

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



БУБЛИК ЯНА СЕРГЕЕВНА

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ
ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКАХ
СТРАХОВЫХ ПРЕМИЙ И ВЫПЛАТ**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор К.И. Лившиц

Томск – 2014

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Математическая модель страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат	18
1.1. Математическая модель страховой компании.....	19
1.2. Уравнения для вероятностей разорения и выживания.....	20
1.3. Вероятности разорения и выживания при малой нагрузке страховой премии.....	23
1.4. Численные примеры-1.....	31
1.5. Производящие функции условного времени до разорения.....	35
1.6. Численные примеры-2.....	45
1.7. Моменты условного времени до разорения.....	47
1.8. Плотность распределения условного времени до разорения при нулевом начальном капитале.....	50
1.9. Плотность распределения условного времени при неограниченно возрастающем начальном капитале.....	52
Резюме к главе 1.....	53
Глава 2. Математическая модель страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и выплат	55
2.1. Математическая модель страховой компании.....	55
2.2. Уравнения для вероятностей разорения и выживания.....	58
2.3. Вероятности разорения при малой нагрузке страховой премии.....	60
2.4. Производящие функции условного времени.....	69
2.5. Производящие функции условного времени при малой нагрузке страховой премии.....	72
2.6. Плотность распределения условного времени при неограниченно возрастающем начальном капитале.....	77
Резюме к главе 2.....	78

Глава 3. Математические модели деятельности некоммерческого фонда.....	80
3.1. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке поступающих платежей и релейном управлении выплатами.....	80
3.1.1. Модель изменения капитала фонда.....	80
3.1.2. Плотность распределения капитала фонда	82
3.1.3. Плотность распределения продолжительности периода неплатёжеспособности.....	89
3.1.4. Плотность распределения продолжительности периода повышенных выплат.....	94
3.2. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при пуассоновском потоке поступающих платежей и релейно-гистерезисном управлении выплатами.....	97
3.2.1. Модель изменения капитала фонда.....	97
3.2.2. Плотность распределения капитала фонда.....	99
3.2.3. Экспоненциальное распределение с премий.....	101
3.2.4. Плотность распределения капитала фонда при произвольном распределении премий.....	106
3.3. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда с пуассоновскими потоками поступлений и выплат и релейно-гистерезисным управлением интенсивностью выплат.....	115
3.3.1. Модель изменения капитала фонда.....	115
3.3.2. Плотность распределения капитала фонда.....	116
3.3.3. Экспоненциальные распределения премий и выплат.....	119
3.3.4. Плотность распределения капитала фонда при произвольных распределениях премий и выплат	121
Резюме к главе 3.....	127
Глава 4. Комплекс алгоритмов и программ для вычисления вероятностей разорения и имитационного моделирования моделей	

страховых компаний	128
4.1. Комплекс алгоритмов и программ для расчета вероятностей разорения математических моделей страховых компаний.....	128
4.2. Имитационное моделирование моделей страховых компаний...	134
Резюме к главе 4.....	140
Заключение	141
Список использованной литературы	143

Введение

Актуальность работы

Общеизвестно [1,35], что основной принцип любого вида страхования состоит в том, что страховая компания (страховщик), получив предварительно от страхователя определенную денежную сумму (страховую премию), обязуется при наступлении страхового случая произвести страховую выплату, покрывающую финансовые потери.

Хотя для каждого страхового контракта значения страховой премии и возможной страховой выплаты строго оговорены, до момента заключения контракта они неизвестны и должны рассматриваться как случайные величины. Моменты поступления страховых премий и наступления страховых случаев также являются случайными величинами. Поэтому любая математическая модель деятельности страховой компании должна наряду с правилами начисления страховых премий включать в себя статистические модели потоков страховых премий и выплат.

Основы современной актуарной математики были заложены работами Ф.Лундберга и Х.Крамера, в которых была предложена и исследована так называемая классическая модель процесса страхования [83,106]. В рамках этой модели поступление страховых премий в компанию считается детерминированным, страховые выплаты считаются независимыми, как правило, одинаково распределенными случайными величинами. Моменты наступления страховых выплат образуют пуассоновский поток. Описание этой модели содержится практически в любой монографической литературе. Укажем, например, монографии Н. Бауэрса с соавторами [1], Э. Штрауба [85], Д. Кокса и В. Смита [65], Y.H. Panjer и G.E. Willmont [106], H.U. Gerber [92], В.Ю. Королева, В.Е. Бенинга, С.Ю. Шоргина [66], обзорные статьи В.И. Ротаря и В.Е. Бенинга [83], В. Калашникова и Д. Константидиса [54], П. Эмбрехтса и К. Клюппенберга [86].

В работах V.M.Malinovskii [103,104] и В.Н. Иголкина [52] для классической модели страховой компании исследована вероятность разорения на конечном интервале, S.Asmussen [87] исследовал адаптивные процедуры оценки вероятности разорения. Верхние и нижние границы для вероятности разорения рассматриваются в работах Ю.Д. Григорьева и А.В.Куклина [41,42], О.П. Виноградова [34]. Выражение для вероятности разорения при малой нагрузке страховой премии приводится в работе В.Е. Бенинга и В.Ю. Королева [5], В.М. Каца и К.И. Лившица [60], «простые аппроксимации» вероятности разорения, как их называет автор, в работах J.Grandell [95,96]. В работе [95] приводится подробный разбор предшествующих результатов, полученных О. Lundberg, А. Renyi, F.E. De Vylder. В работе В.В. Калашникова и Г.Ш. Цициашвили [55] исследуются оценки вероятности разорения при больших выплатах. В работах В.М. Каца и К.И. Лившица исследуется распределение условного времени до разорения страховой компании [62], влияние рекламы на деятельность страховой компании [61], задача конкурентного взаимодействия страховых компаний [58]. Задача перестрахования больших рисков рассматривается в монографии Е.В. Булинской [10], а также в работах Е.В. Булинской [9], А.Ю. Голубина [37,94] Е.В. Глухой и Е.В. Капустина [36], Г.А. Медведева [75], Н. Schmidli [109] Специальный случай выплат, имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом, исследован в работе Е.В. Капустина [56].

Усложнение классической модели страхования осуществляется за счет отказа от некоторых ограничительных предположений, связанных с характером потоков поступающих страховых взносов и страховых выплат. В работе О.П. Виноградова [33] исследован случай, когда интервалы между выплатами имеют неодинаковые показательные распределения, а сами выплаты показательное распределение. В работах О.С. Жилиной [45], К.И.

