в систему и передается между ее элементами, пока не покинет систему;

2) источник входящих заявок – гипотетический объект, порождающий заявки, поступающие в систему;

3) блок обслуживающих приборов (узел сети) – некоторое количество

собранных вместе устройств (приборов), занимающихся обработкой (обслуживанием) заявок, число приборов может быть как конечным, так и неограниченным, предполагая, что всякая входящая в узел заявка может получить обслуживание;

4) буфер – накопитель заявок, которые в настоящий момент времени не могут быть обслужены по каким-либо причинам; буфер чаще всего привязан к одному блоку обслуживающих приборов (можно считать, что он «встроен» в блок приборов);

5) маршрутизатор – гипотетический объект, управляющий разделением заявок входящего потока по узлам сети и пересылкой заявок между узлами внутри сети.

### **6.1.2 Модельное время и события системы**

Процесс функционирования системы – это последовательная смена состояний системы во времени. Процесс перехода системы из одного состояния в другое называется событием системы.

Основными событиями для сети массового обслуживания будут являться:

- 1) поступление заявки в систему;
- 2) завершение обработки заявки на устройстве (в узле) и передача ее на другое устройство (узел);
- 3) при наличии источников повторных вызовов (ИПВ) – обращение заявки из источника повторных вызовов (ИПВ);
- 4) завершение моделирования.

Процесс поступления заявки предполагает создание заявки и ее направление на один из узлов сети. Затем происходит проверка возможности обработки заявки в данном узле (в случае ограниченного числа приборов). Если имеется свободный прибор, то заявка встает на обслуживание, в противном случае – либо помещается в буфер при его наличии, либо (при отсутствии буфера) покидает систему.

В процессе моделирования сети таймер модельного времени  $T_{\text{мод}}$  корректируется, сдвигаясь на каждой итерации моделирования в сторону увеличения к моменту ближайшего события. То есть с использованием обозначения для моментов наступления основных событий:

$T_{\text{пост}}$  – момент времени поступления заявки в систему;

$T_{\text{ИПВ}}$  – момент времени обращения заявки из ИПВ;

$T_{\text{заверш.обслуж.}}$  – момент времени завершения обслуживания заявки на обслуживаемом устройстве;

$T_{\text{заверш.модел.}}$  – момент времени завершения моделирования;

коррекция модельного времени на каждой итерации определяется следующим образом:

$$T_{\text{мод}} = \min(T_{\text{пост}}, T_{\text{ИПВ}}, T_{\text{заверш.обслуж.}}, T_{\text{заверш.модел.}}).$$

Таким образом, дискретно-событийное имитационное моделирование выполняется путем генерации событий на временной оси и последовательным сдвигом таймера модельного времени по событиям на этой оси. В зависимости от того, к какому событию произошел переход, выполняются соответствующие действия:

1. *Поступление заявки в систему* – маршрутизатор определяет узел, на который поступает заявка. Если блок обслуживающих приборов может ее обработать, то он генерирует на временной оси в будущем событие завершения обслуживания, иначе – помещает заявку в буфер. Если при этом буфер является активным, то он генерирует на временной оси в будущем событие обращения заявки из ИПВ.

2. *Завершение обслуживания* – маршрутизатор определяет, должна ли заявка покинуть сеть, если нет – то вычисляет, на какой узел она должна перейти для дальнейшего обслуживания. В последнем случае для узла-приемника выполняются действия, аналогичные п.1. Если обслуживший заявку узел имеет пассивный буфер, то он извлекает из него очередную заявку и ставит ее на обслуживание.

3. *Обращение заявки из ИПВ* – для узла, к которому относится ИПВ, выполняются действия, аналогичные п.1.

4. *Завершение моделирования* – имитационная модель прекращает все вычисления.

### 6.1.3 Базовые объекты и основной алгоритм моделирования

Основной алгоритм дискретно-событийного имитационного моделирования в разработанной программе выполняется специальным объектом Модель (SimulationModel), который реализован в виде абстрактного класса и имеет интерфейс, представленный на Рисунке 6.1.

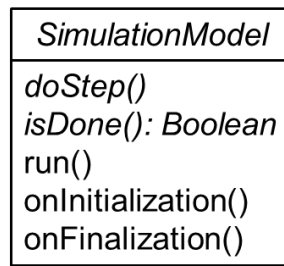


Рисунок 6.1 – Интерфейс базового управляющего класса имитационного моделирования

Данный класс реализует «Шаблонный Метод» [32] *run()*, алгоритм которого представлен на Рисунке 6.2. Он начинается с выполнения операции *onInitialization()*, предназначенной для инициализирующих действий. Затем в цикле производится выполнения метода *doStep()*, который отвечает за одну итерацию моделирования. Выполнение шагов продолжается до тех пор, пока функция *isDone()* не вернет значение *true* – цикл моделирования окончен. По завершении моделирования вызывается операция *onFinalization()*, предназначенная для выполнения некоторых итоговых действий.

Этот класс может служить базовым не только для управляющих классов моделирования систем массового обслуживания, но и для любых других систем имитационного моделирования, которые используют пошаговый процесс моделирования.

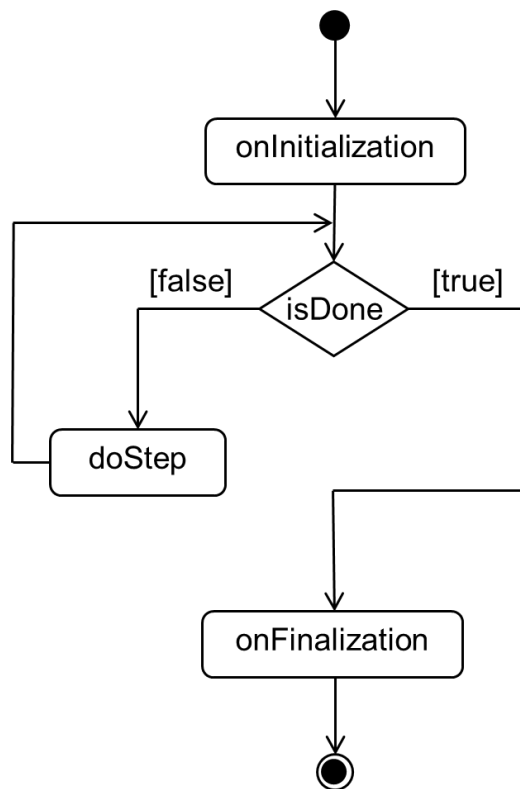


Рисунок 6.2 – Общий алгоритм имитационного моделирования – метод run() класса SimulationModel

В частности, в представленном приложении потомок этого класса QueueSimulationModel, используемый для моделирования сетей массового обслуживания, переопределяет:

- операцию onInitialization() – для начального заполнения журнала событий (см. в следующем разделе) событиями входящих заявок;
- операцию isDone() – для индикации конкретного условия останова (по времени моделирования либо по числу событий входящего потока);
- операцию doStep() – для непосредственной реализации итерации моделирования.

#### 6.1.4 Моделирование событий

Поскольку в основу моделирования положен дискретно-событийный подход, то для организации пошагового моделирования введен специальный объект Событие (Event), инкапсулирующий всю информацию, необходимую

для корректной регистрации и обработки потока событий внутри модели. Все события записываются в специальный список – журнал событий, который сортирован по времени и обеспечивает дискретно-событийное управление модельным временем. Связь с другими объектами программы показана на Рисунке 6.3.

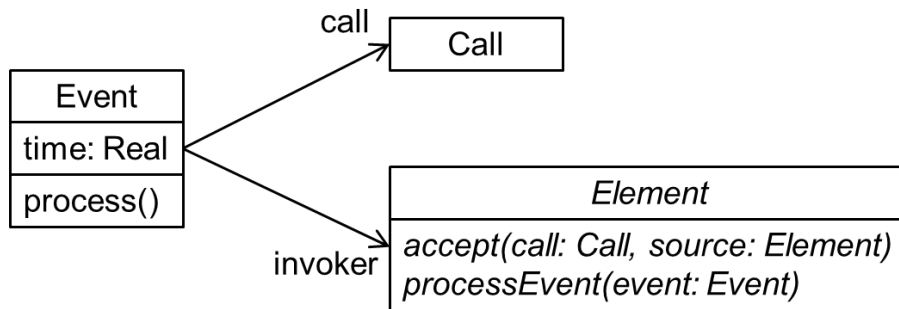


Рисунок 6.3 – Модель событий

Абстракция **Call** (Заявка) введена в систему как сущность переноса данных, связанных с конкретным входящим событием, а также для протоколирования информации его обработки. Объект **Element** – это любой элемент системы (источник заявок, блок обслуживающих приборов, буфер, маршрутизатор), способный принимать заявки (операция `accept(...)`) и/или генерировать и обрабатывать связанные с заявками события (операция `processEvent(...)`). Объект-событие сохраняет в ссылке `invoker` указатель на элемент, который создал это событие или должен обработать его. Для элементов модели событиями будут являться такие моменты времени в будущем, когда элемент должен выполнить определенное действие. Например, для источника заявок это будет поступление заявки на обслуживание, для блока обслуживающих приборов – окончание обслуживания, для источника повторных вызовов – попытка заявки снова обратиться за обслуживанием.

При такой организации системы весь процесс, происходящий на одном шаге моделирования (метод `QueueSimulationModel.doStep()`), описывается следующим простым алгоритмом (Рисунок 6.4). Модель извлекает из журнала

ближайшее событие, вызывает его операцию `process()`, которая просто переадресует вызов обрабатывающему элементу. Конечный элемент (`invoker`) выполняет необходимые действия.

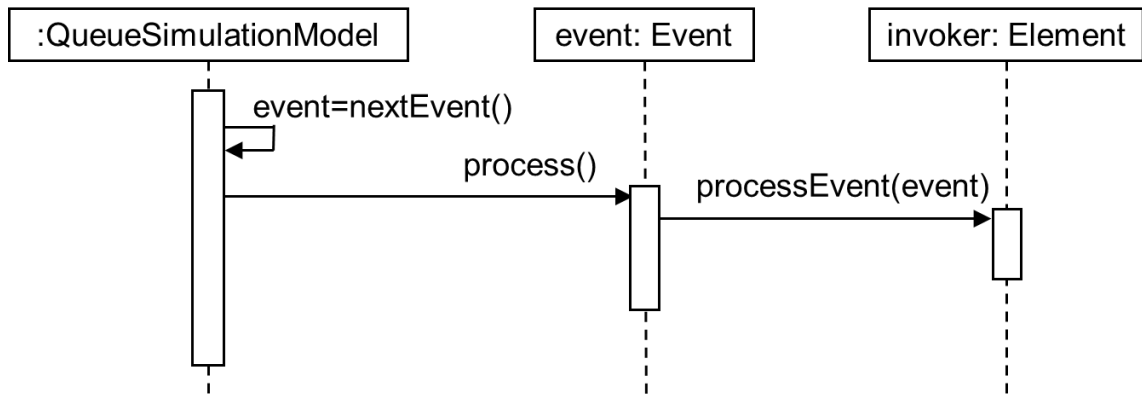


Рисунок 6.4 – Реализация метода `doStep()` для управляющего класса имитационного моделирования сети массового обслуживания

### 6.1.5 Элементы системы моделирования

Различные элементы модели являются потомками базового абстрактного класса `Element` (Рисунок 6.5). Каждый из них замещает операции `accept()` и `processEvent()` в соответствии со своими обязанностями. В частности, источник заявок (`Source`) не может принимать заявки – его метод `accept()` генерирует исключение. А вот операция `processEvent()`, которая вызывается, когда возникает событие поступления заявки в систему, реализует пересылку заявки на прикрепленный элемент (указатель `nextElement`), почти всегда это – либо блок обслуживающих приборов (класс `ServerBlock`) для обычной СМО, либо маршрутизатор `Router` для СМО. Пересылка заключается в вызове операции `accept()` элемента-приемника.

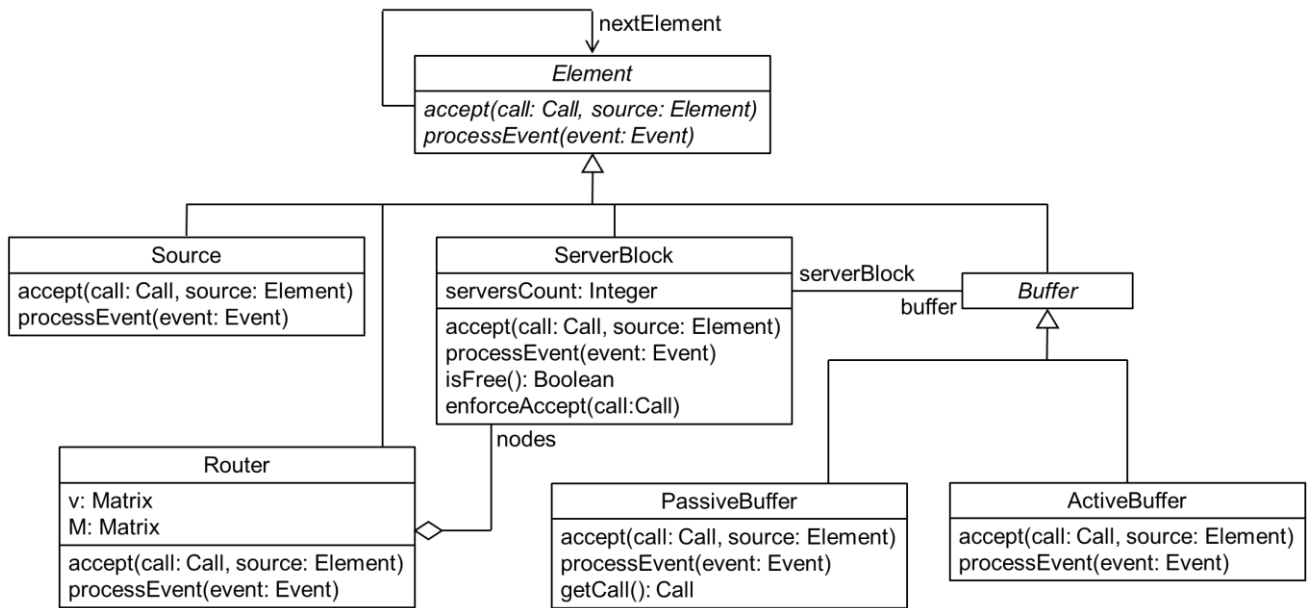
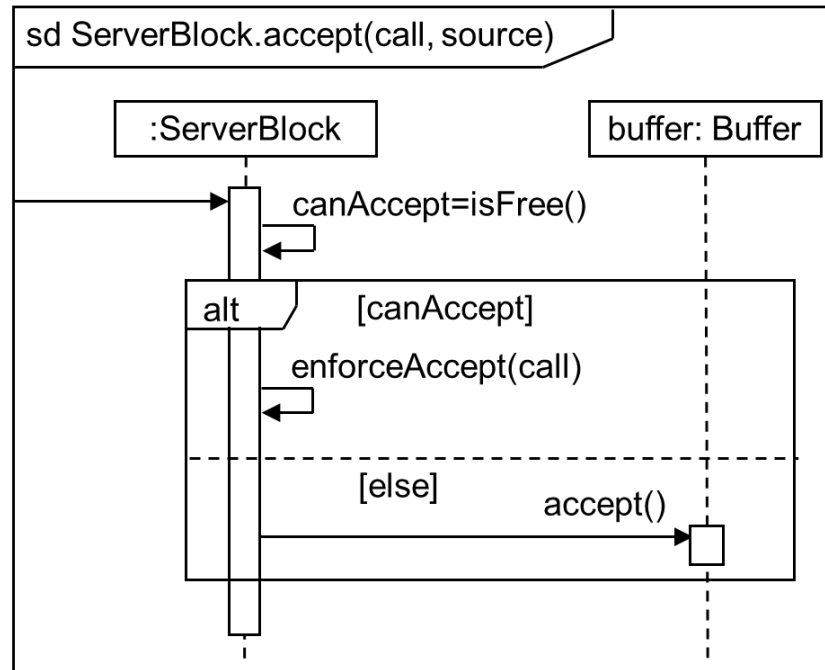
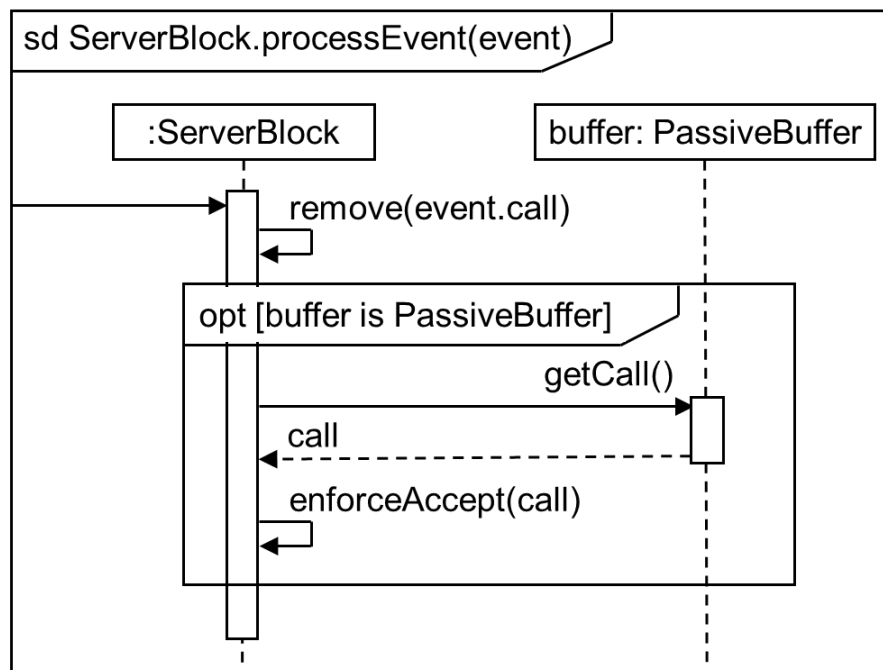


Рисунок 6.5 – Иерархия элементов объектной модели СеМО

Операция `accept(...)` объекта `ServerBlock` (блок обслуживающих приборов или узел сети) проверяет, свободен ли блок (операция `isFree()`), если это так, то заявка поступает на обслуживание – вызывается операция `enforceAccept(...)`, иначе она передается буферу (указатель `buffer`). По умолчанию блок приборов всегда имеет буфер – пассивный накопитель нулевого объема. Такой буфер не может содержать заявки, но он вводится специально, чтобы, например, фиксировать отказы в обслуживании. Операция `processEvent(...)` блока (обработка события окончания обслуживания) просто удаляет заявку из списка обслуживаемых данным блоком, и в случае, если буфером является пассивный буфер (объект класса `PassiveBuffer`), с помощью операции `getCall()` этого объекта принудительно забирает из него очередную заявку (если буфер не пуст) и ставит ее на обслуживание, вызывая свой метод `enforceAccept(...)`. Данное взаимодействие не использует механизм журнала событий, так как оно производится немедленно после события окончания обслуживания. Диаграммы последовательностей для описанных сценариев представлены на Рисунках 6.6–6.7.