Лившица [69], А.В. Бойкова [8] рассматривается ситуация, когда страховые премии и страховые выплаты образуют два независимых друг от друга пуассоновских потока (модель со случайными премиями), находятся оценки сверху для вероятности разорения. Дальнейшее исследование этой модели содержится в работах [89,3]. В работах О.А. Змеева [46,47] исследуются модели, в которых интенсивность потока поступающих в компанию рисков зависит от количества уже застрахованных, а возможное число клиентов компании может быть конечным.

Наиболее близкой к проблемам, рассматриваемым в дальнейшем в диссертации, является модель изменения капитала страховой компании, в которой интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат могут меняться в случайные моменты времени за счет изменения, например, внешних условий. Так, например, официальная статистика Минздравсоцразвития РФ и ГИБДД РФ [76,38] указывает на наличие сезонных скачкообразных колебаний числа заболевших и числа ДТП. Адекватной моделью потоков страховых премий и выплат при этом являются дважды стохастические пуассоновские потоки.

Впервые такая модель была рассмотрена в работе J.M. Reinhard [107], в которой были получены уравнения для вероятностей разорения. Верхние границы для вероятности разорения были получены Y. Wu [115]. Оценке коэффициента Лундберга для данной модели посвящена работа H. Schmidli [108]. Вероятность разорения исследуется в работе M. Snoussi [110]. Для модели с двумя состояниями и некоторого специального класса распределений выплат вероятности разорения находятся в работе Y. Lu и S. Li [102]. H. Jasiulewicz [97] вводит дополнительное предположение, что скорость поступления страховых премий зависит от накопленного капитала и находит преобразования Лапласа для вероятностей разорения в случае двух состояний. Модели такого типа рассматривались также в работах В.Е.

Бенинга и Ю.В. Королева [6], S. Asmussen [88], R. Wu и L. Wei [114], в которых марковский процесс одновременно с интенсивностью выплат изменяет скорость поступления премий. В.Н. Иголкин [51,53] в отличие от упомянутых выше работ исследует эту проблему в предположении синхронности моментов изменения интенсивности потока и моментов поступления страховых исков.

В большом числе работ, опубликованных в последнее десятилетие, рассматриваются ситуации, когда страховая компания может реинвестировать имеющиеся у нее свободные средства в безрисковые или рискованные активы для извлечения дополнительного дохода. В работе G. Wang [112], G. Wang и R. Wu [113] рассматривается расширение стандартной модели на случай, когда излишек капитала реинвестируется, при этом существует неопределенность в поступлении страховых премий. В работе [111] O. Tang и G. Tsitsiashvili рассматривается два типа рисков, с которыми сталкивается компания: основной, страховой и финансовый риск от инвестирования капитала в рискованные активы. J. Cai и H. Jang [90] исследуют разорение в пуассоновской модели выплат с возмущением и возможностью инвестировать под постоянный либо случайный процент. Несколько неожиданным является один из результатов авторов. В исследуемой модели вероятность разорения не является монотонно убывающей функцией начального капитала.

Отметим также работу [99] C. Kluppelberg с соавторами, в которой вместо обобщенного пуассоновского процесса рассматривается обобщенный процесс Леви, что позволяет отказаться от условия существования конечного математического ожидания для размера страховой выплаты. В работе [100] X.S. Lin и K.P. Pavlova стандартная модель расширяется за счет введения выплаты дивидендов выше определенного порога. В работе [91] Y. Chen и K.W. Ng исследуется задача разорения страховой компании в случае, когда

страховые выплаты являются попарно отрицательно зависимыми случайными величинами, в отличие от стандартного условия их независимости.

Можно упомянуть также работы В.М. Каца, К.И. Лившица и А.А. Назарова [59] и А.М. Моисеева [78], в которых для исследования задач страхования используется аппарат теории массового обслуживания, применение методов теории чувствительности к задачам страхования рассматривается в работе R. Norberg [105]. Франшизе посвящена работа Ю.Д. Григорьева и И.Ю. Хекало [40].

Близкими к математическим моделям страхования являются математические модели так называемых некоммерческих фондов, целью деятельности которых, как и целью деятельности страховых компаний, является сбор и перераспределение денежных средств. К некоммерческим фондам могут быть отнесены, например, все внебюджетные фонды РФ и эндаумент-фонды, самым известным из которых является Нобелевский фонд. Общие черты этих моделей особенно проявляются при сравнении с моделями страхования, в которых как, например, в [100,98,57,93], допускается выплата дивидендов при достаточно большом накопленном капитале, а страховая компания продолжает существовать после наступления разорения [57,98]. Основное отличие от моделей страхования состоит в том, что при отрицательном капитале фонд не прекращает деятельность, возможно управление выплатами из фонда. Исследованию различных моделей некоммерческих фондов посвящены работы О.А. Змеева [48,49,50], О.В. Вальц и О.А. Змеева [31,32], в которых в качестве модели фонда используется классическая модель страховой компании с нестраховыми выплатами (дивидендами) и предлагается стратегия релейно-гистерезисного управления выплатами из фонда. В работах К.И. Лившица и И.Ю. Шифердекер [70,71] находится плотность распределения капитала фонда в

нестационарном режиме. В работе [72] модель фонда строится как аналог модели страховой компании с пуассоновскими потоками премий и выплат. Выбор оптимальной стратегии управления капиталом фонда рассмотрен в работах А.В. Китаевой и А.Ф. Терпугова [63,64].

Не смотря на обилие работ, посвященных исследованию математических моделей страхования, можно отметить еще много проблем, требующих дополнительного исследования. К числу таких проблем можно отнести, например, следующие:

1. Для моделей страхования с дважды стохастическими потоками премий и выплат не существует простых соотношений, которые позволяли бы оценить вероятность разорения страховой компании и другие статистические характеристики при произвольных распределениях страховых премий и выплат.

2. Как уже упоминалось, близкими к математическим моделям страхования являются математические модели некоммерческих фондов. Изучению математических моделей некоммерческих фондов посвящены лишь отдельные работы.

Представленная работа посвящена решению данных задач, что, по мнению автора, и определяет ее актуальность.

Целью диссертационной работы является построение и исследование математических моделей страховых компаний и некоммерческих фондов, а именно:

1. Для моделей страховых компаний с дважды стохастическими потоками страховых премий и страховых выплат определение таких их статистических характеристик, как вероятность разорения, распределение времени до разорения при условии, что разорение происходит, нахождение среднего и дисперсии условного времени до разорения при дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Разработка алгоритмов и проблемно-ориентированных программ численного

нахождения вероятностей разорения и имитационного моделирования моделей страховых компаний.

2. Для моделей некоммерческих фондов определение при различных предположениях о потоках поступающих в фонд платежей и выплат из фонда и различных предположениях о стратегии управления денежными средствами фонда таких их статистических характеристик, как плотность распределения величины капитала фонда, плотностей распределения продолжительности периода повышенных выплат и продолжительности периода неплатежеспособности.

Краткое содержание работы

В первой главе диссертации рассматривается математическая модель страховой компании в случае, когда моделью потока страховых выплат является дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями. Страховые выплаты являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Страховые премии поступают непрерывно во времени с постоянной скоростью C .

В работе находятся основные статистические характеристики функционирования страховой компании при дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Получены выражения для вероятности разорения на бесконечном временном интервале и для производящей функции условного времени до разорения при условии, что разорение происходит. Для исследуемой модели получены выражения для среднего значения условного времени до разорения, дисперсии условного времени до разорения. Доказано, что при неограниченно растущем начальном капитале и одновременном уменьшении нагрузки страховой премии распределение условного времени до разорения является асимптотически нормальным. На отдельных примерах проведен анализ границ применимости предложенных приближенных соотношений для статистических характеристик функционирования страховой компании.

Во второй главе диссертации исследуется математическая модель изменения капитала страховой компании при дважды стохастических пуассоновских потоках страховых премий и страховых выплат. Считается, что с начала функционирования компании прошло определенное время, потоки страховых премий и страховых выплат не зависят друг от друга. Интенсивность потока страховых премий $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и m состояниями. Страховые премии являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Интенсивность потока страховых выплат $\mu(t)$ также является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями. Страховые выплаты являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

В работе находятся основные статистические характеристики функционирования страховой компании при дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Получены выражения для вероятности разорения на бесконечном временном интервале и для производящей функции условного времени до разорения при условии, что разорение происходит. Для исследуемой модели получены выражения для среднего значения условного времени до разорения, дисперсии условного времени до разорения. Доказано, что при неограниченно растущем начальном капитале и одновременном уменьшении нагрузки страховой премии распределение условного времени до разорения является асимптотически нормальным. На отдельных примерах проведен анализ границ применимости предложенных приближенных соотношений.

В третьей главе диссертации исследуются математические модели некоммерческих фондов. При этом под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли.

В параграфе 3.1 исследуется математическая модель деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом пуассоновском потоке

поступающих платежей и релейном управлении выплатами. Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами. Моменты поступления денежных средств образуют дважды стохастический пуассоновский поток. Моменты выплаты денежных средств образуют пуассоновский поток. Расходуемые суммы являются независимыми случайными величинами со средним значением $b(S)$, зависящем от капитала фонда S . Стратегия расходования денежных средств имеет релейный характер, т.е.

$$b(S) = \begin{cases} b_0, S < S_0, \\ b_1, S > S_0 \end{cases}$$

для некоторого порогового значения капитала S_0 . Параметры выбраны так, что при $S < S_0$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем собирает, а при $S > S_0$ расходует больше средств, чем в него поступает. Наконец, считается, что при $S < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатёжеспособности фонда, выплаты начисляются, и обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

В работе находятся основные статистические характеристики функционирования фонда при дополнительном предположении о том, что средняя выплата из фонда «почти совпадает» со средним поступлением в фонд. При таком предположении находятся плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме, плотности распределения периода неплатежеспособности и периода повышенных выплат.

В параграфе 3.2 исследуется математическая модель деятельности некоммерческого фонда при пуассоновском потоке поступающих платежей и релейно-гистерезисном управлением выплатами. Считается, что расходование денежных средств происходит непрерывно во времени со скоростью $b(S)$, где S - капитал фонда в текущий момент времени. Предполагается, что расходование денежных средств определяется следующим образом. Устанавливаются два пороговых значения капитала S_1 и

S_2 , причём $S_1 < S_2$. В области $S < S_1$, $b(S) = b_0$, в области $S > S_2$, $b(S) = b_1$. В области же $S_1 \leq S \leq S_2$ устанавливается $b(S) = b_0$ или $b(S) = b_1$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошёл в эту область. Если он вошёл в неё через порог S_1 снизу вверх, то остаётся $b(S) = b_0$, если же он вошёл в эту область через порог S_2 сверху вниз, то остаётся $b(S) = b_1$. Следуя [50], такой алгоритм управления капиталом фонда назовём релейно-гистерезисным.

В работе при дополнительном предположении о том, что средняя выплата из фонда «почти совпадает» со средним поступлением в фонд находится плотность распределения капитала фонда.

В параграфе 3.3 рассматривается математическая модель деятельности некоммерческого фонда с пуассоновскими потоками поступлений и выплат и релейно-гистерезисным управлением интенсивностью выплат, зависящей от текущего капитала. Как и в предыдущих случаях при дополнительном предположении о том, что средняя выплата из фонда «почти совпадает» со средним поступлением в фонд находится плотность распределения капитала фонда.

В четвертой главе диссертации рассматривается комплекс алгоритмов и программ, реализующих имитационное моделирование функционирования страховой компании в соответствии с моделями гл. 1 и гл. 2, и комплекс алгоритмов и программ для численного решения систем интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, определяющих вероятности разорения страховой компании. Результаты гл. 4 используются для определения границ применимости полученных в работе теоретических соотношений.

Основные научные результаты

Основные научные результаты, полученные автором и выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Статистические характеристики математической модели страховой компании с дважды стохастическим потоком страховых выплат при малой нагрузке страховой премии и способ их расчета.

2. Статистические характеристики математической модели страховой компании с дважды стохастическими потоками страховых премий и страховых выплат при малой нагрузке страховой премии и способ их расчета.

3. Комплекс проблемно-ориентированных алгоритмов и программ расчета вероятностей разорения для моделей страховых компаний с дважды стохастическими потоками страховых премий и выплат и имитационного моделирования моделей страховых компаний.

4. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда с дважды стохастическим потоком поступающих платежей и релейным управлением капиталом и определение ее статистических характеристик.

5. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда с пуассоновским потоком поступающих платежей и релейно-гистерезисным управлением средним значением выплаты либо интенсивностью потока выплат и ее статистические характеристики.