Рисунок 6.6 – Реализация сценария `accept(...)` в классе `ServerBlock`Рисунок 6.7 – Реализация сценария `processEvent(...)` в классе `ServerBlock`

Операция `enforceAccept(...)` класса `ServerBlock` регистрирует переданную заявку во внутреннем списке, генерирует время наступления события окончания обслуживания этой заявки и регистрирует соответствующее событие в системном журнале событий, записывая в поле `invoker` объекта `Event` указатель на самого себя, чтобы при наступлении данного события сработал сце-

нарий `processEvent(...)`.

Объект `PassiveBuffer` реализует пассивный накопитель. Его операция `ассерт(...)` проверяет, возможно ли поместить заявку в буфер (не достиг ли он предельного объема), и если возможно – помещает. Операция `processEvent(...)` класса `PassiveBuffer` вызывает исключение, так как объекты этого класса не являются активными элементами, такими, которые самостоятельно могут перемещать заявки в системе. Для извлечения заявки из пассивного буфера блок обслуживающих приборов вызывает его операцию `getCall()`, которая извлекает заявку из буфера в соответствии с его дисциплиной (FIFO, LIFO и т.п.).

В отличие от пассивных, активные накопители `ActiveBuffer` являются активными объектами системы – они самостоятельно пытаются вернуть находящиеся в них заявки на обслуживающие приборы. Операция `ассерт(...)` этих накопителей все также вносит заявки во внутренний буфер, однако при этом каждый раз генерируется и вносится в общий журнал будущее событие попытки вернуть заявку на обслуживание. Указатель `invoker` этого события ссылается на активный буфер, поэтому при его наступлении вызывается метод `ActiveBuffer.processEvent(...)`, который извлекает соответствующую заявку из буфера (указатель на нее имеется в параметре `event`) и отправляет ее на вход обслуживающего блока – так, как будто эта заявка только что вошла в систему. Таким образом обеспечивается единообразная обработка и упрощение программного кода.

Объект маршрутизатор `Router` используется при моделировании сетей обслуживания. Он включает в себя коллекцию блоков обслуживания – узлов `nodes`, а у каждого блока обслуживания и у объекта, моделирующего входящий поток, указатели `nextElement` направлены на маршрутизатор. Таким образом маршрутизатор полностью управляет потоками заявок в сети. На Рисунке 6.8 изображена диаграмма соединения объектов в сети с тремя узлами. Сам маршрутизатор не может обрабатывать заявки, поэтому его операция `processEvent(...)` генерирует ошибку. Операция `ассерт(...)` этого элемента пе-

реадресует заявки узлам сети в зависимости от параметра source этой операции: если заявка только поступила в сеть из входящего потока, то переадресация производится на основе заданного вектора разделения входящего потока  $\mathbf{v}$ ; если же заявка поступает на маршрутизатор после обслуживания на одном из узлов, то ее перенаправление производится в соответствии с матрицей маршрутизации  $\mathbf{M}$  сети.

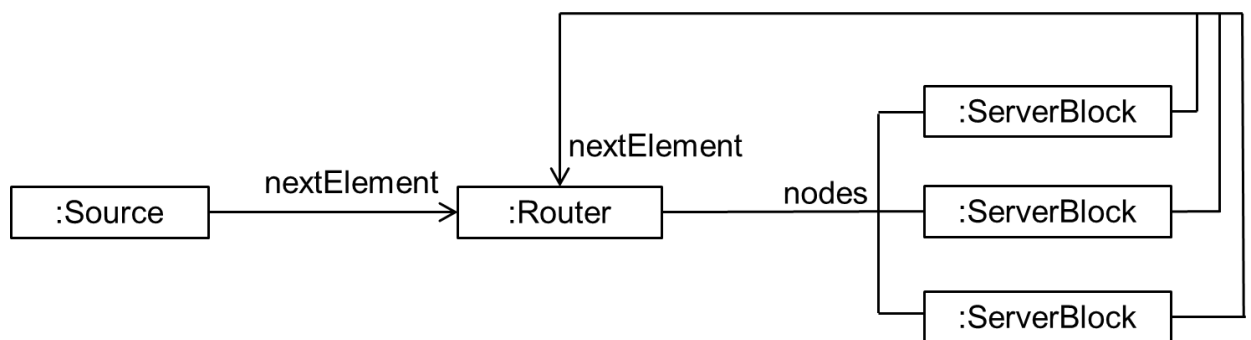


Рисунок 6.8 – Диаграмма объектов для сети из трех узлов

## 6.2 Архитектура приложения с расширяемой элементной базой предметной области

При разработке описываемой системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания возникает задача обеспечения ряда компонентов системы возможностью их расширения новыми алгоритмическими конструкциями в процессе эксплуатации. Кроме того, важным требованием является доступность этих расширений для выбора и задания параметров с помощью визуальных средств приложения.

В частности, задача касается, например, объектов, моделирующих случайные величины. Для этого применяются специальные алгоритмы имитационного моделирования. Существует множество различных законов распределения таких величин и, более того, исследователь может конструировать собственные специфические законы (алгоритмы моделирования). Поэтому для подобного приложения не представляется возможным заранее предусмотреть

и реализовать всю необходимую алгоритмическую базу, в связи с чем возникает задача обеспечения системы возможностью динамического расширения приложения новыми объектами и алгоритмами предметной области в процессе эксплуатации приложения. Решить эту задачу можно двумя способами:

1) предоставить в программе инструменты создания алгоритмических конструкций, т.е. по сути дела – инструменты создания и интерпретации программного кода на определенном языке программирования;

2) заложить возможность подключения пользовательских динамических библиотек, реализующих определенные (требуемые) интерфейсы.

Большинство систем имитационного моделирования [80, 176, 240] реализуют именно первый подход, распространяя его и на реализацию ключевых сценариев системы.

Для разрабатываемого в рамках настоящей работы приложения более предпочтительным является второй подход, так как, во-первых, он не накладывает жестких ограничений на используемый пользователем язык программирования, а во-вторых, позволяет создавать сопутствующие объекты, реализация средств конструирования которых в программе является задачей, трудоемкость решения которой значительно превышает общую трудоемкость реализации основного функционала. В данном контексте речь идет о визуальных элементах, позволяющих задавать параметры соответствующих невизуальных конструкций. В частности, для законов распределения – это задание их параметров. Параметры законов могут отличаться количеством, типом, формой задания (например, для некоторых параметров может потребоваться матричная запись) и т.п. Если предоставить пользователю возможность подключать к системе компоненты, реализующие алгоритмы и визуальные элементы управления для задания их параметров (в рассматриваемом примере это распределения случайных величин, алгоритмы генерации их реализаций и визуальные элементы для ввода значений параметров), то отпадает необходимость не только в интерпретации программного кода внутри приложения, но и потребность в средствах конструирования визуальных элементов управ-

ления.

В рассматриваемой задаче речь не идет об изменении или дополнении ключевых сценариев предметной области (в нашем случае это общий алгоритм имитационного моделирования), а лишь о дополнении ее новыми конечными элементами, которые будем называть базовыми. Для рассматриваемой системы имитационного моделирования такими базовыми элементами как раз и будут компоненты, реализующие поведение, необходимое для моделирования случайных величин, а также случайных процессов, потоков событий и т.п.

Поскольку описанная задача может встречаться и при создании программных систем с другой предметной областью, в данном разделе будем вести речь об общих принципах архитектуры приложений с расширяемой элементной базой предметной области.

Для обеспечения указанной расширяемости применим архитектурное решение «Дополнительный Модуль» [133]. Согласно этому подходу выделим базовый интерфейс создаваемых объектов `Object` (Рисунок 6.9). В общем случае мы его не конкретизируем, так как эти объекты имеют интерфейс, специфический для конкретной предметной области. В отличие от подхода [133], реализуем фабрику `Factory` как объект-коллекцию для загружаемых из дополнительных модулей типов. Для придания большей независимости от особенностей языка программирования введем специальные объекты-создатели `Creator` [67], единственные экземпляры которых (паттерн «Одиночка» [32]) и будут содержаться в указанной коллекции. Главное и единственное назначение конкретных создателей `ConcreteCreator` – инстанцирование соответствующего класса `ConcreteObject` из текущей динамической библиотеки.

Особенностью рассматриваемой задачи является наличие второй динамически загружаемой составляющей – визуальных объектов `Control`, предназначенных для отображения и редактирования в пользовательском интерфейсе атрибутов соответствующих объектов `Object`. Устройство этой части выглядит аналогичным образом: фабрика `VisualFactory` отвечает за загрузку из

библиотек и содержит коллекцию создателей с интерфейсом VisualCreator. Объекты ConcreteVisualCreator, реализующие этот интерфейс, в свою очередь, отвечают за инстанцирование соответствующих визуальных объектов ConcreteControl, реализующих общий интерфейс Control.

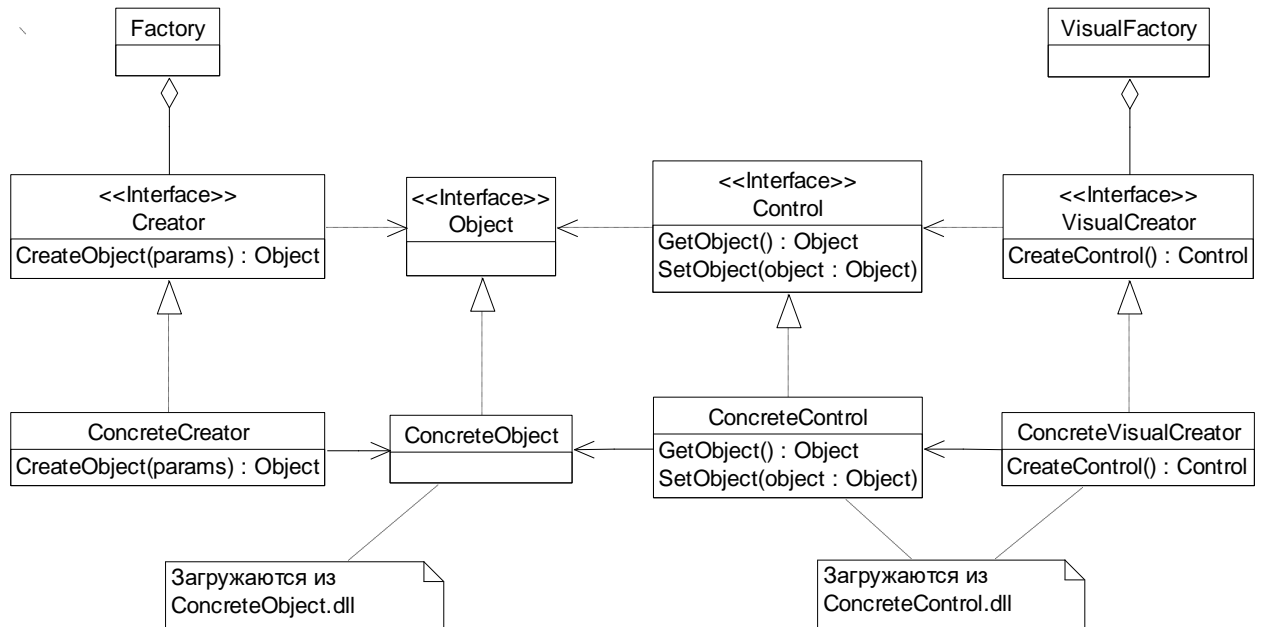


Рисунок 6.9 – Общая архитектура подсистемы подключаемых модулей

Но визуальная часть архитектуры выглядит немного по-другому. Во-первых, интерфейс Control конкретизирован до операций GetObject() и SetObject(), выполняющих соответственно генерацию невидимого объекта на основе данных, введенных пользователем, и установку состояния визуальных элементов в соответствии со значениями атрибутов конкретного невидимого объекта. Во-вторых, программа может поддерживать несколько технологий (типов) интерфейса пользователя. Каждый из них, естественно, предполагает использование специфических групп визуальных элементов. Для реализации подобной гибкости воспользуемся паттерном проектирования «Абстрактная Фабрика» [32], модифицированным под динамическую типизацию (Рисунок 6.10).

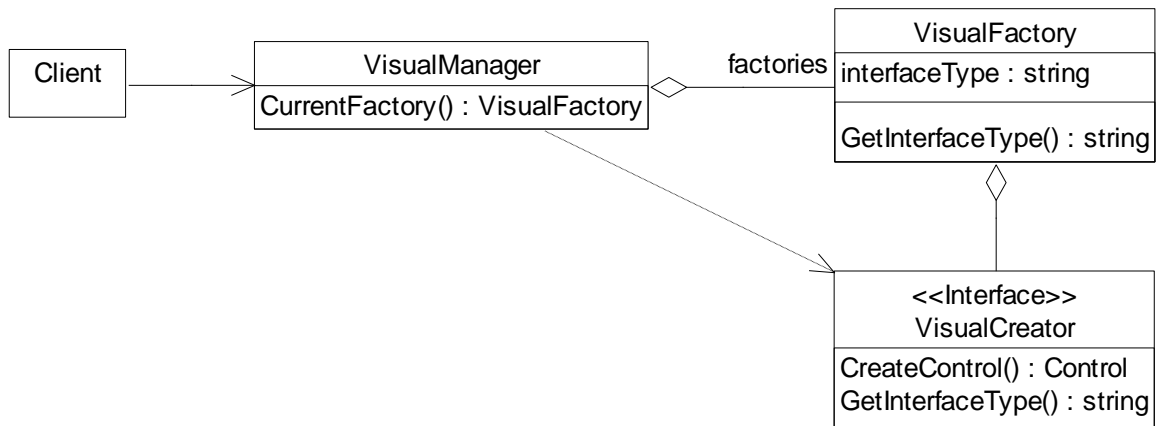


Рисунок 6.10 – Управление динамическим подключением фабрик визуальных элементов

Основная проблема, возникающая при этом – идентификация типа интерфейса пользователя, к которому относится данный визуальный объект. Эта задача достаточно легко решается с использованием соответствующих индикаторов. Такие индикаторы могут быть реализованы, например, с помощью соглашения об именовании классов. Однако более уместным решением является определение в интерфейсе `VisualCreator` специальной операции `GetInterfaceType()`, возвращающей идентификатор соответствующего типа интерфейса пользователя (для большей универсальности воспользуемся строковым типом `string`). В ходе загрузки каждого конкретного объекта-создателя загрузчик (объект `VisualManager`) определяет тип интерфейса, к которому относится данный создатель. Если фабрика `VisualFactory` с таким идентификатором типа интерфейса еще не создана, то она создается и добавляется в коллекцию `factories`. Затем создатель прикрепляется к своей фабрике. Настройки приложения должны каким-либо образом однозначно указывать объекту `VisualManager` используемый тип интерфейса пользователя и, соответственно, однозначно определять фабрику визуальных объектов, применяемую в текущем сеансе.

Объект `Client`, который обращается к `VisualManager` для создания визуальных элементов, получает указатель на текущую фабрику. Сам менеджер-загрузчик `VisualManager` реализуется по шаблону «Одиночка» [32].

В распределенных приложениях визуальные элементы управления и не-визуальные объекты логики могут работать в разных адресных пространствах. В связи с этим конкретные визуальные и не-визуальные объекты следует компилировать в разные динамические библиотеки (на диаграмме Рисунка 6.9 – это сборки «ConcreteObject.dll» и «ConcreteControl.dll» соответственно). Такое разделение также помогает поддерживать библиотеки визуальных элементов управления для различных типов интерфейса пользователя.

Рассмотрим еще один важный момент представленной архитектуры. Фабрика не-визуальных объектов должна уметь конструировать создаваемые объекты по требованию клиентов (данная операция не показана на диаграмме), при этом необходимо знать тип создаваемого объекта и параметры инициализации. В качестве типа может выступать любой идентификатор, например, имя класса, по которому и производится поиск в коллекции соответствующего объекта-создателя. А вот параметры инициализации для объектов различных классов наверняка будут различными как по числу, так и по типу. Решить эту проблему можно различными способами. Например, в фабричном методе `CreateObject(...)` в качестве параметров можно использовать нетипизированные массивы или XML-строки с сериализованными значениями [20]. Именно по этой причине на диаграмме Рисунка 6.9 параметр операции `CreateObject(...)` интерфейса `Creator` не типизирован. При реализации такого подхода, следует учитывать, что на разработчика компонентов ложится полная ответственность за корректную передачу параметров в коде и их корректную обработку в реализации создателя.

Рассмотрим реализацию предлагаемого решения для упомянутого выше примера объектов, представляющих распределения случайных величин для системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания. Главной операцией интерфейса `Distribution` (Рисунок 6.11) этих объектов является генерация следующего значения реализации случайной величины – метод `NextValue()`. Конкретные объекты-распределения `UniformDistribution` (равномерное распределение), `NormalDistribution` (нормальное распределение)

и другие (на диаграмме не показаны), каждый по-своему реализует эту операцию. Предусмотреть заранее все типы элементарных объектов для имитации распределений случайных величин невозможно, поэтому в описываемой программной системе пользователям предоставляется возможность в случае необходимости дополнять элементную алгоритмическую базу приложения с помощью компонентов, реализующих классы, имеющие интерфейс `Distribution`.

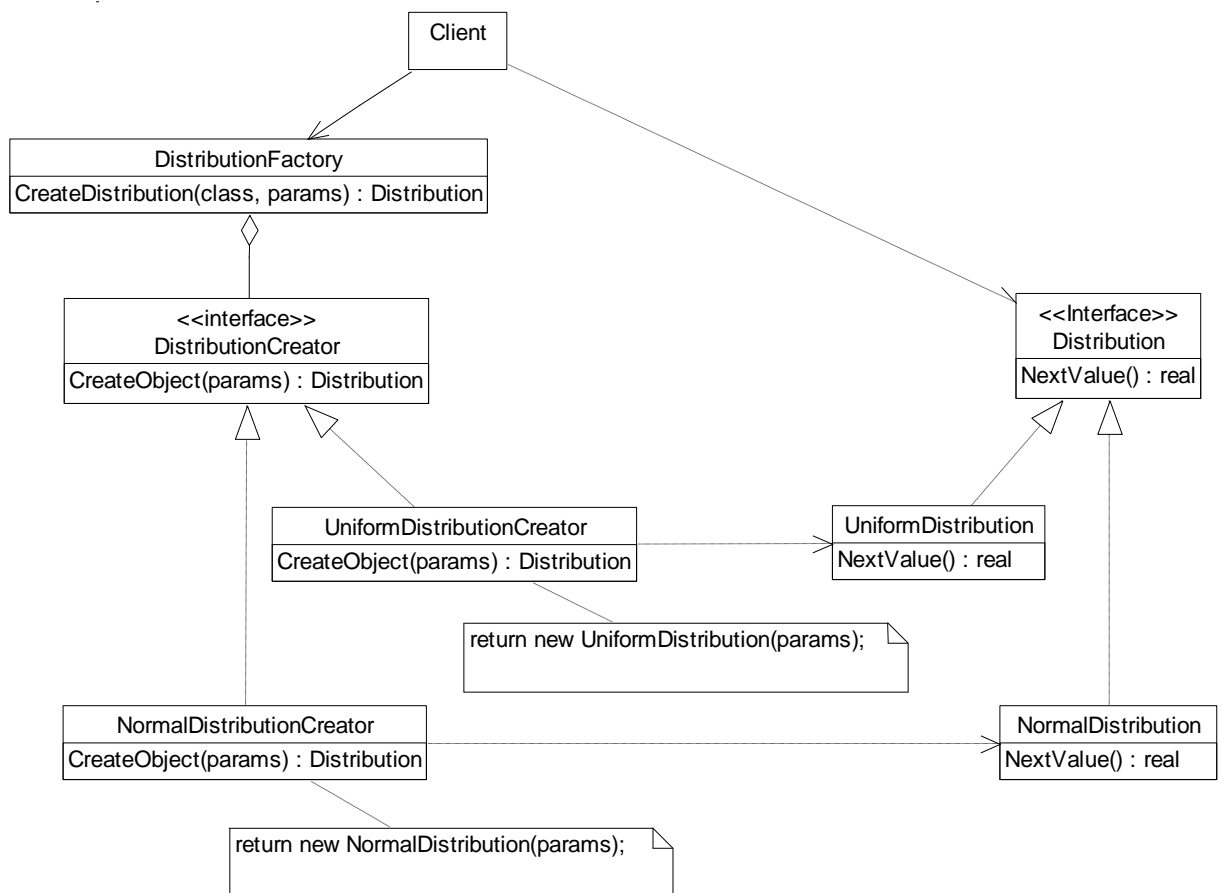


Рисунок 6.11 – Реализация расширяемой базы элементов приложения для объектов-распределений случайных величин

Создатели конкретных объектов распределений `UniformDistributionCreator` (для равномерно распределенной случайной величины), `NormalDistributionCreator` (для нормальной случайной величины) и другие напрямую инстанцируют соответствующие им классы `UniformDistribution`, `NormalDistribution` и т.д. При этом полученные ими нетипизированные параметры могут

быть разобраны как самими объектами-распределениями, так и внутри операции `CreateObject(...)` создателя перед непосредственным созданием экземпляра класса распределения. Таким образом, объект `Client` освобожден от необходимости знания внутреннего устройства объекта-переносчика данных параметров конкретного распределения.

Типичное применение предлагаемого решения – это формирование визуальных списков имеющихся типов объектов, в данном случае – различных распределений случайных величин на основе списка создателей в фабрике `DistributionFactory` и дальнейшая их визуализация с помощью объекта `DistributionVisualManager`, который мы дополнили операцией `CreateDistributionControl(...)` (Рисунок 6.12). Данная операция по запросу клиента для указанного в качестве параметра объекта класса `Distribution` производит поиск создателя соответствующего визуального элемента `DistributionControl` (объект-фабрика и поддержка разных типов интерфейса пользователя на диаграмме опущены для простоты понимания). При этом для клиента тип объекта `Distribution`, который он передает в качестве параметра, не конкретизирован, что позволяет работать на абстрактном уровне интерфейсов и таким образом реализовывать позднее связывание.

Получив указатель на объект `DistributionControl`, клиент заполняет его содержимым с помощью операции `SetObject(...)`, а затем при необходимости (например, после редактирования) – считывает информацию из визуального элемента с помощью операции `GetObject()`. Таким образом, даже на этом этапе для клиента не конкретизируются ни типы объектов `Distribution` и `DistributionControl`, ни параметры, которыми заполняется визуальный элемент: взаимодействие производится напрямую между конкретными объектами `DistributionControl` и `Distribution`. Благодаря отсутствию этой зависимости клиента от конкретных классов элементов и достигается расширяемость приложения по отношению к его элементной базе.

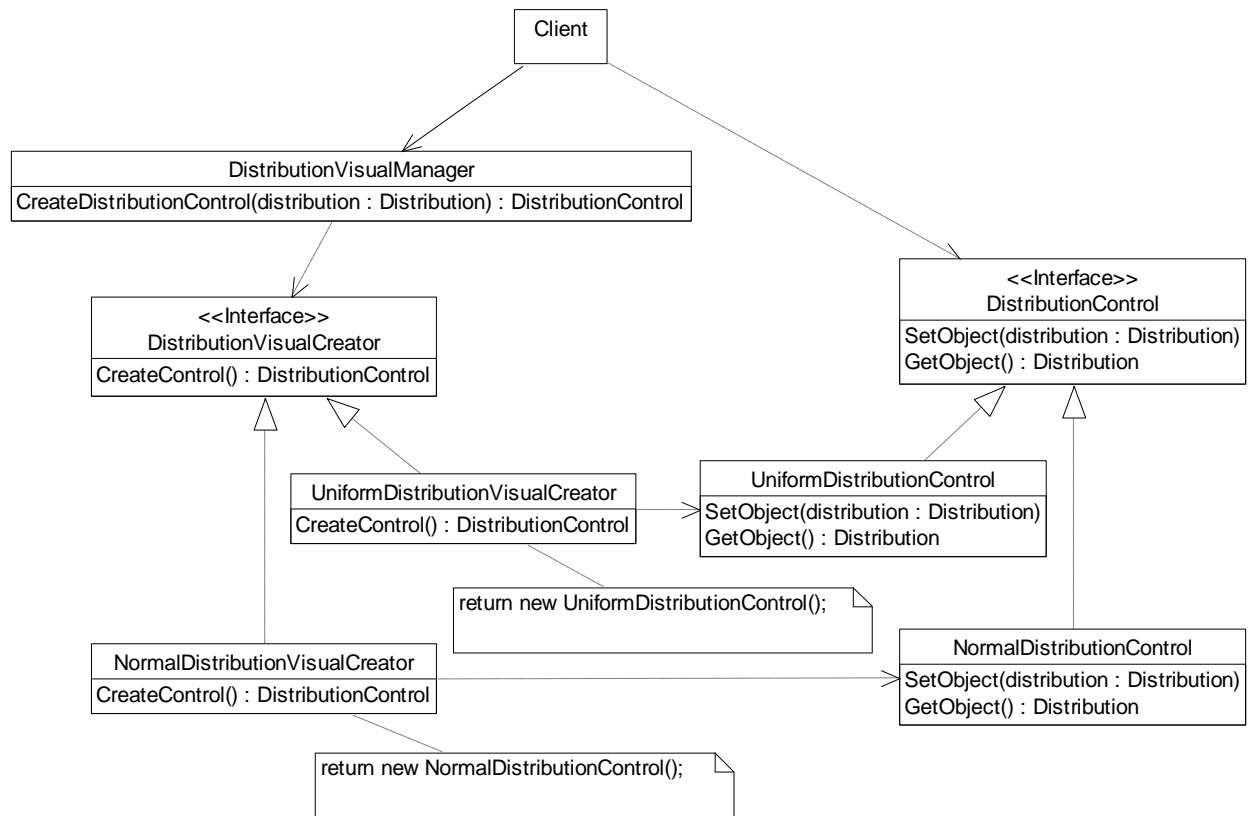


Рисунок 6.12 – Реализация визуального представления объектов-распределений случайных величин

Фабрика `DistributionFactory`, единственная в приложении (паттерн «Одиночка» [32]), реализует операцию `CreateDistribution`, в которой с помощью идентификатора `class` производится поиск нужного создателя и вызов его операции `CreateObject(...)` с соответствующими параметрами `params`. При этом в случае необходимости (например, при инициализации приложения или при необходимости инстанцирования конкретных классов распределений) эта операция обеспечивает возможность такого прямого инстанцирования, хотя подобное применение фабрик и невизуальных объектов является, скорее, исключением для рассматриваемого типа приложения и может встретиться только в отдельных специфичных случаях.

### 6.3 Компоненты сбора и обработки статистической информации

Результатом имитационного моделирования является реализация слу-

чайного процесса изменения состояния (количества заявок в узлах) сети массового обслуживания. Однако для исследователя наибольший интерес представляют статистические показатели функционирования. В частности, для целей анализа, выполненного в предыдущей главе, такими показателями являются выборочные средние, ковариации и маргинальные выборочные распределения числа заявок в узлах сети. В разработанной программе имитационного моделирования контур накопления и обработки статистической информации реализован с помощью классов иерархии `StatisticsAccumulator` (Рисунок 6.13).

Абстрактный класс `StatisticsAccumulator` содержит два основных атрибута, используемых для обработки статистики:

- `totalTime` – общее время моделирования;
- `generationVolume` – объем накопленной выборки.

Также этот класс объявляет интерфейс в виде основных операций, которые обязательно должны быть реализованы в потомках (все они в этом классе объявлены как абстрактные):

- `addInterval(interval, state)` – добавляет состояние системы `state` (массив целых чисел, соответствующих числу заявок в каждом узле сети) к общему массиву статистической информации, здесь `interval` – длительность интервала времени, в течение которого сохранялось указанное состояние;

- `getMeans()` – вычисляет и возвращает матрицу размера  $1 \times K$ , содержащую выборочные средние значения числа заявок в узлах сети (здесь  $K$  – количество узлов сети);

- `getCovariance()` – вычисляет и возвращает матрицу размера  $K \times K$  выборочных ковариаций числа заявок в узлах сети;

- `save(filename)` – сохраняет накопленный массив статистической информации в файле с именем `filename` для последующего анализа (см. п. 6.4.2);

- `merge(accumulator)` – присоединяет к текущему массив статистической информации другого объекта `StatisticsAccumulator`, заданного в качестве параметра `accumulator`.

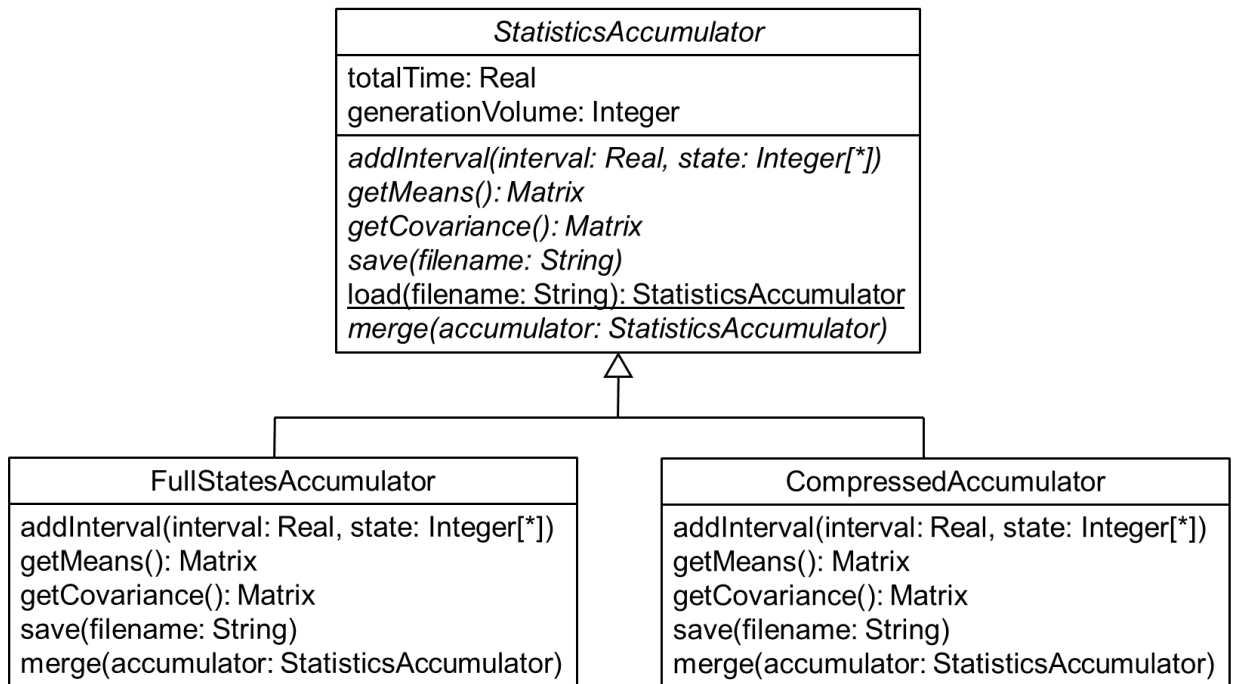


Рисунок 6.13 – Классы накопления и обработки статистической информации

Кроме указанных операций в данном классе реализован статический метод `load(filename)`, который создает новый объект `StatisticsAccumulator` и загружает в него статистические данные из файла `filename`, сохраненные командой `save(...)`. При этом в зависимости от информации, содержащейся в указанном файле инстанцируется тот или иной конкретный потомок класса `StatisticsAccumulator`.

В текущей реализации приложения класс `StatisticsAccumulator` имеет два конкретных потомка – классы `FullStatesAccumulator` и `CompressedAccumulator`.

Класс `FullStatesAccumulator` накапливает полную статистику о многомерных состояниях моделируемой сети. Данные записываются в формате <состояние, время>. Здесь состояние – массив целых чисел, содержащий количество заявок в каждом из узлов; время – продолжительность пребывания системы в этом состоянии. Вычисление выборочных средних и ковариаций производится по окончании моделирования путем усреднения по времени всего массива данных. Основной недостаток использования данного класса –

при больших размерностях задачи (количестве узлов сети) и объемах выборки (дисперсии состояний) требует значительного объема оперативной памяти (или дисковой – при сохранении в файл). Основное достоинство – содержит полную статистическую информацию, что позволяет производить ее анализ с помощью статистических программных инструментов, не входящих в данное приложение.

Класс `CompressedAccumulator` не хранит полную статистическую информацию процесса смены состояний, а при каждом изменении состояния пересчитывает текущие значения выборочных средних и ковариаций. Точнее говоря, объект класса `CompressedAccumulator` накапливает в соответствующих регистрах интегральные значения выборочных начальных моментов (первого и второго порядков), а также информацию, необходимую для построения маргинальных распределений числа заявок для каждого узла сети. По окончании моделирования выборочные средние и ковариации легко вычисляются на основе указанных интегральных значений. Главными достоинствами данного подхода является малый объем требуемой оперативной и дисковой памяти, а также малое время, требуемое для вычисления выборочных характеристик. Основной недостаток – в виду потери информации об отдельных изменениях состояния невозможно воссоздать реализацию случайного процесса изменения состояний и производить дополнительный статистический анализ.

## **6.4 Руководство пользователя программы имитационного моделирования процессов массового обслуживания**

### **6.4.1 Задание исходных данных**

В главном окне программы (Рисунок 6.14) задаются параметры моделируемой сети. В этом окне первоначально доступна вкладка «Задача», в которой задаются все параметры модели и условий моделирования. Ниже опишем подробнее каждый раздел этой вкладки.

**Входящий поток.** Здесь выбирается тип входящего потока заявок из списка. В настоящий момент реализованы четыре доступных типа входящих потоков, которые полностью покрывают модели, приведенные в предыдущих главах, и подавляющее большинство моделей, рассматриваемых в теории массового обслуживания. Это такие модели потоков как простейший, рекуррентный; МАР, полумарковский. Напомним (см. п. 6.2), что пользователи могут дополнять имеющуюся библиотеку приложения собственными компонентами предметной области, в том числе и новыми моделями потоков событий.

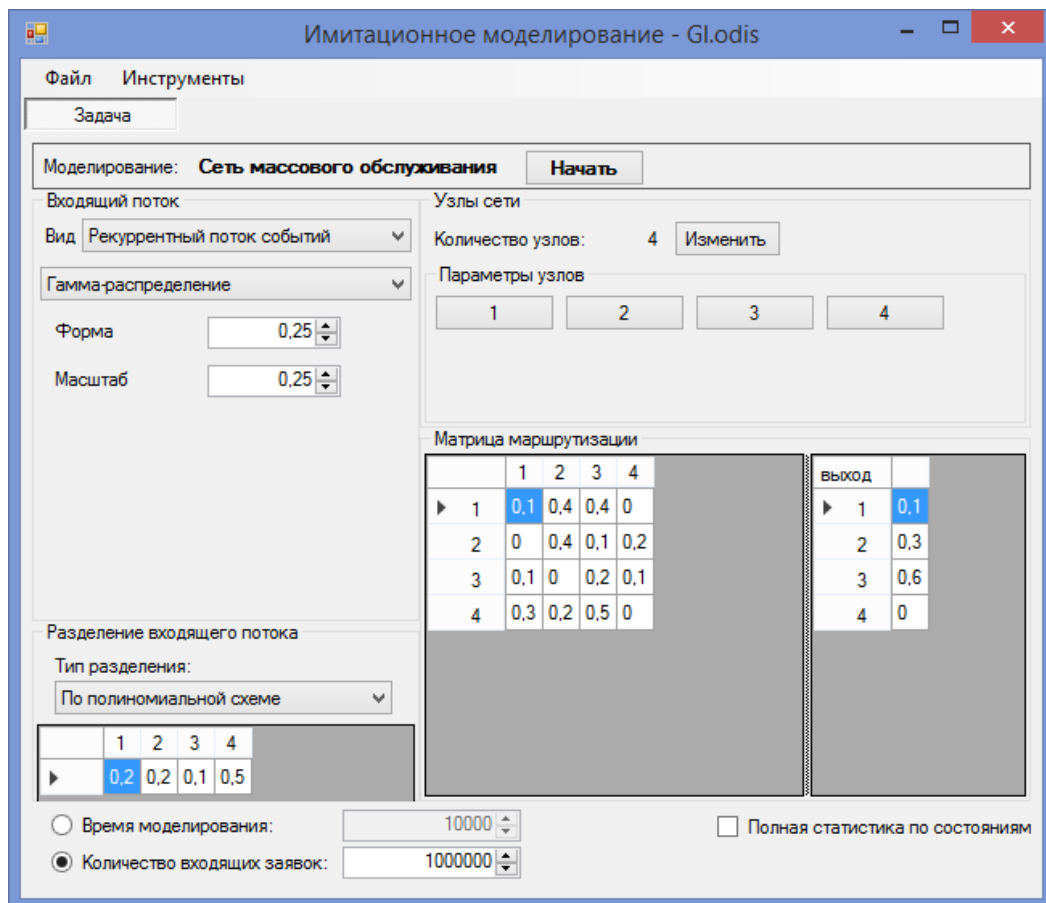


Рисунок 6.14 – Главное окно программы имитационного моделирования сетей массового обслуживания

В этом же окне задаются и параметры выбранного потока в зависимости от его типа. Для указанных типов потоков это следующие данные:

- для простейшего потока – его параметр (интенсивность);
- для рекуррентного потока (изображение на Рисунке 6.14) – закон рас-