Методы исследования. Основная часть проведенных исследований носит теоретический характер и проводилось с использованием аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, теории интегральных и дифференциальных уравнений, теории интегральных преобразований. Для определения области применимости полученных в работе асимптотических результатов использовалось численное решение систем интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, методы имитационного моделирования.

Теоретическая значимость работы, по мнению автора, состоит в том, что получили дальнейшее развитие методы актуарной математики, примененные для исследования математических моделей страховых компаний и некоммерческих фондов с более адекватными предположениями

о стохастических потоках денежных средств и стратегиях управления их расходованием.

Практическая ценность работы состоит в том, что полученные в ней соотношения могут быть использованы для расчета нагрузок страховых премий, выбора стратегии управления капиталом некоммерческих фондов. Разработанный комплекс программ позволяет находить численные решения уравнений, определяющих вероятности разорения страховых компаний для рассмотренных моделей, а также осуществлять имитационное моделирование моделей страхования.

Достоверность и обоснованность всех полученных в диссертации результатов подтверждается корректным применением используемого математического аппарата, а также совпадением теоретических результатов с численными расчетами и результатами имитационного моделирования.

Межпредметность представляемых моделей

Рассматриваемые в диссертации задачи страхования являются, по сути, частным случаем задач теории запасов. Наиболее явно это прослеживается в моделях некоммерческих фондов, где по существу анализируется результат управляемого движения любого ресурса, поступление и выбытие которого подчиняется стохастическим закономерностям. В качестве примера можно рассмотреть задачу о разборе воды из водохранилища. Заполнение водохранилища за счет осадков происходит в случайные моменты времени. Разбор воды из водохранилища можно регулировать, назначая цену за потребленную воду, зависящую от количества накопленной воды.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации

Постановка изложенных в диссертации задач была сделана научным руководителем, д.т.н., профессором К.И. Лившицем. Доказательство и обоснование полученных в диссертации результатов, математические выкладки, численные расчеты выполнены лично автором. В совместных публикациях научному руководителю К.И. Лившицу принадлежат

постановки задач и указания основных направлений исследований, а основные результаты, выкладки и численные расчеты выполнены автором.

Апробация работы

Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. VII, VIII, X Всероссийских научно-практических конференциях с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2008, 2009, 2011 г.г.

2. VII, VIII, IX Российских конференциях с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Томск, 2008, 2010, 2012 г.г.

3. XII, XIV, XVII Всероссийских научно-практических конференциях «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2008, 2010, 2013 г.г.

Результаты, представленные в данной работе, были получены в рамках выполнения научных проектов:

- 2009 – 2011 гг. Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 гг.) Федерального агентства по образованию, проект № 4761: «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

- 2011г. Гранта РФФИ № «11-01-90713-моб_ст.».

Публикации

По результатам выполненных исследований автором опубликовано 20 печатных работ [11–30], в том числе 6 в изданиях, рекомендованных списком ВАК [11–16].

Глава 1. Математическая модель страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат

Классическая модель изменения капитала страховой компании, создателем которой считается Ф. Лундберг [83], основана на следующих предположениях: [83,85,106,92] процесс поступления страховых выплат в компанию считается детерминированным, за время t приращение капитала равно Ct , где C - количество средств, поступивших в компанию за единицу времени, страховые выплаты – независимые, одинаково распределённые случайные величины; моменты наступления страховых выплат образуют пуассоновский поток интенсивности λ . Однако, как скорость поступления денежных средств, так и интенсивность потока страховых выплат λ на самом деле могут изменяться с течением времени. Так, например, при страховании автотранспорта интенсивность потока страховых выплат меняется при изменении погодных условий. Такая же ситуация наблюдается при страховании от клещевого энцефалита и в других случаях. Характерной чертой при этом является то, что вышеуказанные характеристики могут, изменяться скачкообразно в случайные моменты времени.

В настоящей главе рассматривается обобщение классической модели страховой компании на случай, когда моделью потока страховых выплат является дважды стохастический пуассоновский поток [82] или в другой терминологии ММР – поток [80]. Модели такого типа рассматривались, например, в работах [107,115,102,97,108]. Основная сложность при этом состоит в нахождении решений получающихся систем интегро-дифференциальных уравнений, задающих вероятности разорения. Целью работы является построения оценок вероятностей разорения и других, связанных с ними характеристик, при дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии.

1.1 Математическая модель страховой компании

Итак, будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$ [79]. Переход из состояния i в состояние j за малое время Δt задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ ранга $n-1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность:

$$\begin{aligned} P_{ij}(\Delta t) &= q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), i \neq j; \\ P_{ii}(\Delta t) &= 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим $p_i(t) = \Pr\{\lambda(t) = \lambda_i\}, i = \overline{1, n}$. Если управляющая цепь Маркова является неразложимой [79], то существуют финальные вероятности

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t),$$

которые являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n q_{ji}\pi_j = 0, \quad (1.3)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1. \quad (1.4)$$

Обозначим далее через λ_0 среднюю интенсивность потока страховых выплат в стационарном режиме:

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i. \quad (1.5)$$

Будем считать, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и моментами $M\{x^k\} = a_k, k = 2, 3$.

Наконец, в соответствии с классической моделью страховой компании будем считать, что страховые премии поступают непрерывно во времени с

постоянной скоростью C , так что за время Δt приращение капитала за счёт страховых премий равно $C\Delta t$.

Пусть $S(t)$ - капитал компании в момент времени t . Если значение интенсивности потока выплат в момент времени, t $\lambda(t) = \lambda_i$, то изменение капитала $\Delta S(t)$ компании за время Δt определяется соотношением:

$$\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t) = \begin{cases} C\Delta t, & \text{с вероятностью } 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \\ C\Delta t - x, & \text{с вероятностью } \lambda_i \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t). \end{cases} \quad (1.6)$$

где x - случайная страховая выплата за время Δt . Усредняя соотношение (1.6) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, что изменение среднего капитала компании $\overline{S(t)}$ определяется уравнением

$$\frac{d\overline{S(t)}}{dt} = C - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i(t) a,$$

откуда

$$\overline{S(t)} = S(0) + (C - \lambda_0 a)t + \sum_{i=1}^n \lambda_i a \int_0^t (\pi_i - p_i(z)) dz. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.7) следует, что при $t \gg 1$ капитал компании в среднем монотонно возрастает, если

$$C = (1 + \theta) \lambda_0 a, \quad (1.8)$$

где $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разоряется. Параметр θ , как и в классической модели [106], нагрузка страховой премии.

1.2. Уравнения для вероятностей разорения и выживания

За меру финансового риска, связанного с деятельностью страховой компании, обычно принимают вероятность её разорения, то есть вероятность ситуации, в которой капитал компании впервые становится отрицательным [106]. Этот термин является чисто техническим, так как в реальной жизни компания может восполнить временный недостаток средств за счёт каких-то других источников, которые не связаны со страхованием.

Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$. Определим

$T = \inf\{t: S(t) < 0\}$ и $T = \infty$, если $S(t) \geq 0$ для любого t . Случайная величина T – момент разорения [106]. Тогда

$$P_i(S) = \Pr\{T < \infty | S(0) = S, \lambda(0) = \lambda_i\}$$

и

$$g_i(S) = \Pr\{T = \infty | S(0) = S, \lambda(0) = \lambda_i\}$$

– вероятности разорения и выживания страховой компании на бесконечном временном интервале соответственно, при условии, что в начальный момент времени её капитал равен S и значение интенсивности $\lambda = \lambda_i$. По смыслу задачи функции $G_i(S)$ являются непрерывными, монотонно возрастающими, а $P_i(S)$ – непрерывными монотонно убывающими функциями S . Вероятности $P_i(S)$, $g_i(S)$ связаны очевидным соотношением $P_i(S) + g_i(S) = 1$.

Наконец, пусть

$$g(S) = \sum_{i=1}^n \pi_i g_i(S), \quad P(S) = \sum_{i=1}^n \pi_i P_i(S). \quad (1.9)$$

Так как в начальный момент времени начальный капитал S и начальное состояние интенсивности λ не зависят друг от друга, то $G(S)$ и $P(S)$ есть вероятность выживания и разорения компании при условии, что начальный капитал равен S и $p_i(0) = \pi_i$.

Для вывода уравнений, определяющих вероятности $G_i(S)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени t интенсивность потока $\lambda = \lambda_i$ и капитал компании равен $S - C\Delta t$. За время Δt могут произойти следующие события:

1. С вероятностью $(1 - \lambda_i \Delta t)(1 + q_{ij} \Delta t) + o(\Delta t)$ интенсивность потока не меняется, страховые выплаты не производятся.
2. С вероятностью $\lambda_i \Delta t(1 + q_{ij} \Delta t) \psi(x) dx + o(\Delta t)$ интенсивность потока не меняется и производится случайная страховая выплата размера x .
3. С вероятностью $q_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ происходит изменение интенсивности потока с λ_i на λ_j , страховая выплата не производится.

Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$g_i(S - C\Delta t) = (1 - \lambda_i \Delta t) g_i(S) + \lambda_i \Delta t \int_0^S g_i(S - x) \psi(x) dx + \sum_{j=1}^n q_{ij} g_j(S) \Delta t + o(\Delta t).$$

Поделив левую и правую часть на Δt , получим

$$C \frac{g_i(S) - g_i(S - C\Delta t)}{C\Delta t} = \lambda_i g_i(S) - \lambda_i \int_0^S g_i(S - x) \psi(x) dx - \sum_{j=1}^n q_{ij} g_j(S) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему уравнений относительно вероятностей $g_i(S)$:

$$C \dot{g}_i(S) = \lambda_i g_i(S) - \sum_{j=1}^n q_{ij} g_j(S) - \lambda_i \int_0^S g_i(S - x) \psi(x) dx, \quad (1.10)$$

с граничными условиями:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} g_i(S) = 1, \quad (1.11)$$

так как при неограниченном росте начального капитала компания выживает с вероятностью единица при любом начальном значении интенсивности. Система уравнений (1.10) в несколько другом виде впервые получена в [107].

Соответствующие (1.10) уравнения для вероятностей разорения имеют вид:

$$C \dot{P}_i(S) = \lambda_i P_i(S) - \sum_{j=1}^n q_{ij} P_j(S) - \lambda_i \int_0^S P_i(S - x) \psi(x) dx - \lambda_i \int_S^{\infty} \psi(x) dx, \quad (1.12)$$

с граничными условиями:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P_i(S) = 0. \quad (1.13)$$

Для решения систем уравнений (1.11) или (1.13) можно применить преобразование Лапласа. Обозначим

$$F_i(\omega) = \int_0^{\infty} g_i(S) e^{-\omega S} dS$$

и пусть

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} \psi(S) e^{-\omega S} dS, \quad X(\omega) = \frac{1 - Y(\omega)}{\omega}.$$

Применяя преобразование Лапласа к системе (1.10), получим систему уравнений относительно $F_i(\omega)$

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} F_j(\omega) + \omega(C - \lambda_i X(\omega)) F_i(\omega) = C g_i(0). \quad (1.14)$$

Для определения вероятности выживания $g_i(S)$ нужно решить систему уравнений (1.14) и вычислить обратное преобразование Лапласа.

Из соотношений (1.14) можно получить значение вероятности $g(S)$ при $S=0$. Умножая уравнения (1.14) на π_i и складывая эти уравнения, получим с учётом (1.3)

$$Cg(0) = \sum_{i=1}^n \pi_i (C - \lambda_i X(\omega)) \omega F_i(\omega). \quad (1.15)$$

Так как $X(0) = a$ и по свойству преобразования Лапласа [44]

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega F_i(\omega) = \lim_{S \rightarrow \infty} g_i(S) = 1, \quad (1.16)$$

то, переходя в (1.15) к пределу при $\omega \rightarrow 0$, получим, что

$$g(0) = \frac{C - \lambda_0 a}{\theta} = \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (1.17)$$

Таким образом, как и в классической модели страховой компании [106], вероятность выживания при нулевом начальном капитале зависит только от нагрузки страховой премии.

1.3. Вероятности разорения и выживания при малой нагрузке страховой премии

Получить точное решение систем уравнений (1.10) или (1.12) удаётся лишь в исключительных случаях. Так при $n=1$ удаётся найти преобразование Лапласа от $g(S)$ или $P(S)$ при произвольном распределении $\psi(x)$ [106]. Однако его обращение в общем случае представляет собой сложную задачу. В [35,107] при $n=2$ найдено решение системы (1.10) для случая экспоненциального распределения страховых выплат. Во всех остальных случаях точное решение уравнений неизвестно. Поэтому рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$.