пределения интервалов между событиями. Выбирается из списка доступных для моделирования распределений случайных величин. Также, как и для моделей потоков, библиотека распределений случайных величин может быть дополнена с использованием технологии, описанной в п. 6.2;

- для МАР-потока (Рисунок 6.15) – число состояний управляющей цепи, матрица  $Q$  инфинитезимальных коэффициентов, диагональная матрица  $\Lambda$  условных интенсивностей потока, матрица  $D$  вероятностей наступления событий в моменты смены состояния управляющей цепи (используется способ задания [111], см. п. 1.2.1). На Рисунке 6.15 также изображено типовое окно ввода элементов матрицы (в данном примере диагональные элементы заполняются автоматически, это свойство матрицы  $Q$ );

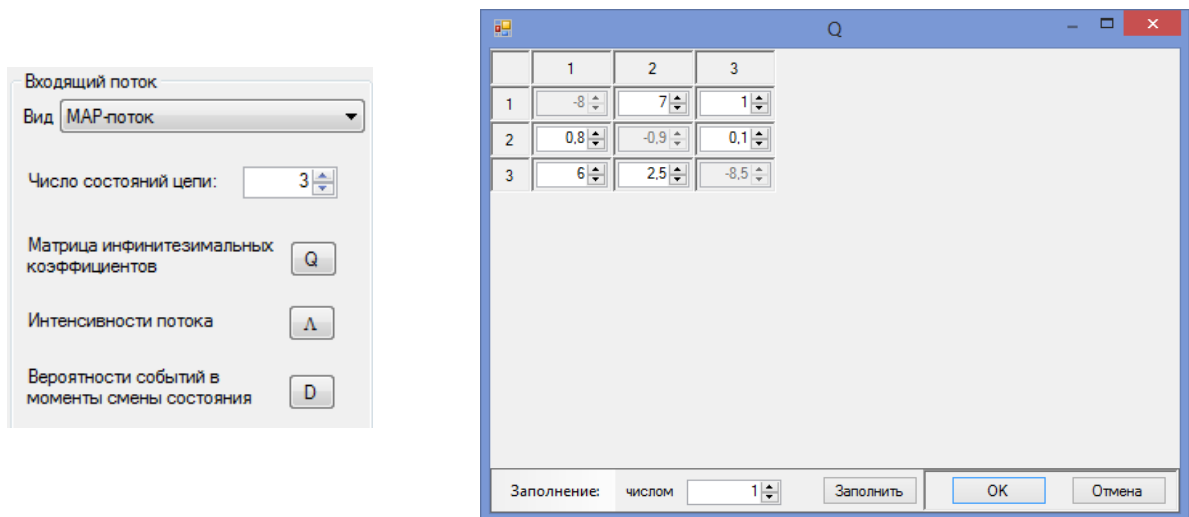


Рисунок 6.15 – Задание параметров МАР-потока и типовое окно ввода элементов числовой матрицы

- для полумарковского потока (Рисунок 6.16) – число состояний вложенной цепи, полумарковская матрица в форме  $A(x) = P \circ G(x)$  (подробнее см. п. 5.2.3). На Рисунке 6.16 также представлено типовое окно ввода матрицы  $G(x)$ , элементами которой являются функции распределения случайных величин.

Следует отметить, что выбор закона распределения случайной величины и ввод его параметров в различных частях приложения осуществляется одно-

ТИПНО.

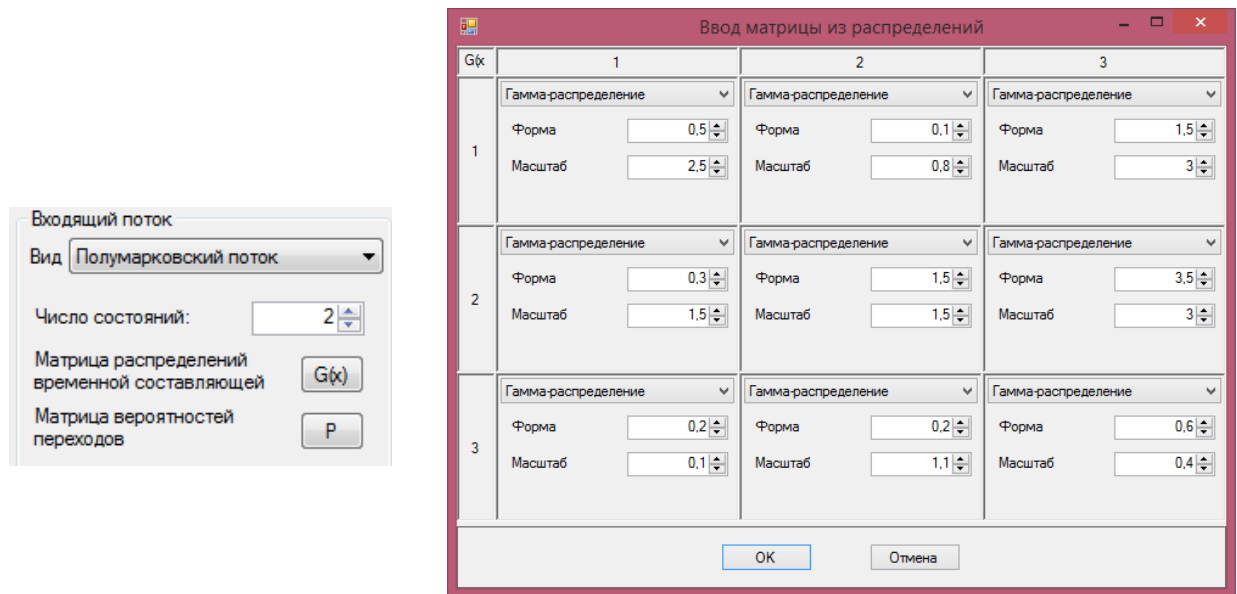


Рисунок 6.16 – Задание параметров полумарковского окна и пример типового окна ввода матрицы, элементами которой являются функции распределения

**Узлы сети.** Количество узлов сети задается нажатием соответствующей кнопки «Изменить» (см. Рисунок 6.14). В случае если это число изменено, то вектор разделения и матрица маршрутизации автоматически меняют свою размерность.

В разделе «Параметры узлов» отображаются кнопки с номерами узлов сети. При нажатии на такую кнопку открывается окно редактирования параметров соответствующего узла (Рисунок 6.17):

- «Число приборов» – вводится конкретное число приборов в узле либо с помощью переключателя «бесконечное» указывается, что число приборов не ограничено;

- «Распределение времени обслуживания» – из списка доступных распределений выбирается закон распределения времени обслуживания одной заявки в данном узле и параметры этого распределения (аналогично тому, как это делалось выше для рекуррентного потока или для элемента матрицы  $G(x)$  для полумарковского потока);

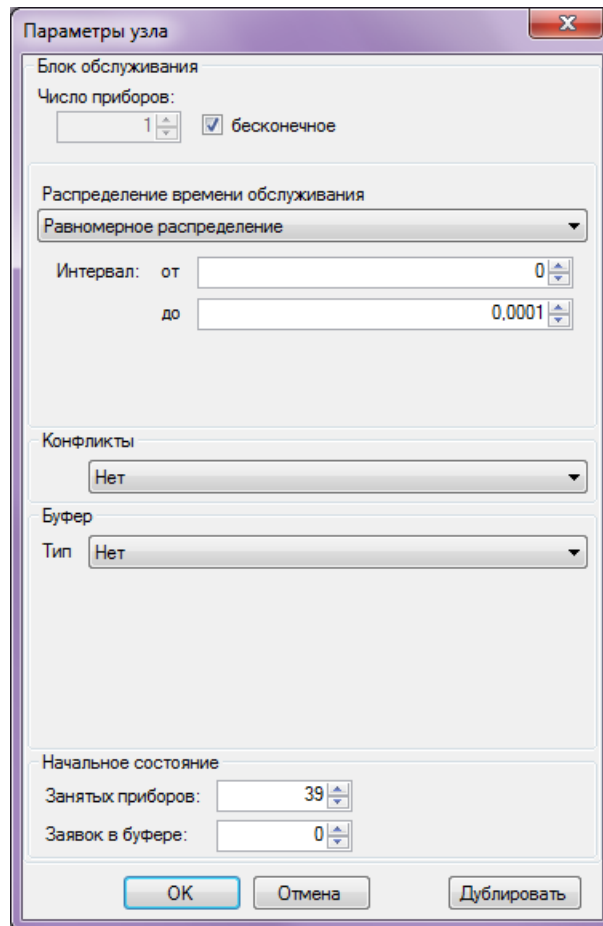


Рисунок 6.17 – Окно задания параметров узла сети

- «Конфликты» – отслеживание конфликтов при поступлении новой заявки (имеет смысл только при ограниченном числе приборов). Доступны следующие варианты выбора:

- пункт «Нет» означает отсутствие конфликтов между заявками. Если все приборы заняты, входящая заявка помещается в буфер. Если в буфере есть свободное место, то заявка размещается в нем, если нет – заявка покидает систему (получает отказ в обслуживании). Ниже всю эту совокупность действий будем называть «поместить заявку в буфер»;

- пункт «Конфликт» означает, что если все приборы заняты, заявка выбирает один из них случайным образом. Далее, входящая заявка вместе с заявкой, которая обслуживалась на выбранном приборе, обе помещаются в буфер;

- «Буфер» – задает тип буфера:

- пункт «Нет» означает отсутствие буфера;

- пункт «Очередь» означает, что буфер организует заявки в виде очереди. Имеется возможность задать ее длину (Рисунок 6.18) или указать, что очередь не ограничена;

Рисунок 6.18 – Задание параметров очереди

- пункт «ИПВ» означает, что буфер представляет собой источник повторных вызовов. Для него задается (Рисунок 6.19) закон распределения времени пребывания заявки в буфере («Закон задержки») из списка доступных распределений и определяются параметры выбранного распределения;

Рисунок 6.19 – Задание параметров источника повторных вызовов

«Начальное состояние» – в этом разделе задается число заявок в узле в начальный момент времени с помощью параметров «Занятых приборов» и «Заявок в буфере».

Кнопка «Дублировать» в окне параметров узла (Рисунок 6.17) позволяет скопировать выбранные параметры на остальные узлы сети.

**Параметры маршрутизации** в программе задаются в виде сеток для задания элементов вектора  $\mathbf{v}$  разделения входящего потока по узлам и матрицы маршрутизации  $\mathbf{M}$ . Эти элементы ввода расположены в главном окне программы (Рисунок 6.14). Вектор выхода из сети вычисляется автоматически на основе элементов матрицы маршрутизации. Подробнее о параметрах маршрутизации в СеМО см. п. 4.1.

**Параметры моделирования** задаются в нижней части главного окна приложения (Рисунок 6.14) и представляют собой задание условия останова и выбор типа компонента сбора статистики.

Условие окончания моделирования задается либо временем моделирования (измеряется в единицах модельного времени), либо количеством входящих заявок (как только в систему поступает последняя заявка, моделирование останавливается).

Опция «Полная статистика по состояниям» задает тип накопителя статистической информации (см. п. 6.3). Выбор данной опции соответствует использованию компонента `FullStatesAccumulator`, иначе будет использован `CompressedAccumulator`. Достоинства и недостатки каждого из них подробно описаны в п. 6.3.

#### **6.4.2 Выполнение расчетов и анализ результатов**

Для выполнения моделирования в главном окне программы (Рисунок 6.14) следует нажать кнопку «Начать» (расположена в верхней части окна). Появившийся индикатор прогресса (Рисунок 6.20) будет отображать текущий прогресс процесса моделирования. С помощью кнопки «Прервать» в этом окне можно остановить процесс моделирования, при этом будет произведен расчет всех результатов на основе выполненной части моделирования.

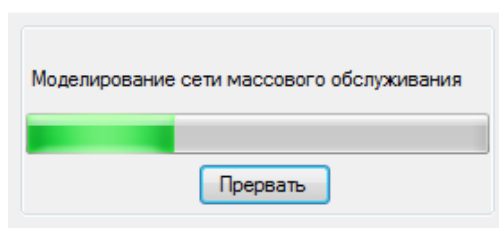


Рисунок 6.20 – Окно прогресса моделирования.

По окончании моделирования в главном окне открывается закладка «Результаты» (Рисунок 6.21). Здесь в виде текста выводится основная информация о результатах моделирования: финальное значение таймера модельного времени, число сгенерированных входящих заявок, общее число смен состояний сети, вектор выборочных средних и матрица выборочных ковариаций числа заявок в узлах сети, построенные на основе результатов имитационного моделирования.

С помощью кнопки «Сохранить» можно сохранить статистическую информацию, накопленную в результате моделирования, в текстовый файл. Здесь вызывается операция `save(...)` использованного в процессе моделирования компонента `StatisticsAccumulator` (см. п. 6.3). В зависимости от типа накопителя статистики в файле будут сохранены либо все состояния сети с продолжительностью пребывания в них, либо интегральные характеристики среднего, корреляций и маргинальных распределений. Сохраненные файлы можно в будущем загрузить в окно анализа результатов с помощью кнопки «Загрузить». При этом, если размерности текущей задачи и той, к которой относится файл, совпадают, программа предложит объединить их статистические данные. Это имеет смысл делать, если моделирование производилось неоднократно с одними и теми же параметрами сети. Если же размерности не совпадают, то статданные из файла заменят открытые в окне результатов. Подобные операции можно также произвести с помощью команды «Анализ результатов» меню «Инструменты» (см. ниже).

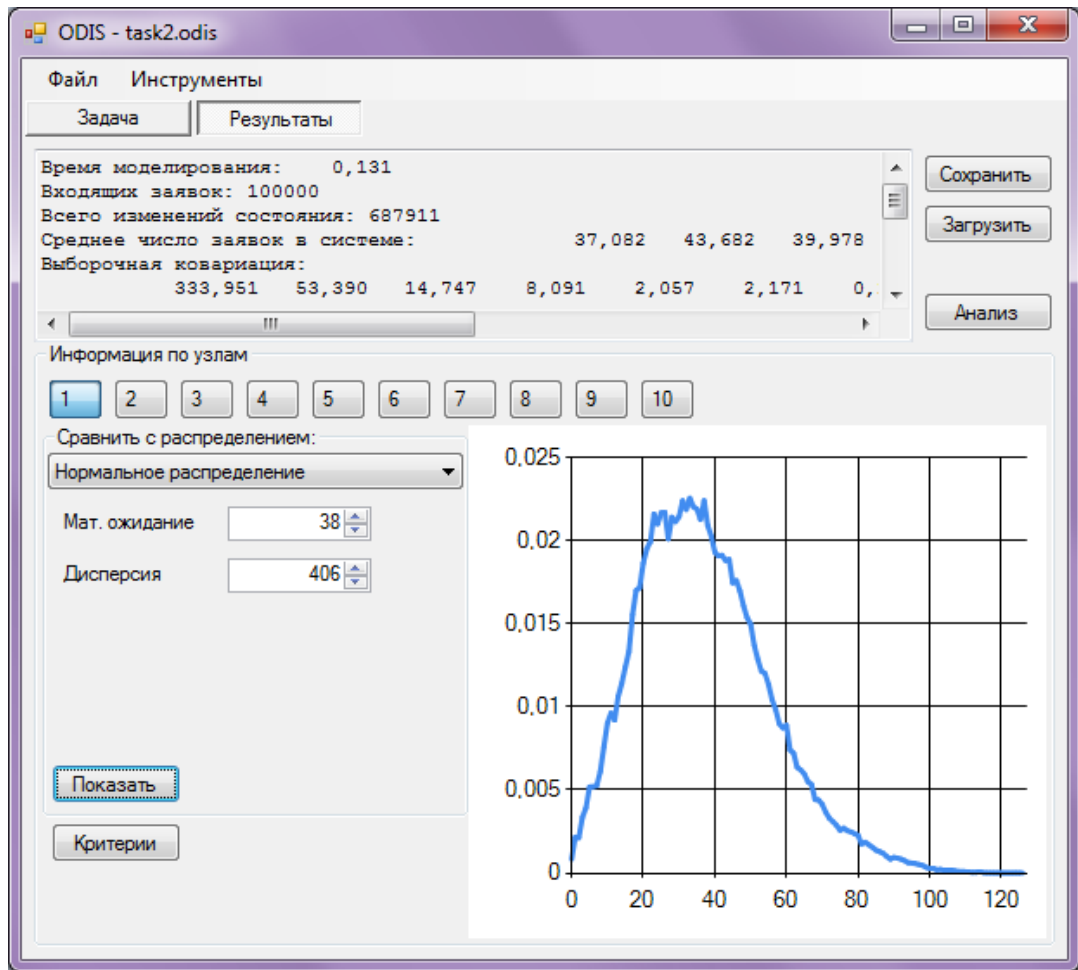


Рисунок 6.21 – Представление результатов моделирования

Кнопка «Анализ» отображает окно для расчета оптимального числа приборов, выполненного на основе результатов имитационного моделирования (Рисунок 6.22). Задав требуемый уровень информационной надежности и нажав кнопку «Вычислить», получаем значения оптимального числа приборов в узлах сети. Подробнее о расчете оптимального числа приборов в узлах сети см. п. 4.7.

Ниже в окне результатов моделирования (Рисунок 6.21) расположен раздел «Информация по узлам», который содержит информацию по маргинальным распределениям вероятностей числа занятых приборов в узлах сети. Большую часть этого раздела занимает график полигона относительных частот распределения числа заявок в выбранном узле сети. Выбор узла производится путем нажатия на кнопку с соответствующим номером из ряда кнопок, расположенных над графиком (на Рисунке 6.21 выбран узел 1).

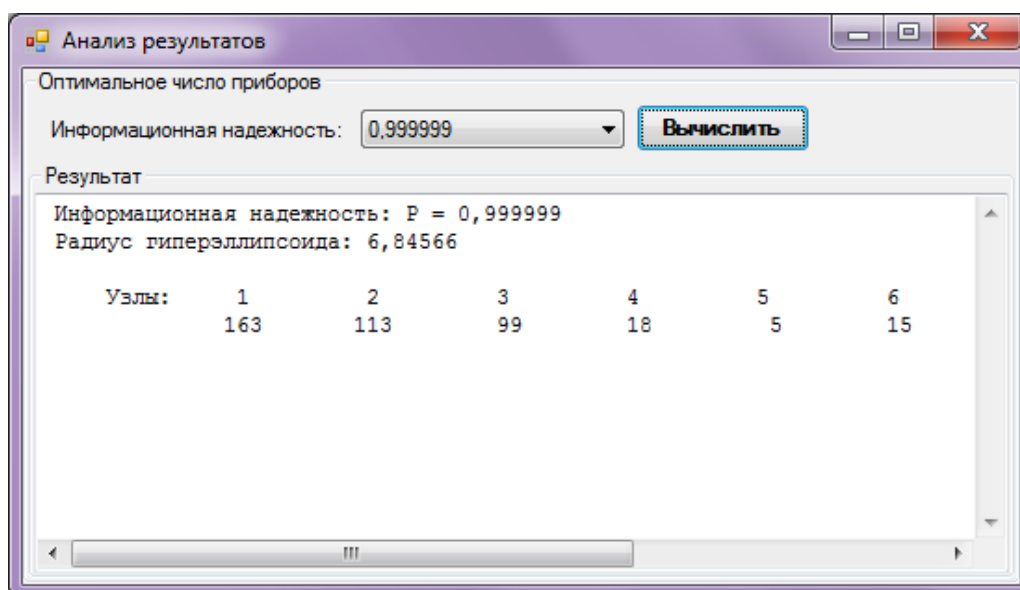


Рисунок 6.22 – Окно анализа результатов моделирования

Контекстное меню графика (Рисунок 6.23) содержит три команды:

1. «Показать значения» – на график выводятся значения относительных частот (удобно использовать при небольшом максимальном числе заявок в системе).

2. «Сохранить значения» – сохраняет эмпирический ряд распределения, изображенный на графике, в текстовом файле в формате <значение, относительная\_частота> с пробелом в качестве разделителя.

3. «Сохранить рисунок» – сохраняет рисунок в графическом формате. Доступны следующие форматы графических файлов для сохранения: растровые BMP, JPG, GIF и векторный формат EMF.

Справа от графика расположена панель сравнения полученного эмпирического распределения с выбранным теоретическим. Для выполнения такого сравнения следует выбрать нужное теоретическое распределение и нажать кнопку «Показать». Относительные частоты этого распределения для дискретных значений величины будут отображены на графике в виде красной тонкой линии (Рисунок 6.24).

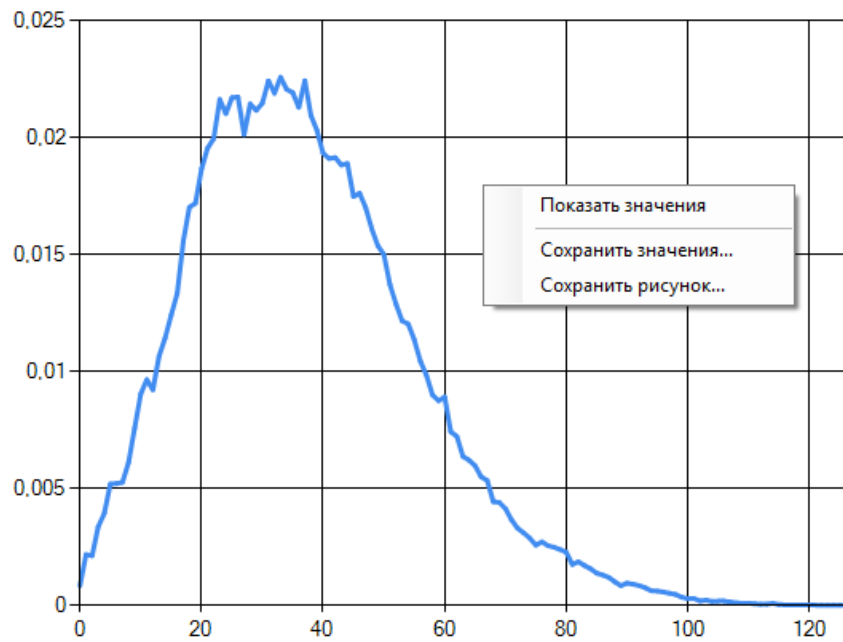


Рисунок 6.23 – Контекстное меню графика

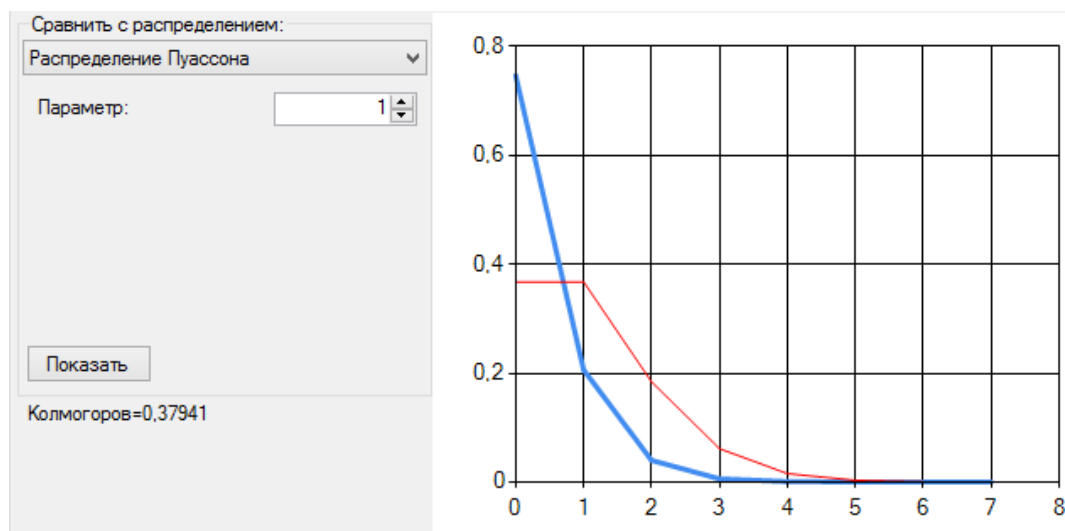


Рисунок 6.24 – Сравнение эмпирического и теоретического распределений

С помощью кнопки «Критерии» производится вычисление расстояния Колмогорова между отображаемыми распределениями (подробнее см. п. 5.1).

В меню «Инструменты» приложения содержится команда «Анализ результатов», которая используется для загрузки файлов со статистической информацией, полученной ранее в результате моделирования и сохраненной в файле с помощью команд окна результатов моделирования. При выборе этой команды появляется диалоговое окно для выбора файлов с результатами, в

котором можно выбрать сразу несколько файлов (Рисунок 6.25). Естественно, имеет смысл выбирать только файлы с результатами имитационного моделирования для одной и той же модели сети.

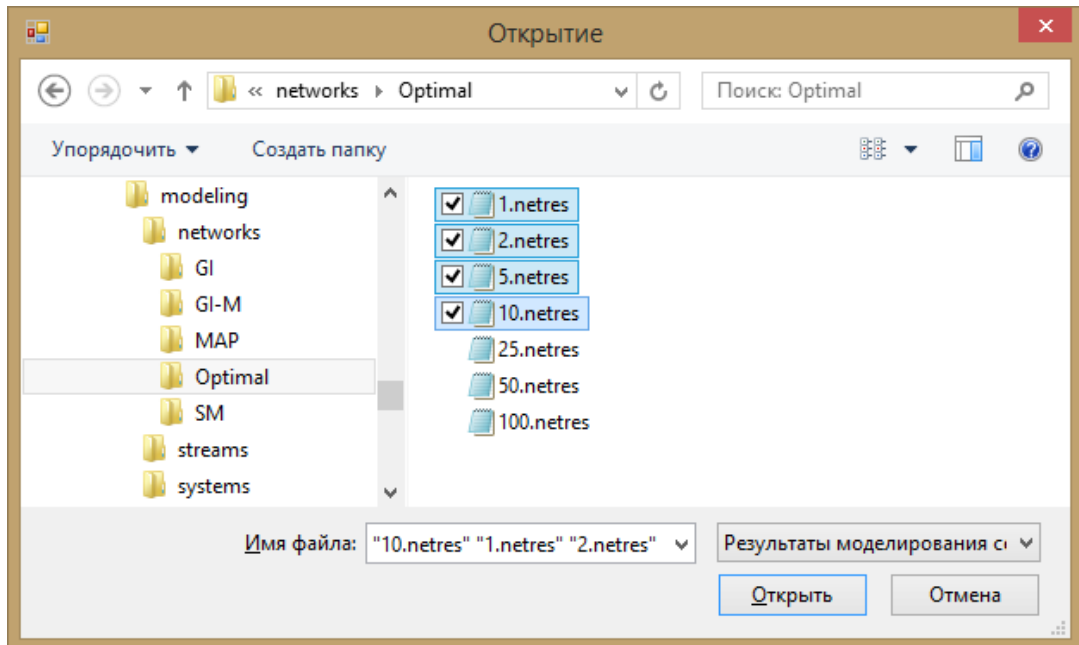


Рисунок 6.25 – Окно выбора файлов с результатами для их анализа

После выбора файлов производится их обработка, которая заключается в слиянии содержащейся в этих файлах статистической информации с помощью операции `merge(...)` объектов класса `StatisticsAccumulator` (см. п. 6.3). По окончании слияния отображается вкладка «Результаты», описанная выше и содержащая представление результатов обработки статистической информации из указанных файлов в том же виде, как и по окончании моделирования.

Приложение имеет также другие команды и настройки, описание которых выходит за рамки данной работы.

## 6.5 Алгоритмы численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем и сетей обслуживания

Так как большинство аналитических формул для расчета характеристик исследуемых процессов включает в себя необходимость вычисления определенных интегралов, решения матричных уравнений и систем уравнений,

наиболее эффективным способом реализации соответствующих расчетов является использование специального программного обеспечения для математических расчетов, которое обычно называют математическим процессором. В настоящей работе в качестве такого процессора использовалась система математических вычислений Mathcad [120].

Ниже представлены три основных типа алгоритмов, которые используются в работе для решения задач анализа сетей массового обслуживания. Алгоритмы решения задач для потоков, систем и многофазных систем обслуживания имеют аналогичный, но более простой вид. Приведенные алгоритмы снабжены фрагментами документов Mathcad, соответствующими конкретным решаемым задачам.

### 6.5.1 Вычисление параметров гауссовской аппроксимации

Общий алгоритм вычисления параметров (вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций) гауссовских аппроксимаций многомерных распределений числа заявок в узлах сети вида (4.10) для различных типов входящих потоков имеет следующий вид:

#### Шаг 1. Задание исходных данных.

##### 1.1. Задание параметров входящего потока.

##### 1.1.1. Задается параметр высокой интенсивности входящего потока:

$$N := 1$$

1.1.2. Задаются параметры  $\lambda$  и  $\kappa$  входящего потока, которые вычисляются по формулам Таблицы 1.1 в зависимости от типа потока (пример приведен для рекуррентного потока с длинами интервалов между событиями, имеющими гамма-распределение с параметром формы  $\alpha$  и масштаба  $\beta$ ):

$$\alpha := 0.25 \quad \beta := 0.25$$

$$\begin{aligned} \lambda &:= \frac{\beta}{\alpha} & \sigma^2 &:= \frac{\alpha}{\beta^2} & a_1 &:= \frac{1}{\lambda} & \lambda &= 1 \\ \kappa &:= \lambda^3 \cdot (\sigma^2 - a_1^2) & \kappa &= 3 \end{aligned}$$

## 1.2. Задание параметров маршрутизации

### 1.2.1. Число узлов сети:

$$K := 4$$

### 1.2.2. Вектор разделения входящего потока по узлам:

$$v := (0.2 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.5)$$

### 1.2.3. Матрица маршрутизации:

$$M := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Задание параметров обслуживания. В примере длительность обслуживания в каждом узле имеет гамма-распределение с параметрами формы и масштабов, определенных для каждого узла как компоненты векторов  $\alpha S$  и  $\beta S$  соответственно:

$$\alpha S := \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1.5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \beta S := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Также определяем общий вид преобразования Фурье – Стилтеса для функции распределения гамма-величины:

$$j := \sqrt{-1}$$

$$Bs(\text{shape}, \text{rate}, u) := \left( 1 - j \cdot \frac{u}{\text{rate}} \right)^{-\text{shape}}$$

**Шаг 2. Основные расчеты.****2.1. Формируем вспомогательные матрицы:**

$$B(u) := \begin{pmatrix} Bs(\alpha S_0, \beta S_0, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Bs(\alpha S_1, \beta S_1, u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Bs(\alpha S_2, \beta S_2, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Bs(\alpha S_3, \beta S_3, u) \end{pmatrix}$$

$$I := \text{identity}(K)$$

$$G(u) := v \cdot (I - B(u) \cdot M)^{-1} \cdot (B(u) - I)$$

**2.2. Вычисляем вектор  $Y_e$ :**

$$Y := \text{for } k \in 0..K - 1$$

$$Y_k \leftarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j \cdot u \cdot t}}{j \cdot u} \cdot G(u)_{0,k} du \right) dt$$

**2.3. Вычисляем матрицу  $V$ :**

$$V := \text{for } k \in 0..K - 1$$

$$\text{for } l \in 0..K - 1$$

$$V_{k,l} \leftarrow \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j \cdot u \cdot t}}{j \cdot u} G(u)_{0,k} du \right) \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j \cdot u \cdot t}}{j \cdot u} G(u)_{0,l} du \right) dt$$

**2.4. Вычисляем вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций гауссовской аппроксимации:**

$$\text{Means} := N \cdot \text{lambda} \cdot Y$$

```

Covar :=
  for k ∈ 0.. K - 1
    for l ∈ 0.. K - 1
      Covark,l ← N·kappa·Vk,l
    Covark,k ← Covark,k + N·lambda·Yk
  return Covar

```

### Шаг 3. Вывод результатов.

#### 3.1. Вектор математических ожиданий:

$$\text{Means} = \begin{pmatrix} 0.305 \\ 1.009 \\ 0.53 \\ 1.616 \end{pmatrix}$$

#### 3.2. Матрица ковариаций:

$$\text{Covar} = \begin{pmatrix} 0.342 & 0.094 & 0.064 & 0.219 \\ 0.094 & 1.297 & 0.166 & 0.534 \\ 0.064 & 0.166 & 0.646 & 0.386 \\ 0.219 & 0.534 & 0.386 & 3.097 \end{pmatrix}$$

### 6.5.2 Построение ряда распределения на основе аппроксимации третьего порядка

К сожалению, даже выполнение алгоритма, изложенного выше, на современном компьютере в зависимости от размерности задачи может занимать от нескольких минут до нескольких часов. Для построения многомерного распределения вероятностей аппроксимации третьего порядка требуется использование трехмерных массивов из результатов вычисления кратных интегралов и вычисление обратного преобразования Фурье от полученной функции (4.66) векторного аргумента. Такое вычисление в системе Mathcad займет слишком много времени, поэтому в настоящей работе ограничимся лишь построением маргинального распределения числа заявок в выбранном узле сети.

Для этого дополним предыдущий файл следующими дополнительными шагами.

**Шаг 4.** Задаем номер узла, для которого будут производиться расчеты:

$$k := 2$$

**Шаг 5.** Вычисляем коэффициенты при слагаемых в экспоненте для функции (4.66).

5.1. Вычисляем «диагональные» элементы  $Z_{klm}$  трехмерного массива из выражения (4.66):

$$Z := \text{for } k \in 0..K - 1$$

$$Z_k \leftarrow \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j \cdot u \cdot t}}{j \cdot u} G(u)_{0,k} du \right)^3 dt \quad Z = \begin{pmatrix} 0.0007 \\ 0.0105 \\ 0.0040 \\ 0.2386 \end{pmatrix}$$

5.2. Вычисляем значение коэффициента  $\mu$  (2.112):

$$a2 := \text{sigma2} + a1^2 \quad a3 := \frac{(2 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha^2 + \alpha^3)}{\beta^3}$$

$$\mu := 6\text{lambda} + 3\text{lambda}^2 \cdot a2 \cdot \text{kappa} - \text{lambda}^4 \cdot a3$$

$$\mu = 6$$

5.3. Вычисляем искомые коэффициенты:

$$c1 := Y_{k-1}$$

$$c2 := V_{k-1, k-1}$$

$$c3 := c1 + (c2 - c1) \cdot 3 + N \cdot \mu \cdot Z_{k-1}$$

**Шаг 6.** Построение ряда маргинального распределения вероятностей числа заявок в выбранном узле сети.

6.1. Составляем функцию (4.66) для заданного узла:

$$h(u) := \exp \left[ j \cdot u \cdot c1 + \frac{(j \cdot u)^2}{2} \cdot c2 + \frac{(j \cdot u)^3}{6} \cdot c3 \right]$$

6.2. Задаем диапазон точек для построения ряда распределения:

$$M := 20$$

$$i := 0..M$$

6.3. Вычисляем значения обратного преобразования Фурье для выбранных точек и убеждаемся, что в заданный диапазон попали все существенные значения (для этого выводим значение для последней точки  $i$ ):

$$P1_i := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \cdot u \cdot i} \cdot h(u) \, du$$

$$P1_M = -1.217 \times 10^{-6}$$

6.4. Избавляемся от комплексных составляющих и нормируем ряд:

$$P2_i := \frac{1}{4} \cdot \left( P1_i + \overline{P1_i} + \left| P1_i + \overline{P1_i} \right| \right)$$

$$d := \sum_{i=0}^M P2_i$$

$$P := \frac{P2}{d}$$

6.5. Выводим результат:

	0
0	0.3489
1	0.3180
2	0.1969
3	0.0909
4	0.0328
5	$9.5858 \cdot 10^{-3}$
6	$2.3204 \cdot 10^{-3}$
P = 7	$4.7125 \cdot 10^{-4}$
8	$8.1427 \cdot 10^{-5}$
9	$1.2152 \cdot 10^{-5}$
10	$1.6521 \cdot 10^{-6}$
11	$1.4138 \cdot 10^{-7}$
12	0.0000
13	$5.4652 \cdot 10^{-8}$
14	$7.9428 \cdot 10^{-8}$
15	...

### 6.5.3 Вычисление моментов первого и второго порядков для сети GI-(M/∞)<sup>K</sup>

Ниже приведен алгоритм вычисления моментов первого и второго порядков для сети с рекуррентным входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием, построенный на основе результатов, полученных в п. 4.9, с примером реализации в среде Mathcad.