Идея построения приближённого решения при этом состоит в том, чтобы перейти от функций $P_i(S)$ к некоторым другим функциям, зависящим от малого параметра θ , вводя тем самым малый параметр в систему уравнений (1.12), что позволяет строить приближенное решение разложением по малому параметру. Ниже решение системы уравнений (1.12) будем искать в виде

$$P_i(S) = \frac{1}{1+\theta} \varphi_i(\theta S, \theta) \quad (1.18)$$

Несколько отличающаяся от (1.18) аппроксимация

$$P_i(S) = A(\theta) \varphi_i\left(\frac{\theta}{1+\theta} S, \theta\right) \quad (1.19)$$

будет рассмотрена в следующем параграфе.

Относительно функций $\varphi_i(z, \theta)$ будем предполагать, что они являются, по крайней мере, трижды дифференцируемые по z и по θ . Это предполагает, что функции $\psi(x)$, входящие в уравнения (1.12), являются «достаточно гладкими».

Подставляя (1.18) в уравнение (1.12) и сделав замену переменной $\theta S = z$, получим уравнения относительно функций $\varphi_i(z, \theta)$:

$$C\theta \dot{\varphi}_i(z, \theta) = \lambda_i \varphi_i(z, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij} \varphi_j(z, \theta) - \lambda_i \int_{\theta}^{\infty} \varphi_i(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx + R_i(z, \theta), \quad (1.20)$$

где

$$R_i(z, \theta) = \lambda_i \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \varphi_i(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx - \lambda_i (1 + \theta) \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(x) dx. \quad (1.21)$$

По формальному признаку наличия малого параметра θ при производных уравнения (1.20) можно отнести к классу сингулярно возмущенных уравнений [72].

Теорема 1.1. *При $\theta \ll 1$ функции*

$$\varphi_i(z, \theta) = e^{-\frac{A_i}{A} z} + O(\theta), \quad (1.22)$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_i - \lambda_0), \quad (1.23)$$

$$A_2 = \lambda_0 a \quad (1.24)$$

и матрица

$$\mathbf{R} = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1,n-1} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \dots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (1.25)$$

Доказательство. Рассмотрим, прежде всего, поведение величин $R_i(z, \theta)$ при $\theta \ll 1$. Имеем, очевидно,

$$\frac{1}{\theta^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \varphi_i(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx = \frac{1}{z^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \frac{z^2}{\theta^2} \varphi_i(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx \leq \frac{1 + \theta}{z^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} x^2 \psi(x) dx \rightarrow 0$$

при $\theta \rightarrow 0$, так как по условию второй момент $a_2 = M\{x^2\}$ существует. Таким образом, $R_i(z, \theta) = o(\theta^2)$ и этой величиной в дальнейшем будем пренебрегать.

Обозначим

$$\varphi_i(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi_i(z, \theta). \quad (1.26)$$

Переходя в (1.20) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} \varphi_j(z) = 0. \quad (1.27)$$

Так как по условию $\text{Rang} [q_{ij}] = n - 1$, то из сравнения систем уравнений (1.2) и (1.27), получаем, что

$$\varphi_i(z) = \varphi(z), \forall i, \quad (1.28)$$

где $\varphi(z)$ - неизвестная пока функция.

Представим теперь функции $\varphi_i(z, \theta)$ в виде:

$$\varphi_i(z, \theta) = \varphi(z) + B_i(z)\theta + o(\theta). \quad (1.29)$$

Подставляя разложения (1.29) в уравнения (1.20), раскладывая $\varphi(z - \theta x)$ и $B_i(z - \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ , получим, учитывая (1.8), что

$$(\lambda_0 - \lambda_i) a\dot{\phi}(z) + \sum_{j=1}^n q_{ij} B_j(z) + \frac{\alpha(\theta)}{\theta} = 0.$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} B_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0) a\dot{\phi}(z). \quad (1.30)$$

Так как одновременно $\sum_{i=1}^n \pi_i q_{ij} = 0$ и $\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) = 0$, то система уравнений

(1.30) совместна и имеет ранг $n-1$. Пусть матрица $\mathbf{R} = [R_{ij}]$ определяется соотношением (1.25). Тогда решение системы (1.30) имеет вид

$$B_k(z) = -\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{jn} B_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a\dot{\phi}(z). \quad (1.31)$$

Из системы уравнений (1.2) имеем, что $q_{jn} = -\sum_{i=1}^{n-1} q_{ji}$.

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{jn} = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{ji} = -\sum_{j=1}^{n-1} \delta_{kj} = -1.$$

Откуда

$$B_k(z) = B_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a\dot{\phi}(z). \quad (1.32)$$

Представим теперь функции $\varphi_i(z, \theta)$ в виде

$$\varphi_i(z) = \varphi(z) + B_i(z)\theta + C_i(z)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (1.33)$$

Подставляя разложения (1.33) в уравнения (1.20), раскладывая

$\varphi(z - \theta x)$, $B_i(z - \theta x)$, $C_i(z - \theta x)$ в ряд Тейлора и, ограничиваясь, членами, имеющими порядок θ^2 , получим:

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} C_j(z) - (\lambda_i - \lambda_0) a\dot{B}_i(z) + \lambda_i \frac{a_2}{2} \ddot{\phi}(z) + \lambda_0 a\dot{\phi}(z) + \frac{\alpha(\theta^2)}{\theta^2} = 0.$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь:

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} C_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0) a\dot{B}_i(z) - \lambda_i \frac{a_2}{2} \ddot{\phi}(z) - \lambda_0 a\dot{\phi}(z). \quad (1.34)$$

Умножая соотношения (1.34) на π_i , суммируя и учитывая (1.3) получим:

$$\lambda_0 \frac{a_2}{2} \ddot{\varphi}(z) + \lambda_0 a \dot{\varphi}(z) - \sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{B}_i(z) = 0. \quad (1.35)$$

Так как

$$\dot{B}_k(z) = \dot{B}_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a \dot{\varphi}(z),$$

то из (1.34) получаем:

$$A_1 \ddot{\varphi}(z) + A_2 \dot{\varphi}(z) = 0, \quad (1.36)$$

где A_1, A_2 определяются формулами (1.23) и (1.24) соответственно. Откуда

$$\varphi(z) = U_1 + U_2 e^{-\frac{A_2}{A_1} z}. \quad (1.37)$$

Покажем, что константа $A_2 > 0$. Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i x_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} x_j,$$

где $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$ - произвольный вектор столбец. Обозначим, $y_i = \sum_{\delta=1}^{n-1} R_{i\delta} x_\delta$. Так как матрица \mathbf{R} определяется соотношением (1.25), то $x_i = \sum_{k=1}^{n-1} q_{ik} y_k$ и квадратичную форму I можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i y_i \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} y_i y_j \leq \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ii} y_i^2 + \\ &+ \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \frac{y_i^2 + y_j^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} y_i^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} y_j^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i y_i^2 \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ij} \leq 0, \end{aligned}$$

так как из условия (1.2) $\sum_{\delta=1}^{n-1} q_{ij} + q_{in} = 0$, где $q_{in} \geq 0$, следует, что $\sum_{i=1}^{n-1} q_{ij} \leq 0$, а из

условия (1.3) $\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ij} + \pi_n q_{nj} = 0$ следует, что и $\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i q_{ij} \leq 0$.