#### Шаг 1. Ввод исходных данных.

1.1. Параметр высокой интенсивности входящего потока:

$$N := 1$$

1.2. Преобразование Лапласа – Стильеса функции распределения длин интервалов между последовательным поступлением заявок в потоке:

$$a := 0.25 \quad b := N \cdot a$$

$$As(\alpha) := \left(1 + \frac{\alpha}{b}\right)^{-a}$$

1.3. Количество узлов сети, вектор распределения входящих заявок по

узлам и матрица маршрутизации:

$$\begin{aligned}
 K &:= 4 \\
 v &:= (0.2 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.5) \\
 M &:= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.4. Параметры экспоненциального обслуживания в виде диагональной матрицы  $\mu$ :

$$\mu := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5. Вспомогательные параметры (единичная матрица):

$$I := \text{identity}(K)$$

**Шаг 2.** Вычисление моментов первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \lambda &:= \frac{b}{a} \\
 B &:= \mu \cdot (I - M) \\
 m1 &:= \lambda \cdot v \cdot B^{-1}
 \end{aligned}$$

**Шаг 3.** Вычисление начальных моментов второго порядка.

3.1. Вычисляем собственные числа и собственные векторы матрицы  $B$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha s &:= \text{eigenvals}(B) \\
 X &:= \text{eigenvecs}(B)
 \end{aligned}$$

3.2. Формируем матрицы, составляющие уравнение (4.94):

```

k := 0.. K - 1

y_k := \frac{\lambda \cdot \text{As}(\alpha s_k)}{1 - \text{As}(\alpha s_k)} v \cdot X^{\langle k \rangle}

as0 := y^T \cdot X^{-1}

M1 := \text{diag}(m1^T)

C1 := \text{diag}[(\lambda \cdot v + m1 \cdot \mu + m1 \cdot \mu \cdot M)^T]

C := as0^T \cdot v + v^T \cdot as0 + C1 - M1 \cdot \mu \cdot M - (M1 \cdot \mu \cdot M)^T

```

3.3. Решаем матричное уравнение (4.94):

```

m2 := identity(K)

Given

m2 \cdot B + B^T \cdot m2 = C

corr := Find(m2)

```

**Шаг 4.** Вычисляем матрицу ковариаций и выводим результаты (вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций числа заявок в узлах сети):

```

cov := corr - m1^T \cdot m1

m1 = (1.219  1.009  4.243  0.404)

cov = \begin{pmatrix} 1.644 & 0.372 & 0.983 & 0.175 \\ 0.372 & 1.334 & 0.835 & 0.157 \\ 0.983 & 0.835 & 7.234 & 0.286 \\ 0.175 & 0.157 & 0.286 & 0.535 \end{pmatrix}

```

## 6.6 Резюме

В настоящей главе представлено описание разработанного комплекса

программ и алгоритмов для имитационного и численного моделирования сетей и систем массового обслуживания.

Разработана и предложена объектная модель приложения для имитационного моделирования сетей массового обслуживания. Реализованное на основе этой модели приложение позволяет производить имитационное моделирование сетей и систем обслуживания заданной конфигурации. Указанное приложение спроектировано и реализовано таким образом, что позволяет дополнять уже работающую программную систему новыми базовыми элементами без необходимости перекомпиляции. Данная возможность реализована благодаря использованию архитектурного решения для построения приложений с расширяемой алгоритмической базой предметной области. При этом одновременно решен вопрос визуального представления соответствующих объектов в пользовательском интерфейсе.

В данной главе также представлено общее описание алгоритмов для численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем и сетей массового обслуживания, которые реализованы в виде документов системы Mathcad.

Представленный в работе комплекс программ и алгоритмов может быть использован для выполнения имитационного и численного моделирования систем и сетей обслуживания в рамках выполнения научных исследований в области прикладного вероятностного анализа, а также для расчета характеристик функционирования реальных технических систем, модели которых представлены в виде сетей и систем массового обслуживания [42, 64, 138].

Результаты Главы 6 опубликованы в работах автора [23, 24, 26–29, 43, 79, 96, 97, 128, 129, 217].

## Заключение

В диссертации представлено исследование сетей и систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и высокоинтенсивными входящими потоками заявок. Установлено что в условиях растущей интенсивности входящего потока распределение числа заявок в таких системах и сетях является асимптотически гауссовским (многомерным гауссовским), получены параметры соответствующих гауссовских распределений.

Анализ моделей массового обслуживания, выполненный в работе, представлен различными методами исследования: методом многомерных марковских процессов – для систем с обслуживанием фазового типа, методом выделения первого скачка – для систем и сетей с входящим рекуррентным потоком, методом динамического просеивания – для систем и сетей с произвольным типом входящего потока и произвольным обслуживанием. Результаты всех исследований, выполненных различными методами, полностью совпадают. Таким образом, в диссертации представлены три различных инструмента исследования моделей однофазных и многофазных СМО и сетей обслуживания, выбор которых в конкретной ситуации зависит от предпочтений исследователя и возможностей соответствующего подхода. В работе показано, что наиболее универсальным инструментом анализа моделей массового обслуживания с неограниченным числом приборов являются методы одномерного и многомерного динамического просеивания.

Обобщающим результатом настоящей работы можно считать то, что между процедурами анализа и полученными результатами для моделей различных видов: случайных потоков событий, однофазных СМО, многофазных СМО, СеМО, – существуют прямые аналогии и совпадения. Одним из ярких проявлений этого, например, является формальное совпадение полученных уравнений, процедур и результатов их решения для многофазных СМО и для сетей обслуживания. Отличие при этом заключается лишь в формулах для вычисления вероятностей  $W_k(t)$  или  $S_k(t)$ , которые входят в соответствующие

уравнения.

Показано, что в предельном условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока асимптотические распределения вероятностей числа событий в потоке, наступивших в течение фиксированного интервала времени, и числа заявок в однофазных СМО являются гауссовскими, а асимптотические многомерные совместные распределения вероятностей числа заявок на фазах в многофазных СМО, а также в узлах сетей обслуживания являются многомерными гауссовскими. В Таблице 6.1 представлены формулы для расчета математического ожидания (вектора математических ожиданий) и дисперсии (матрицы ковариации) соответствующих гауссовских распределений. В Таблице 6.2 приведены формулы для расчета параметров  $\lambda$  и  $\kappa$ , которые зависят только от типа и характеристик входящего потока, а в Таблице 6.3 – формулы для вычисления величин  $b$ ,  $\beta$ , элементов матриц  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V}$ , значения которых полностью определяются функцией распределения  $B(x)$  продолжительности обслуживания (набором функций  $B_1(x), \dots, B_K(x)$  продолжительности обслуживания на фазах многофазной СМО или в узлах СеМО), а также структурой сети (вектором  $\mathbf{v}$  разделения входящего потока и матрицей маршрутизации  $\mathbf{M}$ ) для СеМО.

Таблица 6.1 – Формулы для расчета математического ожидания (вектора математических ожиданий) и дисперсии (матрицы ковариации) гауссовских аппроксимаций

Модель	Потоки	Однофазные СМО	Многофазные СМО	СеМО
Математическое ожидание (вектор математических ожиданий)	$N\lambda t$	$N\lambda b$	$N\lambda \mathbf{Y} \mathbf{e}$	$N\lambda \mathbf{Y} \mathbf{e}$
Дисперсия (матрица ковариаций)	$N(\lambda + \kappa)t$	$N(\lambda b + \kappa\beta)$	$N(\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V})$	$N(\lambda \mathbf{Y} + \kappa \mathbf{V})$

Таблица 6.2 – Формулы для вычисления параметров  $\lambda$  и  $\kappa$  для различных моделей входящих потоков

Модель входящего потока	Формула для параметра $\lambda$	Формула для параметра $\kappa$
рекуррентный	$\lambda = \frac{1}{a}$	$\kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2)$
МАР	$\lambda = \theta \mathbf{D}_1 \mathbf{e}$	$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{e}$
полумарковский	$\lambda = \frac{1}{\mathbf{rAe}}$	$\kappa = 2\mathbf{f}'_0 \mathbf{e}$

Таблица 6.3 – Формулы для расчета величин  $b$ ,  $\beta$  и матриц  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{V}$

Однофазные СМО	Многофазные СМО и СеМО
$b = \int_0^{\infty} [1 - B(t)] dt$	$\mathbf{Y} = \text{diag} \left\{ \int_0^{\infty} W_k(t) dt \right\}$
$\beta = \int_0^{\infty} [1 - B(t)]^2 dt$	$\mathbf{V} = \int_0^{\infty} [\mathbf{W}(t)]^T \mathbf{W}(t) dt$

Элементы  $W_k(t)$  вектор-строки  $\mathbf{W}(t)$  для многофазных СМО вычисляются по формуле

$$W_k(t) = B_{k-1}^*(t) - B_k^*(t),$$

а для СеМО вектор-строка  $\mathbf{W}(t)$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{W}(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha t} [\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}] \frac{1}{j\alpha} d\alpha.$$

Также для однофазных СМО и для СеМО в работе выполнен асимптотический анализ третьего порядка, с помощью которого получены аппроксимации, более точные по сравнению с гауссовскими.

Анализ области применимости полученных асимптотических результатов показал, что в большинстве случаев гауссовские аппроксимации дают хорошую точность аппроксимации при значениях параметра  $N$  высокой интенсивности входящего потока от 25 и выше для систем обслуживания и от 10 и

выше для сетей. Области применимости аппроксимаций третьего порядка соответственно составляют  $N > 5$  для систем и  $N \geq 2,5$  для сетей.

Разработан комплекс предметно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания, с помощью которого выполнен численный анализ области применимости полученных теоретических результатов. Комплекс включает в себя программу имитационного моделирования сетей обслуживания [96], составленную на основе разработанной в диссертации объектной модели [128] и реализующей предложенную в диссертации архитектуру построения приложений с расширяемой элементной базой предметной области. Также в разработанный комплекс входят алгоритмы численного анализа характеристик функционирования моделей массового обслуживания, реализованные в виде документов математического процессора Mathcad на основе теоретических результатов, полученных в диссертации.

Таким образом, основными научными достижениями данного диссертационного исследования являются:

1. Математические модели высокоинтенсивных непуассоновских случайных потоков событий, таких как рекуррентный, МАР, полумарковский поток, и построенные на их основе модели обслуживания с входящими высокоинтенсивными потоками, такие как однофазные СМО, многофазные СМО, сети обслуживания.

2. Метод многомерного динамического просеивания, предназначенный для исследования многофазных систем и сетей обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах, который позволяет выполнять анализ моделей с непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием.

3. Модификация метода выделения первого скачка для многофазных систем и сетей обслуживания с рекуррентным входящим потоком, обобщающая известную для однофазных СМО методику исследования на случай многомерных моделей.

4. Модификация метода асимптотического анализа на случай исследова-

ния моделей с высокоинтенсивными входящими потоками, в том числе и для многомерных моделей обслуживания.

5. Выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок в системах с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков.

6. Выражения для многомерных стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок на фазах многофазной системы для многофазных СМО с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков.

7. Выражения для многомерных стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок в узлах сети массового обслуживания для сетей с марковской маршрутизацией, неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих высокоинтенсивных непуассоновских потоков.

8. Методика расчета оптимального числа приборов в узлах сетей массового обслуживания с конечным числом каналов на основе результатов анализа моделей сетей с неограниченным числом приборов в узлах.

9. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа систем и сетей обслуживания с неограниченным числом приборов. С использованием данного комплекса установлены области применимости всех полученных в работе асимптотических результатов.

## Список использованной литературы

1. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Ананина, И. А. Исследование потоков в системе  $M/GI/\infty$  с повторными обращениями методом предельной декомпозиции / И. А. Ананина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 3 (8). – С. 56–67.
3. Афанасьев, М. Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.
4. Бахвалов, Л. А. Моделирование систем: учеб. пособие для вузов / Л. А. Бахвалов. – М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2006. – 295 с.
5. Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
6. Башарин, Г. П. Лекции по математической теории телетрафика: учеб. пособие / Г. П. Башарин. – Изд. 3-е. – М.: РУДН, 2009. – 342 с.
7. Башарин, Г. П. Новый этап развития математической теории телеграфика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, И. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. – 2009. – Вып. 12. – С. 16–28.
8. Башарин, Г. П. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем / Г. П. Башарин, А. Л. Толмачев // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. – М.: ВИНТИ, 1983. – Т. 21. – С. 3–119.
9. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
10. Боев, В. Д. Компьютерное моделирование / В. Д. Боев, Р. П. Сыпчен-

ко. – М.: Нац. Открытый Ун-т «ИНТУИТ», 2010. – 677 с.

11. Боровков, А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1984. – 472 с.

12. Боровков, А. А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. I / А. А. Боровков // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – Т. 9, № 4. – С. 608–625.

13. Боровков, А. А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. II / А. А. Боровков // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – Т. 10, № 3. – С. 409–437.

14. Боровков, А. А. О предельных законах для процессов обслуживания в многоканальных системах / А. А. Боровков // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 983–1004.

15. Бочаров, П. П. Методы анализа и расчета систем массового обслуживания с распределениями фазового типа / П. П. Бочаров, В. Г. Литвин // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 5. – С. 5–23.

16. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

17. Буч, Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений / Г. Буч, Р. А. Максимчук, М. У. Энгл, Б. Дж. Янг, Дж. Коаллен, К. А. Хьюстон; пер. Д. Ключин. – 3-е изд. – М.: Вильямс, 2010. – 720 с.

18. Вадзинский, Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р. Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

19. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / А. В. Гасников [и др.]; под ред. А. В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.

20. Введение в XML-сериализацию [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/vstudio/182eeyhh\(v=vs.100\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/vstudio/182eeyhh(v=vs.100).aspx).

21. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Наука, 1988. – 480 с.

22. Вишнеvский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишнеvский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

23. Войтиков, К. Ю. Инфраструктура обновления вычислительных инструментов в системе Desktop-GRID вычислений / К. Ю. Войтиков, А. Н. Моисеев, П. Н. Тумаев // Application of Information and Communication Technology in Economy and Education (ICAICTEE-2011): Proc. of the Int. Conf. (Sofia, December 2–3, 2011). – Sofia: University of National and World Economy, 2011. – P. 468–474.

24. Войтиков, К. Ю. Использование механизма дополнительных модулей при построении расширяемой информационной системы / К. Ю. Войтиков, А. Н. Моисеев, П. Н. Тумаев // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): Материалы X Всерос. научно-практ. конф. с междунар. участием (Анжеро-Судженск, 25–26 ноября 2011). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч. 1. – С. 11–13.

25. Войтиков, К. Ю. Компонентная модель распределенной объектно-ориентированной системы имитационного моделирования / К. Ю. Войтиков, А. Н. Моисеев, П. Н. Тумаев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 1. – С. 78–83.

26. Войтиков, К. Ю. Модель компонентов объектной распределенной системы моделирования процессов массового обслуживания / К. Ю. Войтиков, А. Н. Моисеев // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всерос. научно-практ. конф. с междунар. участием (Анжеро-Судженск, 13–14 ноября 2009). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч. 1. – С. 122–124.

27. Войтиков, К. Ю. Общие вопросы архитектуры объектно-ориентированной распределенной системы моделирования процессов массового обслуживания / К. Ю. Войтиков, А. Н. Моисеев // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, вып.6. – С.1040–1041.

28. Войтиков, К. Ю. Особенности имитационного моделирования адап-

тивных RQ-систем / К. Ю. Войтиков, Т. В. Любина, А. Н. Моисеев // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: Материалы X Российской конф. с междунар. участием (Катунь, 9–11 июня 2014). – Томск: Изд. дом ТГУ. – С. 99–100.

29. Войтиков, К. Ю. Применение механизма дополнительных модулей для реализации расширяемой алгоритмической базы предметной области / К. Ю. Войтиков, А. Н. Моисеев, П. Н. Тумаев // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – № 1. – С. 27–31.

30. Гайдамака, Ю. В. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова, К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 72 с.

31. Галажинская, О. Н. Бесконечно линейная бесконечнофазная система массового обслуживания со случайным прерыванием обслуживания / О. Н. Галажинская // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 261–266.

32. Гамма, Э. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования / Э. Гамма, Р. Хелм, Р. Джонсон, Дж. Влиссидес. – СПб.: Питер, 2010. – 368 с.

33. Гарайшина, И. Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Гарайшина Ирина Рашитовна. – Томск, 2005. – 148 с.

34. Гарайшина, И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

35. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – изд. 4-е, испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.

36. Горбатенко, А. Е. Асимптотики произвольного порядка для системы  $MAR|GI|_{\infty}$  в условии растущей интенсивности входящего потока / А. Е. Горбатенко // Вестник Томского государственного университета. Управление,

вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2 (11). – С. 35–43.

37. Горбатенко, А. Е. Исследование полумарковского потока в условии предельно редких изменений его состояний / А. Е. Горбатенко, А. А. Назаров // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. – 2010. – № 2 (28). – С. 8–11.

38. Горбатенко, А. Е. Исследование систем массового обслуживания с коррелированными потоками в специальных предельных условиях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Горбатенко Анна Евгеньевна. – Томск, 2010. – 156 с

39. Горбатенко, А. Е. Исследование MAP-потока в условиях растущей интенсивности / А. Е. Горбатенко, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 66–70.

40. Горцев, А. М. О связи MC-потоков и MAP-потоков событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1 (14). – С. 13–21.

41. Горцев, А. М. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Техника средств связи. Серия: Системы связи. – 1989. – Вып. 7. – С. 46–54.

42. Грачев, В. В. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных / В. В. Грачев, А. Н. Моисеев, А. А. Назаров, В. З. Ямпольский // Доклады ТУСУРа. – 2012. – № 2 (26), Ч. 2. – С. 248–251.

43. Демин, А. Ю. Высокопроизводительные вычисления на основе структурно-графического представления: монография / А. Ю. Демин, В. А. Дорофеев, А. Н. Моисеев, С. В. Аксенов, А. С. Вершинин. – Томск: Изд-во ТПУ, 2015. – 142 с.

44. Дудин, А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок. – Минск: БГУ, 2000. – 175 с.

45. Евдокимович, В. Е. Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками / В. Е. Евдокимович, Ю. В. Малинковский // Проблемы передачи информации. – 2001. – Т. 37, вып. 3. – С. 55–66.

46. Ежов, И. И. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Т. 14, вып. 1. – С. 3–14.

47. Жидкова, Л. А. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322, № 6. – С. 5–9.

48. Задорожный, В. Н. Аналитико-имитационные исследования систем и сетей массового обслуживания: монография / В. Н. Задорожный. – Омск: изд-во ОмГТУ, 2010. – 280 с.

49. Задорожный, В. Н. Имитационное моделирование: учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск: ОмГУ, 1999. – 151 с.

50. Задорожный, В. Н. Методы аналитико-имитационного моделирования систем с очередями и стохастических сетей: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.13.18 / Задорожный Владимир Николаевич. – Омск, 2011. – 397 с.

51. Задорожный, В. Н. Оптимизация однородных немарковских сетей массового обслуживания / В. Н. Задорожный // Проблемы управления. – 2009. – Вып. 6. – С. 68–75.

52. Задорожный, В. Н. Распределение каналов в однородных немарковских сетях с очередями / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. – 2010. – № 1 (87). – С. 5–10.

53. Задорожный В. Н. Транспортная сеть массового обслуживания: теория и эксперименты / В. Н. Задорожный // Динамика систем, механизмов и машин. – 2014. – № 3. – С. 162–165.

54. Ивницкий, В. А. Рекуррентное моделирование дискретно-непрерыв-

ных марковских процессов / В. А. Ивницкий. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 624 с.

55. Ивницкий, В. А. Теория нестационарных моментов марковских сетей: Замкнутые сети массового обслуживания / В. А. Ивницкий. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 400 с.

56. Ивницкий, В. А. Теория сетей массового обслуживания / В. А. Ивницкий. – М.: Изд-во физ.-мат. лит. 2004. – 772 с.