Применяя полученный результат к выражению для A_1 , положив $x_i = \lambda_i - \lambda_0$, получим, что $A_1 > 0$ как сумма положительного и неотрицательного слагаемых.

Так как граничное условие (1.13) должно выполняться при всех θ , то $\varphi_i(+\infty, \theta) = 0$ и, следовательно, $\varphi(+\infty) = 0$, откуда $U_1 = 0$.

Далее, из соотношений (1.9) и (1.16)

$$P(0) = \frac{1}{1+\theta} \sum_{i=1}^n \pi_i \varphi_i(0, \theta) = \frac{1}{1+\theta} (\varphi(0) + \theta \sum_{i=1}^n \pi_i B_i(0) + o(\theta)) = \frac{1}{1+\theta} \quad (1.38)$$

Так как и условие (1.38) должно выполняться при всех θ , то $\varphi(0) = 1$.

Таким образом,

$$\varphi(z) = e^{-\frac{A_2 z}{A_1}} \quad (1.39)$$

Откуда получаем соотношения (1.21). Теорема доказана. •

Из соотношения (1.18) имеем теперь, что при малых θ вероятности разорения

$$P_i(S) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{A_2 \theta S}{A_1}} + O(\theta). \quad (1.40)$$

Полученные оценки вероятностей разорения $P_i(S)$ можно улучшить, находя дополнительные слагаемые в разложении $\varphi_i(z, \theta)$ по степеням θ .

Теорема 1.2. *Функции $B_i(z)$, входящие в разложения (1.29) функций $\varphi_i(z, \theta)$ в ряд по степеням θ имеют вид:*

$$B_k(z) = (W_k + Wz) e^{-\frac{A_2 z}{A_1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (1.41)$$

$$B_n(z) = (W_n + Wz) e^{-\frac{A_2 z}{A_1}}, \quad (1.42)$$

где

$$W_n = \frac{aA_2}{A_1} \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) \quad (1.43)$$

$$W_k = W_n - \frac{aA_2}{A_1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0), \quad (1.44)$$

$$W = \frac{A_3 A_2^2}{A_1^3} - \frac{A_4 A_2}{A_1^2}, \quad (1.45)$$

$$A_3 = a^3 \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} (\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) - \frac{aa_2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\pi_i \lambda_i (\lambda_j - \lambda_0) + \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) \lambda_j) + \frac{\lambda_0 a_3}{6}, \quad (1.46)$$

$$A_4 = -\lambda_0 a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\pi_i (\lambda_j - \lambda_0) + \pi_i (\lambda_i - \lambda_0)). \quad (1.47)$$

Доказательство. Представим функции $\varphi_i(z)$ в виде:

$$\varphi_i(z) = \varphi(z) + B_i(z)\theta + C_i(z)\theta^2 + D_i(z)\theta^3 + o(\theta^3). \quad (1.48)$$

Подставляя разложения (1.48) в уравнения (1.20), раскладывая $\varphi(z - \theta x)$, $B_i(z - \theta x)$, $C_i(z - \theta x)$, $D_i(z - \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^3 , получим, учитывая (1.30) и (1.34) и переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$,

$$\sum_{\partial=1}^n q_{ij} D_j(z) - (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{C}_i(z) + \lambda_i \frac{a_2}{2} \ddot{B}_i(z) + \lambda_0 a \dot{B}_i(z) - \lambda_i \frac{a_3}{6} \ddot{\varphi}(z) = 0. \quad (1.49)$$

Умножая соотношения системы (1.49) на π_i и складывая эти соотношения, будем иметь:

$$-\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{C}_i(z) + \frac{a_2}{2} \sum_{i=1}^n \pi_i \lambda_i \ddot{B}_i(z) + \lambda_0 a \sum_{i=1}^n \pi_i \dot{B}_i(z) - \lambda_0 \frac{a_3}{6} \ddot{\varphi}(z) = 0. \quad (1.50)$$

Из системы уравнений (1.34) получим аналогично (1.32), что

$$C_k(z) = C_n(z) + a \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} (\lambda_i - \lambda_0) \dot{B}_i(z) - \frac{a_2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} \lambda_i \ddot{\varphi}(z) - \lambda_0 a \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} \dot{\varphi}(z). \quad (1.51)$$

Подставляя выражения (1.51) в (1.50) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{a_2}{2} \sum_{i=1}^n \pi_i \lambda_i \ddot{B}_i(z) - a^2 \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} (\lambda_i - \lambda_0) \ddot{B}_i(z) + \\ & + \lambda_0 a \sum_{i=1}^n \pi_i \dot{B}_i(z) + \left(\frac{aa_2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} \lambda_i - \frac{\lambda_0 a_3}{6} \right) \ddot{\varphi}(z) + \\ & + \lambda_0 a^2 \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{i=1}^{n-1} R_{ki} \dot{\varphi}(z) = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Соотношение (1.52) с учётом выражений (1.31), определяющих $B_i(z)$, приводит, наконец, к уравнению относительно $B_n(z)$

$$A_1 \ddot{B}_n(z) + A_2 \dot{B}_n(z) = A_3 \ddot{\varphi}(z) + A_4 \dot{\varphi}(z), \quad (1.53)$$

где постоянные A_3, A_4 определяются формулами (1.46) и (1.47) соответственно.

Решение уравнения (1.53), учитывая выражение для $\varphi(z)$ (1.39) имеет вид:

$$B_n(z) = W_0 + W_n e^{-\frac{A_2}{A_1} z} + W z e^{-\frac{A_2}{A_1} z}, \quad (1.54)$$

где W определяется формулой (1.45).