57. Инструмент многоподходного имитационного моделирования AnyLogic [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.anylogic.ru>.

58. Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных: отчет по годовому этапу научно-исследовательской работы № 1.511.2014/К в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности за 2014 год / Томский государственный университет; рук. Назаров А. А.; исполн. Сущенко С. П. [и др.]. – Томск, 2014. – 30 с.

59. Кёнинг, Д. Теория массового обслуживания / Д. Кёнинг, В. В. Рыков, Д. Штоян. – М.: Московский ин-т нефтехим. и газовой пром., 1979. – 112 с.

60. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. – М.: Мир. 1979. – 600 с.

61. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок.; пер. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

62. Клименок, В. И. Стационарные характеристики системы массового обслуживания с резервным прибором / В. И. Клименок, В. С. Шумченя // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г. А. Медведева (Минск, 23–26 февраля 2015). – Минск: РИВШ, 2015. – С. 82–87.

63. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

64. Королькова, Л. И. Оптимизация процессов предприятия на основе

новой методики расчета характеристик многофазной системы массового обслуживания с непрерывной загрузкой без промежуточных накопителей [Электронный ресурс] / Л. И. Королькова, П. П. Переверзев // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 3. – Режим доступа: [www.science-education.ru/103-6424](http://www.science-education.ru/103-6424).

65. Корольюк, В. С. Стохастические модели систем / В. С. Корольюк. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

66. Кругликов, В. К. Анализ и расчет сетей массового обслуживания методами двумерной диффузионной аппроксимации / В. К. Кругликов, В. Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 80–87.

67. Ларман, К. Применение UML и шаблонов проектирования / К. Ларман. – Изд. 2-е. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 624 с.

68. Лопухова, С. В. Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа  $N$ -го порядка / С. В. Лопухова, А. А. Назаров // Вестник ТГУ. Серия «Информатика. Кибернетика. Математика». – 2006. – № 293. – С. 110–115.

69. Лопухова, С. В. Исследование MMR-потока асимптотическим методом  $m$ -го порядка / С. В. Лопухова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 71–76.

70. Лоу, А. Имитационное моделирование / А. Лоу, В. Кельтон. – 3-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 848 с.

71. Любина, Т. В. Исследование математических моделей динамических и адаптивных RQ-систем с входящим MMPP-потокком: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Любина Татьяна Викторовна. – Томск: ТГУ. 2013. 163 с.

72. Малинковский, Ю. В. Мультипликативность стационарного распределения открытых сетей обслуживания со стандартными узлами и однотипными заявками / Ю. В. Малинковский // Проблемы передачи информации. – 1999. – Т. 35, вып. 1. – С. 75–89.

73. Малинковский, Ю. В. Сети Джексона с однолинейными узлами и

ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 4. – С. 67–79.

74. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками. 1. Модели с одним типом заявок / Ю. В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 1. – С. 92–106.

75. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявок / Ю. В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 102–110.

76. Малинковский, Ю. В. Стационарное распределение состояний сетей с обходами и “отрицательными” заявками / Ю.В. Малинковский, О. А. Никитенко // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 8. – С. 79–85.

77. Матальцкий, М. А. НМ-сети как новые стохастические модели прогнозирования доходов различных объектов / М. А. Матальцкий, С. Э. Статкевич // Вестник ГрГУ. Серия 5: Экономика. – 2009. – № 1. – С. 107–115.

78. Матвеев, С.А. Применение метода начальных моментов для исследования многофазной системы массового обслуживания  $GI/(M/\infty)^K$  / С. А. Матвеев, А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Доклады ТУСУРа. – 2014. – № 3 (33). – С. 129–134.

79. Мещеряков, Р. В. Применение параллельных вычислений в имитационном моделировании сетей массового обслуживания / Р. В. Мещеряков, А. Н. Моисеев, А. Ю. Демин, В. А. Дорофеев, С. А. Матвеев // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 5. – С. 99–109.

80. Моделирование и симуляция динамических систем для Simulink [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://matlab.ru/products/simulink>.

81. Моисеев, А. Анализ многофазной системы обслуживания с неограниченным числом приборов и высокоинтенсивным входящим МАР-поток / А. Моисеев, А. Назаров // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление вычисление связь (DCCN-2015): материалы 18-й междунар. науч. конф. (Москва, 19–22 окт. 2015). – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 104–113.

82. Моисеев, А. Н. Анализ многофазной системы обслуживания  $SM/(GI/\infty)^K$  в условии высокой интенсивности входящего потока / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): Материалы XIV Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова (Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. – Ч. 1. – С. 142–147.

83. Моисеев, А. Н. Асимптотический анализ высокоинтенсивного полумарковского потока событий / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Доклады ТУСУРа. – 2013. – № 3 (29). – С. 109–115.

84. Моисеев, А. Н. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Автометрия. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 67–76.

85. Моисеев, А. Н. Асимптотический анализ системы массового обслуживания  $MAR/GI/\infty$  с высокоинтенсивным входящим потоком / А. Н. Моисеев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 56–65.

86. Моисеев, А. Н. Базовая объектная модель слоя предметной области системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания / А. Н. Моисеев, С. П. Моисеева, М. В. Синяков // Application of Information and Communication Technology in Economy and Education (ICAICTEE-2011): Proc. of the Int. Conf. (Sofia, December 2–3, 2011). - Sofia: University of National and World Economy, 2011. – P. 230–236.

87. Моисеев, А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.

88. Моисеев, А. Н. Исследование входящего потока для GRID-системы с адаптируемым выделением вычислительных ресурсов / А. Н. Моисеев, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 3. – С. 81–87.

89. Моисеев, А. Н. Исследование высокоинтенсивного МАР-потока / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322, № 2. – С. 16–18.

90. Моисеев, А. Н. Исследование многофазной системы массового обслуживания  $GI|(GI|_{\infty})^K$  методом выделения первого скачка / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы X Российской конф. с междунар. участием (Катунь, 9–11 июня 2014). – Томск: Изд. дом ТГУ. – С. 104–105.

91. Моисеев, А. Н. Исследование сети массового обслуживания  $GI-(M/\infty)^K$  методом начальных моментов / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г. А. Медведева (Минск, 23–26 февраля 2015). – Минск: РИВШ, 2015. – С. 176–181.

92. Моисеев, А. Н. Исследование системы массового обслуживания  $HI GI|GI|_{\infty}$  / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2 (23). – С. 75–83.

93. Моисеев, А. Н. Математическая модель GRID-системы с адаптируемым выделением вычислительных ресурсов / А. Н. Моисеев, С. П. Моисеева // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы IX Российской конф. с междунар. участием (Катунь, 5–8 июня 2012). – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – С. 95.

94. Моисеев, А. Н. Объектная модель событий системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания / А. Н. Моисеев, М. В. Синяков // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: тезисы докладов VIII Российской конф. с междунар. участием (Томск, 5–8 окт. 2010). – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – С. 40.

95. Моисеев, А. Н. Применение метода начальных моментов для исследования системы  $GI/M/\infty$  и сравнение с результатами асимптотического ана-

лиза / А. Н. Моисеев, С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): материалы XIII Междунар. научно-практ. конф. (Анжеро-Судженск, 20–22 ноября 2014). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. – Ч. 2. – С. 176–180.

96. Моисеев, А. Н. Программная система имитационного моделирования сетей массового обслуживания [Электронный ресурс] / А. Н. Моисеев. – Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». – Свид. о рег. № 21344, дата рег.: 03.11.2015 г.

97. Моисеев, А. Н. Разработка объектно-ориентированной модели системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания / А. Н. Моисеев, М. В. Синяков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 1. – С. 89–93.

98. Моисеева, С. П. Исследование системы  $MAR^{(2)}|GI_2|\infty$  методом просеянного потока / С. П. Моисеева, И. А. Синякова // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – Вып. 1 (49). – С. 47–53.

99. Моисеева, С. П. Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18 / Моисеева Светлана Петровна. – Томск, 2014. – 280 с.

100. Мокров, Е. В. Модель системы облачных вычислений в виде системы массового обслуживания с несколькими очередями и с групповым поступлением заявок / Е. В. Мокров, К. Е. Самуйлов // Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7, № 11. – С. 139–141.

101. Морозова, А. С. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, К. М. Одинцов // Научное творчество молодежи: материалы XI Всерос. научно-практ. конф. (Анжеро-Судженск, 20–21 апр. 2007). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – Ч. 1. – С. 37–39.

102. Назаров, А. Асимптотический анализ системы  $GI|GI|_{\infty}$  методами динамического просеивания и выделения первого скачка / А. Назаров, А. Моисеев // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013): Proc. of the Int. Conf. (Moscow, Oct. 7–10 2013). – Moscow: JSC «TECHNOSPHERA», 2013. – P. 410–417.

103. Назаров, А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем: монография / А. А. Назаров – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. – 153 с.

104. Назаров, А. А. Асимптотический анализ разомкнутой немарковской сети массового обслуживания  $MI|MI|_{\infty}^K$  / А. А. Назаров, А. Н. Моисеев // Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей: материалы междунар. науч. конф. (Минск, 28–31 янв. 2013). – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 132–140.

105. Назаров, А. А. Асимптотический анализ систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и полумарковским входящим потоком / А. А. Назаров, И. А. Семенова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320, № 5. – С. 12–17.

106. Назаров, А. А. Асимптотический анализ системы  $M|MI|_{\infty}^K$  в условии предельно редких изменений состояний входящего потока / А. А. Назаров, А. Е. Горбатенко // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315, № 5. – С. 187–190.

107. Назаров, А. А. Исследование открытой немарковской сети массового обслуживания  $GI - (GI|_{\infty})^K$  с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком / А. А. Назаров, А. Н. Моисеев // Проблемы передачи информации. – 2013. – Т. 49, вып. 2. – С. 78–91.

108. Назаров, А. А. Исследование полумарковского потока событий / А. А. Назаров, С. В. Лопухова, И. Р. Гарайшина // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, спец. вып. 5. – С. 83–87.

109. Назаров, А. А. Исследование разомкнутой немарковской сети массового обслуживания  $MI|MI|_{\infty}^K$  / А. А. Назаров, А. Н. Моисеев // Информа-

ционные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012): материалы XI Всерос. научно-практ. конф. с междунар. участием (Анжеро-Судженск, 23–24 ноября 2012). – Кемерово: Практика, 2012. – Ч. 2. – С. 102–104.

110. Назаров, А. А. Исследование системы  $MMP|GI|_{\infty}$  методом просеянного потока / А. А. Назаров, И. А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С. 74–84.

111. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

112. Назаров, А. А. Распределенная система обработки данных физических экспериментов / А. А. Назаров, А. Н. Моисеев // Известия вузов. Физика. – 2014. – Т. 57, № 7. – С. 112–117.

113. Назаров, А. А. Способы задания МАР-потока и их эквивалентность / А. А. Назаров, С. П. Моисеева, А. Н. Моисеев // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: сб. науч. ст.; под ред. Н. Н. Труша, Г. А. Медведева, Ю. С. Харина. – Минск: РИВШ, 2014. – С. 160–164.

114. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: уч. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

115. Наумов, В. А. Исследование некоторых многофазных систем массового обслуживания: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Наумов Валерий Арсентьевич. – М., 1979. 97 с.

116. Наумов, В. А. О независимой работе подсистем сложной системы / В. А. Наумов // Труды 3-й Всесоюзной школы-семинара по теории массового обслуживания. – М: Изд-во МГУ, 1976. – Т. 2. – С. 169–177.

117. Наумов, В. А. Об обслуженной и избыточной нагрузках полнодоступного пучка с ограниченной очередью / В. А. Наумов // Численные методы решения задач математической физики и теории систем: сб. науч. ст. – М: Изд-во РУДН, 1977. – С. 51–55.

118. Общие сведения о платформе .NET Framework [Электронный

ресурс]. – Режим доступа: <https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/vstudio/zw4w595w.aspx>.

119. Петрович, М. Л. Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ / М. Л. Петрович, М. И. Давидович. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 191 с.

120. ПО для инженерных расчетов. PTC Mathcad [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.ptc.com/product/mathcad>.

121. Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи: отчет по проекту № 4761 аналит. ведомств. целевой прогр. «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» / Кемеровский государственный университет; рук. Назаров А. А.; исполн. Анина И. А. [и др.]. – Кемерово, 2010. – 293 с.

122. Рамбо, Дж. UML 2.0. Объектно-ориентированное моделирование и разработка / Дж. Рамбо, М. Блаха. – СПб.: Питер, 2007. – 544 с.

123. Рыков, В. В. Математическая статистика и планирование эксперимента: уч. пособие / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 308 с.

124. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т. Л. Саати. – 2-е изд. – М.: Советское радио, 1971. – 519 с.

125. Самуйлов, К. Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС-7 / К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 292 с.

126. Севостьянова, М. В. Исследование системы массового обслуживания  $MMP|GI|_{\infty}$  с высокоинтенсивным входящим потоком / М. В. Севостьянова, А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2013): материалы XII Всерос. научно-практ. конф. с междунар. участием (Анжеро-Судженск, 29–30 ноября 2013). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – Ч. 2. – С. 84–89.

127. Семенова, И. А. Асимптотическое и численное исследование моделей RQ-систем и систем с неограниченным числом приборов с коррелирован-

ными входящими потоками: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Семенова Инна Анатольевна. – Томск, 2012. – 168 с.

128. Синяков, М. В. Объектно-ориентированная имитационная модель системы массового обслуживания с одним или несколькими блоками обслуживания [Электронный ресурс] / М. В. Синяков, А. Н. Моисеев. – Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». – Свид. о рег. № 16326, дата рег.: 22.10.2010 г.

129. Синяков, М. В. Основные классы ядра системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания / М. В. Синяков, А. Н. Моисеев // Научное творчество молодежи: материалы XIV Всерос. научно-практ. конф. (Анжеро-Судженск, 15–16 апреля 2010). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч.1. – С. 134–136.

130. Синякова, И. А. Математические модели и методы исследования систем параллельного обслуживания сдвоенных заявок случайных потоков: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Синякова Ирина Анатольевна. – Томск, 2013. – 147 с.

131. Тихоненко, О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: уч. пособие для вузов / О. М. Тихоненко. – Минск: Технопринт, 2003. – 327 с.

132. Топорков, В. В. Модели распределенных вычислений // В. В. Топорков. – М.: Изд-во Физматлит, 2004. – 320 с.

133. Фаулер, М. Архитектура корпоративных программных приложений / М. Фаулер; пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 544 с.

134. Федоткин, М. А. Модели в теории вероятностей / М. А. Федоткин. – М.: Изд-во Физматлит, 2012. – 608 с.

135. Федоткин, М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6. – С. 51–70.

136. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1967. – Т. 2. – 765 с.

137. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М: Физматлит, 1963. – 236 с.
138. Хорошевский, В. Г. Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем / В. Г. Хорошевский, В. А. Павский // Автометрия. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 3–15.
139. Цициашвили, Г. Ш. Новые мультипликативные теоремы для сетей массового обслуживания / Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // Проблемы передачи информации. – 2005. – Т. 41, Вып. 2. – С. 111–122.
140. Цициашвили, Г. Ш. Перегрузка в узлах сети массового обслуживания / Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – Вып. 9. – С. 185–189.
141. Якобсон, А. Унифицированный процесс разработки программного обеспечения / А. Якобсон, Г. Буч, Дж. Рамбо. – СПб.: Питер, 2002. – 496 с.
142. Ahn, H.-S. Optimal control of a two-stage tandem queuing system with flexible servers / H.-S. Ahn, I. Duenyas, M. E. Lewis // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2002. – Vol. 16, Iss. 4. – P. 453–469.
143. Artalejo, J. R. Accessible bibliography on retrial queues / J. R. Artalejo // Mathematical and Computer Modelling. – 1999. – Vol. 30. – P. 223–233.
144. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: a computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
145. Afanasyeva, L. Limit theorems for semi-Markov queues and their applications / L. Afanasyeva, E. Bashtova, E. Bulinskaya // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41. – P. 688–709.
146. Balsamo, S. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction / S. Balsamo, V. De Nitto Personè, P. Inverardi // Performance Evaluation. – 2003. – Vol. 51, Iss. 2. – P. 269–288.
147. Baskett, F. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers / F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, F. G. Palacios // Journal of the ACM. – 1975. – Vol. 22, Iss. 2. – P. 248–260.

148. Bojarovich, J. Stationary distribution invariance of an open queueing network with temporarily non-active customers / J. Bojarovich, Y. Malinkovsky // *Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks*; A. Dudin et al. (Eds.). – Springer International Publishing Switzerland, 2013. – *Communications in Computer and Information Science*, vol. 356. – P. 26–32.
149. Borst, S. A stochastic network with mobile users in heavy traffic / S. Borst, F. Simatos // *Queueing Systems*. – 2013. – Vol. 74, Iss. 1. – P. 1–40.
150. Borst, S. Dimensioning large call centers / S. Borst, A. Mandelbaum, M. I. Reiman // *Operations Research*. – 2004. – Vol. 52. – P. 17–34.
151. Boxma, O. J. M/G/∞ tandem queues / O. J. Boxma // *Stochastic Processes and their Applications*. – 1984. – Vol. 18. – P. 153–164.
152. Brandt, A. On the GI/M/∞ Service system with batch arrivals and different types of service distributions / A. Brandt // *Queueing Systems*. – 1989. – Vol. 4. – P. 351–365.
153. Breuer, L. An introduction to queueing theory and matrix-analytic methods / L. Breuer, D. Baum. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 271 p.
154. Breuer, L. On Markov-additive jump processes / L. Breuer // *Queueing Systems*. – 2002. – Vol. 40, Iss. 1. – P. 75–91.
155. Breuer, L. The inhomogeneous BMAP/G/∞ queue / L. Breuer, D. Baum // *Proc. of the 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001)*. – Aachen, Germany, 2001. – P. 209–223.
156. Brian, H. F. An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment / H. F. Brian, I. J. B. F. Adan // *Queueing Systems*. – 2009. – Vol. 61. – P. 65–84.
157. Brown, L. Statistical analysis of a telephone call center: a queueing-science perspective / L. Brown [et al.] // *Journal of the American Statistical Association*. – 2005. – Vol. 100. – P. 36–50.
158. Bushlanov, I. V. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events / I. V. Bushlanov, A. V. Gortsev // *Automation and Re-*

mote Control. – 2004. – Vol. 65, no. 9. – P. 1389–1399.

159. Chakravarthy, S. R. A multiserver queue with Markovian arrival process and group services with thresholds / S. R. Chakravarthy, A. S. Alfa // *Naval Research Logistics*. – 1993. – Vol. 40. – P. 811–812.

160. Chakravarthy, S. R. Markovian arrival processes [Электронный ре-  
сепс] / S.R. Chakravarthy // *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Man-  
agement Science*, 2010. – Режим доступа: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470400531.eorms0499/full>.

161. Chao, X. Markov network processes with product form stationary distri-  
butions / X. Chao, M. Miyazawa, R. F. Serfozo, H. Takada // *Queueing Systems*. –  
1998. – Vol. 28. – P. 377–401.

162. Çinlar, E. Queues with semi-Markovian arrivals / E. Çinlar // *Journal of  
Applied Probability*. – 1967. – Vol. 4. – P. 365–379.

163. Clarke, A. B. On time-dependent waiting line processes / A. B. Clarke //  
*Annals of Mathematical Statistics*. – 1953. – Vol. 24. – P. 491–492.

164. Cox, D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the in-  
clusion of supplementary variables / D. R. Cox // *Proceedings of the Cambridge  
Philosophical Society*. – 1955. – Vol. 51. – P. 433–441.

165. Cox, D. R. The theory of stochastic processes / D. R. Cox, H. D. Miller. –  
N.Y.: Wiley, 1965. – 398 p.

166. Dahl, O.-J. SIMULA – an Algol based simulation language / O.-J. Dahl,  
K. Nygaard // *Communications of the ACM*. – 1966. – Vol. 9. – P. 671–678.

167. De Smit, J. H. A. The single server semi-Markov queue / J. H. A. De Smit  
// *Stochastic Processes and their Applications*. – 1986. – Vol. 22. – P. 37–50.

168. Decreusefond, L. A functional central limit theorem for the  $M/GI/\infty$   
queue / L. Decreusefond, P. Moyal // *Annals of Applied Probability*. – 2008. –  
Vol. 18, no. 6. – P. 156–178.

169. Erlang, A. K. The theory of probabilities and telephone conversations /  
A. K. Erlang // *Nyt Tidsskrift for Matematik. Seria B*. – 1909. – Vol. 20. – P. 33–  
39.

170. Ferreira, M. A. M. Modelling and differential costs evaluation of a two echelons repair system through infinite servers nodes queuing networks / M. A. M. Ferreira // *Applied Mathematical Sciences*. – 2013. – Vol. 7, no. 112. – P. 5567–5576.

171. Fischer, W. The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook / W. Fischer, K. Meier-Hellstern // *Performance Evaluation*. – 1993. – Vol. 18, Iss. 2. – P. 149–171.

172. Genadis, T. The distribution of the passage time in a two–station reliable production line: an exact analytic solution / T. Genadis // *International Journal of Quality and Reliability Management*. – 1997. – Vol. 14, Iss. 9. – P. 12–25.

173. Glynn, P. W. A new view of the heavy-traffic limit theorem for infinite-server queues / P. W. Glynn, W. Whitt // *Advances in Applied Probability*. – 1991. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 188–209.

174. Gómez-Corral, A. A tandem queue with blocking and Markovian arrival process / A. Gómez-Corral // *Queueing Systems*. – 2002. – Vol. 41. – P. 343–370.

175. Gopalan, M. N. Stochastic modelling of a two–stage transfer–line production system with end buffer and random demand / M. N. Gopalan, N. Anantharaman // *Microelectronics and Reliability*. – 1992. – Vol. 32, Iss. 1–2. – P. 11–15.

176. GPSS World [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.minutemansoftware.com/simulation.htm>.

177. Harrison, J. M. A note on networks of infinite-server queues / J. M. Harrison, A. J. Lemoine // *Journal of Applied Probability*. – 1981. – Vol. 18. – P. 561–567.

178. Harrison, J. M. The diffusion approximation for tandem queues in heavy traffic / J. M. Harrison // *Advances in Applied Probability*. – 1978. – Vol. 10. – P. 886–905

179. Heindl, A. Decomposition of general tandem queueing networks with MMPP input / A. Heindl // *Performance Evaluation*. – 2001. – Vol. 44, Iss. 1–4. – P. 5–23.

180. Henderson, W. Alternative approaches to the analysis of M/G/1 and

G/M/1 queue / W. Henderson // Journal of the Operations Research Society of Japan. – 1972. – Vol. 15. – P. 92–101.

181. Heyman, D. P. Modelling multiple IP traffic streams with rate limits / D. P. Heyman, D. Lucantoni // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 2003. – Vol. 11, Iss. 6. – P. 948–958.

182. Holman, D. F. On the service system  $M^X/G/\infty$  / D. F. Holman, M. L. Chaudhry, B.R.K. Kashyap // European Journal of Operational Research. – 1983. – Vol. 13. – P. 142–145.

183. Iglehart, D. L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem / D. L. Iglehart // Journal of Applied Probability. – 1965. – Vol. 2. – P. 429–441.

184. Iglehart, D. L. Multiple channel queues in heavy traffic / D. L. Iglehart, W. Whitt // Advances in Applied Probability. – 1970. – Vol. 2. – P. 150–172.

185. Ivnitiskii, V. A. Invariance of stationary probabilities of states for network of multiserver queues / V. A. Ivnitiskii // Queueing Systems. – 1995. – Vol. 19. – P. 319–329.

186. Jackson, J. R. Networks of waiting lines / J. R. Jackson // Operations Research. – 1957. – Vol. 5. – P. 518–521.

187. Kang, S. H. An application of Markovian arrival process to modeling superposed ATM cell streams / S. H. Kang, Y. H. Kim, D. K. Sung, B. D. Choi // IEEE Transactions on Communications. – 2002. – Vol. 50, no. 4. – P. 633–642.

188. Kendall, D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chains / D. G. Kendall // Annals of Mathematical Statistics. – 1953. – Vol. 24, Iss. 3. – P. 338–354.

189. Kelly, F. P. Networks of queues / F. P. Kelly // Advances in Applied Probability. – 1976. – Vol. 8, Iss. 2. – P. 416–432.

190. Kim, C. A tandem BMAP/G/1  $\rightarrow$  •/M/N/0 queue with group occupation of servers at the second station / C. Kim, A. Dudin, V. Klimenok, O. Taramin // Mathematical Problems in Engineering. – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 324604, 26 p.

191. Kim, S. The two-moment three-parameter decomposition approximation of queueing networks with exponential residual renewal processes / S. Kim // *Queueing Systems*. – 2011. – Vol. 68, Iss. 2. – P. 193–216.
192. Kingman, J. F. C. On doubly stochastic Poisson process / J. F. C. Kingman // *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. – 1964. – Vol. 60, Iss. 4. – P. 923–930.
193. Kingman, J. F. C. On queues in heavy traffic / J. F. C. Kingman // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. – 1962. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 383–392.
194. Klemm, A. Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process / A. Klemm, C. Lindermann, M. Lohmann // *Performance Evaluation*. – 2003. – Vol. 54. – P. 149–173.
195. Knessl, C. Heavy traffic analysis of two coupled processors / C. Knessl, J. A. Morrison // *Queueing Systems*. – 2003. – Vol. 43, Iss. 3. – P. 173–220.
196. Kolmogorov, A. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. Kolmogorov // *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*. – 1933. – Vol. 4. – P. 83–91.
197. Koroliuk, V. S. Queueing systems with semi-Markov flow in average and diffusion approximation schemes / V. S. Koroliuk, V. V. Koroliuk, N. Limnios // *Methodology and Computing in Applied Probability*. – 2009. – Vol. 11. – P. 201–209.
198. Lebedev, E. Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic / E. Lebedev, G. Livinska // *Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks*; A. Dudin et al. (Eds.). – Springer International Publishing Switzerland, 2013. – *Communications in Computer and Information Science*, vol. 356. – P. 122–130.
199. Lee, W. C. Y. *Mobile cellular telecommunications: analog and digital systems* / W. C. Y. Lee; 2<sup>nd</sup> ed. – N.Y.: McGraw-Hill, 1995. – 664 p.
200. Lieshout, P. Asymptotic analysis of Lévy-driven tandem queues / P. Lieshout, M. Mandjes // *Queueing Systems*. – 2008. – Vol. 60. – P. 203–226.
201. Little, J. D. C. A proof of the queueing formula  $L = \lambda W$  / J. D. C. Little //

Operations Research. – 1961. – Vol. 9, Iss. 3. – P. 383–387.

202. Liu, L. On the  $GI^X/G/\infty$  system / L. Liu, B. R. K. Kashyap, J. G. C. Templeton // Journal of Applied Probability. – 1990. – Vol. 27. – P. 671–683.

203. Liu, L. The  $GR^{X_n}/G_n/\infty$  system: system size / L. Liu, J. G. C. Templeton // Queueing Systems. – 1991. – Vol. 8. – P. 323–356.

204. Lucantoni, D. M. New results on single server queue with a batch Markovian arrival process / D. M. Lucantoni // Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.

205. Machihara, F. An infinitely-many-server queue having Markov renewal arrivals and hyperexponential service times / F. Machihara // Journal of the Operations Research Society of Japan. – 1986. – Vol. 29. – P. 338–351.

206. Magnus, W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator / W. Magnus // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1954. – Vol. 7, Iss. 4. – P. 649–673.

207. Mandelbaum, A. State-dependent queues: approximations and applications / A. Mandelbaum, G. Pats // Stochastic networks. IMA Volumes in Mathematics and its Applications; F. P. Kelly and R. J. Williams, eds. – Springer, Berlin, 1995. – P. 239–282.

208. Massey, W. A. Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input / W. A. Massey, W. Whitt // Queueing Systems. – 1993. – Vol. 13. – P. 183–250.

209. Medhi, J. Stochastic models in queueing theory / J. Medhi. – 2<sup>nd</sup> ed. – N.Y.: Academic Press, 2003. – 482 p.

210. Moiseev, A. Asymptotic analysis of the infinite-server queueing system with high-rate semi-Markov arrivals / A. Moiseev, A. Nazarov // Proc. of the IEEE Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems, ICUMT 2014 (St. Petersburg, October 6–8, 2014). – St. Petersburg: IEEE, 2015. – P. 507–513.

211. Moiseev, A. Asymptotic analysis of the queueing network  $SM-(GI/\infty)^K$  /

A. Moiseev // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications; A. Dudin et al (Eds.). – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – Communications in Computer and Information Science, vol. 564. – P. 73–84.

212. Moiseev, A. Investigation of high intensive general flow / A. Moiseev, A. Nazarov // Problems of Cybernetics and Informatics: proc. of the IV Int. Conf. PCI'2012 (Baku, September 12–14, 2012). – Baku: IEEE, 2012. – P. 161–163.

213. Moiseev, A. Investigation of the high intensive Markov-modulated Poisson process / A. Moiseev, A. Nazarov // Proc. of the Int. Conf. on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education, ICAICTSEE-2012 (Sofia, October 5–6, 2012). – Sofia: University Of National And World Economy, 2012. – P. 72–77.

214. Moiseev, A. Modeling of insurance company as infinite-servers queueing system / A. Moiseev, S. Moiseeva, I. Sinyakova // Proc. of the Int. Conf. on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education, ICAICTSEE-2012 (Sofia, October 5–6, 2012). – Sofia: University of National and World Economy, 2012. – P. 78–83.

215. Moiseev, A. The first jump separation technique for the tandem queueing system  $GI/(GI/\infty)^K$  / A. Moiseev // Information Technologies and Mathematical Modelling; A. Dudin et al (Eds.). – Springer International Publishing Switzerland, 2014. – Communications in Computer and Information Science, vol. 487. – P. 287–300.

216. Moiseev, A. N. Asymptotic analysis of a multistage queueing system with a high-rate renewal arrival process / A. N. Moiseev, A. A. Nazarov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 163–171.

217. Moiseev, A. N. Extendable Object-oriented distributed computing system / A. N. Moiseev, K. Yu. Voytikov, P. N. Tumaev // Distributed Computing and Grid-Technologies in Science and Education: Book of Abstr. of the 4<sup>th</sup> Int. Conf. (Dubna, June 28 – July 3 2010). – Dubna: JINR, 2010. – P. 149.

218. Movaghar, A. Analysis of a dynamic assignment of impatient customers

to parallel queues / A. Movaghar // *Queueing Systems*. – 2011. – Vol. 67, Iss. 3. – P. 251–273.

219. MPI.NET: high-performance C# library for message passing [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.osl.iu.edu/research/mpl.net>.

220. MPI Documents [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mpl-forum.org/docs>.

221. Nazarov, A. Calculation of the probability that a Gaussian vector falls in the hyperellipsoid with the uniform density / A. Nazarov, A. Moiseev // *Proc. of the Int. Conf. on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education, ICAICTSEE–2013* (Sofia, December 6–7, 2013). – Sofia: University of National and World Economy, 2013. – P. 519–526.

222. Nazarov, A. Investigation of the queueing network  $GI-(GI|_{\infty})^K$  by means of the first jump equation and asymptotic analysis / A. Nazarov, A. Moiseev // *Distributed Computer and Communication Networks: V. Vishnevsky et al (Eds.)*. – Springer International Publishing Switzerland, 2014. – *Communications in Computer and Information Science*, vol. 279. – P. 229–240.

223. Nazarov, A. A. Analysis of an open non-Markovian  $GI-(GI|_{\infty})^K$  queueing network with high-rate renewal arrival process / A. A. Nazarov, A. N. Moiseev // *Problems of Information Transmission*. – 2013. – Vol. 49, no. 2. – P. 167–178.

224. Nazarov, A. A. Distributed system of processing of data of physical experiments / A. A. Nazarov, A. N. Moiseev // *Russian Physics Journal*. – 2014. – Vol. 57, Iss. 7. – P. 984–990.

225. Neuts, M. F. A versatile Markovian arrival process / M. F. Neuts // *Journal of Applied Probability*. – 1979. – Vol. 16. – P. 764–779.

226. Neuts, M. F. An algorithm for the  $P(n, t)$  matrices of a continuous BMAP. In *Matrix-analytic methods in stochastic models* / M. F. Neuts, J.-M. Li // S. R. Chakravarty and A. S. Alfa (eds.), *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. – Marcel Dekker, 1997. – Vol. 183. – P. 7–19.

227. Neuts, M. F. The infinite server queue with semi-Markovian arrivals and negative exponential services / M. F. Neuts, S. Z. Chen // *Journal of Applied Prob-*

ability. – 1972. – Vol. 9. – P. 178–184.

228. Pang, G. Martingale proofs of many-server heavy-traffic limits for Markovian queues / G. Pang, R. Talreja, W. Whitt // *Probability Surveys*. – 2007. – Vol. 4. – P. 193–267.

229. Pang, G. Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues probability / G. Pang, W. Whitt // *Queueing Systems*. – 2010. – Vol. 65, Iss. 4. – P. 325–364.

230. Pang, G. Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues with dependent service times / G. Pang, W. Whitt // *Queueing Systems*. – 2013. – Vol. 73, Iss. 2. – P. 119–146.

231. Paxson, V. Wide-area traffic: the failure of Poisson modeling / V. Paxson, S. Floyd // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. – 1995. – Vol. 3, Iss. 3. – P. 226–244.

232. Puhalskii, A. A. On many-server queues in heavy traffic / A. A. Puhalskii, J. E. Reed // *Annals of Applied Probability*. – 2008. – Vol. 20. – P. 129–195.

233. Ramaswami, V. Some explicit formulas and computational methods for infinite-server queues with phase-type arrival / V. Ramaswami, M. F. Neuts // *Journal of Applied Probability*. – 1980. – Vol. 17. – P. 498–514.

234. Reed, J. Distribution-valued heavy-traffic limits for the  $G/GI/\infty$  queue / J. Reed, R. Talreja // *Annals of Applied Probability*. – 2015. – Vol. 25, Iss. 3. – P. 1420–1474.

235. Reed, J. The  $G/GI/N$  queue in the Halfin-Whitt regime / J. Reed // *Annals of Applied Probability*. – 2009. – Vol. 19, Iss. 6. – P. 2211–2269.

236. Reich, E. Waiting times when queues are in tandem / E. Reich // *Annals of Mathematical Statistics*. – 1957. – Vol. 28, Iss. 3. – P. 768–773.

237. Reiman, M. I. Open queueing networks in heavy traffic / M. I. Reiman // *Mathematics of Operations Research*. – 1984. – Vol. 9, Iss. 3. – P. 441–458.

238. Ripley, B. D. Simulation methodology – an introduction for queueing theorists / B. D. Ripley // *Queueing Systems*. – 1988. – Vol. 3. – P. 201–220.

239. Robinson, S. Simulation: the practice of model development and use /

S. Robinson. – Hoboken: Wiley, 2004. – 336 p.

240. Schriber, T. J. Simulation using GPSS / T. J. Schriber. – N.Y.: Wiley, 1974. – 592 p.

241. Sharma, V. Reliable estimation via simulation / V. Sharma // Queueing Systems. – 1995. – Vol. 19. – P. 169–192.

242. Sigman, K. Heavy-traffic limits for nearly deterministic queues: stationary distributions / K. Sigman, W. Whitt // Queueing Systems. – 2011. – Vol. 69, Iss. 2. – P. 145–173.

243. Smith, W. The infinitely-many-server queue with semi-Markovian arrivals and customer-dependent exponential service times / W. Smith // Operations Research. – 1972. – Vol. 22. – P. 907–912.

244. Takács, L. A storage process with semi-Markov input / L. Takács // Advances in Applied Probability. – 1975. – Vol. 7. – P. 830–844.

245. Tsitsiashvili, G. Synergetic effects for number of busy servers in multi-server queuing systems / G. Tsitsiashvili, M. Osipova // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications; A. Dudin et al (Eds.). – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – Communications in Computer and Information Science, vol. 564. – P. 404–414.

246. Tsitsiashvili, G. Sh. A product theorem for markov chains with application to PF-queueing networks / G. Sh. Tsitsiashvili, M. A. Osipova, N. V. Koliev, D. Baum // Annals of Operations Research. – 2002. – Vol. 113. – P. 141–154.

247. Tsitsiashvili, G. Sh. Synergetic effects in multiserver queuing systems with alternating input flow / G. Sh. Tsitsiashvili, M. A. Osipova // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, no. 60. – P. 2953–2956.

248. Unified Modeling Language (UML) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.uml.org>.

249. Van Doorn, E. A. A note on the GI/GI/∞ system with identical service and interarrival-time distributions / E. A. Van Doorn, A.A. Jagers // Queueing Systems. – 2004. – Vol. 47. – P. 45–52.

250. Walrand, J. An introduction to queueing networks / J. Walrand. – N.Y.:

Prentice-Hall, 1988. – 384 p.

251. Whitt, W. Heavy traffic limit theorems for queues: a survey / W. Whitt // Mathematical Methods in Queueing Theory: Proc. of Conf. at Western Michigan University, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – Springer-Verlag, New York, 1974. – Vol. 98. – P. 307–350.

252. Whitt, W. On the heavy-traffic limit theorem for GI/G/ $\infty$  queues / W. Whitt // Advances in Applied Probability. – 1982. – Vol. 14. – P. 171–190.

253. World Community GRID [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.worldcommunitygrid.org>.

254. Zhu, Y. Markovian queueing networks in a random environment / Y. Zhu // Operations Research Letters. – 1994. – Vol. 15, Iss. 1. – P. 11–17.