Из граничных условий (1.13), которые должны выполняться при всех θ , получаем, что $W_0 = 0$. Так как начальное условие (1.38) так же должно выполняться при всех θ и $\varphi(0) = 1$, то $\sum_{i=0}^n \pi_i B_i(0) = 0$. С учётом выражений (1.32) получаем, что

$$B_n(0) = - \sum_{k=1}^{n-1} \pi_k \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a \varphi(0)$$

и для W_n получаем выражение (1.43). Таким образом,

$$B_n(z) = W_n e^{-\frac{A_2}{A_1} z} + W z e^{-\frac{A_2}{A_1} z},$$

где W_n, W определяются соотношениями (1.43) и (1.45). Для остальных $B_k(z)$ будем теперь иметь

$$B_k(z) = W_k e^{-\frac{A_2}{A_1} z} + W z e^{-\frac{A_2}{A_1} z},$$

где

$$W_k = W_n - \frac{a A_2}{A_1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0),$$

т.е. имеют место соотношение (1.41) и (1.44). Теорема доказана. •

Формулы (1.40), определяющие вероятности разорения при малых θ переписутся теперь в виде

$$P_i(S) = \frac{1}{1+\theta} \left[e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta S} + \theta (W_i + \theta S W) e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta S} \right] + o(\theta). \quad (1.55)$$

Определяя теперь аналогичным путём функции $C_i(z)$, можно построить разложения вероятностей разорения $P_i(S)$ с точностью до $o(\theta^2)$ и т.д. К

сожалению, определить общую закономерность в образовании коэффициентов разложения не удаётся.

При $n=1$ из соотношений (1.41)-(1.45) получаем, что

$$B_1(z) = \frac{4a_3 a^2}{3a_2^3} z e^{-\frac{2a}{a_2} z}$$

и формула (1.55) для вероятности разорения даёт

$$P(S) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{2a}{a_2} \theta S} \left[1 + \frac{4a_3 a^2}{3a_2^3} \theta^2 S \right] + o(\theta^2). \quad (1.56)$$

1.4. Численные примеры – 1

Для определения границ применимости построенных моделей рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $n=1$, интенсивность потока страховых выплат не меняется. Страховые выплаты постоянны и имеют значение, равное a , то есть $\psi(x) = \delta(x-a)$. Тогда вероятность разорения имеет вид [35]

$$P(S) = 1 - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (S-an)^n}{(1+\theta)^n a^n n!} \exp\left(\frac{S-an}{(1+\theta)a}\right) \quad (1.57)$$

в области $ak \leq S \leq a(k+1)$.

Зависимости вероятности разорения $P(S)$ и её оценок, вычисленных по формулам (1.40) и (1.57), от капитала S при $\theta=0.1; 0.2; 0.5$ приведены на рисунке 1.1.

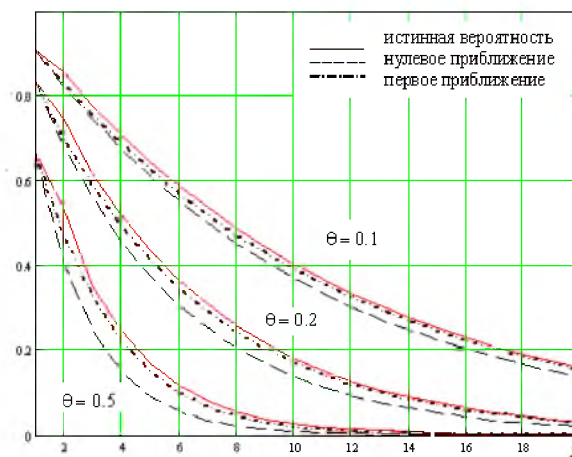


Рис. 1.1. – Аппроксимации вероятностей разорения при $\theta=0.1; 0.2; 0.5$

Пример 2. Пусть $n=2$. Страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение со средним значением a , то есть $\psi(x) = \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}$. Далее, будем предполагать, что интенсивность потока во втором состоянии $\lambda_2 = 0$. Система уравнений (1.10) для вероятностей выживания принимает вид $(\beta_1 = -q_{11} = q_{12}, \beta_2 = -q_{22} = q_{21})$.

$$\begin{aligned} C\dot{g}_1(S) &= (\alpha_1 + \beta_1)g_1(S) - \lambda_1 \int_0^S g_1(S-x)\psi(x)dx - \beta_1 g_2(S), \\ C\dot{g}_2(S) &= -\beta_2 g_1(S) + \beta_2 g_2(S). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Обозначим через $F_i(\omega) = \int_0^\infty g_i(S)e^{-\omega S}dS$ - преобразование Лапласа функций $g_i(S)$. Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (1.58), получим систему уравнений относительно $F_i(\omega)$

$$\begin{aligned} [C\omega - \lambda_1(1 - Y(\omega) - \beta_1)]F_1(\omega) + \beta_1 F_2(\omega) &= Cg_1(0), \\ \beta_2 F_1(\omega) + (C\omega - \beta_2)F_2(\omega) &= Cg_2(0), \end{aligned}$$

где $Y(\omega) = \frac{1}{1 + a\omega}$. Откуда

$$F_i(\omega) = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad i = \overline{1,2}, \quad (1.59)$$

где

$$\Delta(\omega) = \frac{\omega}{1 + a\omega} \left[ac^2\omega^2 + C(C - \lambda_1 a - \beta_1 a - \beta_2 a)\omega \right] - (\beta_1 + \beta_2)C + \lambda_1 \beta_2 a,$$

$$\Delta_1(\omega) = C^2 g_1(0)\omega - Cg_1(0)\beta_2 - Cg_2(0)\beta_1,$$

$$\Delta_2(\omega) = Cg_2(0)[C\omega - \lambda_1(1 - Y(\omega))] - Cg_1(0)\beta_2 - Cg_2(0)\beta_1.$$

Функции $g_i(S)$ определяются, как обратное преобразование Лапласа от $F_i(\omega)$. Уравнение $(1 + a\omega)\Delta(\omega) = 0$ имеет три корня:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_2, \omega_1 = \frac{-(c - a(\lambda_1 + \beta_1 + \beta_2)) \pm \sqrt{(c - a(\lambda_1 + \beta_1 + \beta_2))^2 + 4\theta\lambda_1\beta_2 a^2}}{2ac},$$

где учтено условие, $c = (1 + \theta)\lambda_0 a$. Очевидно, что $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0$. Неизвестные константы $g_1(0)$ и $g_2(0)$ будут определяться из условий $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega F_i(\omega) =$

$= \lim_{S \rightarrow \infty} g_i(S) = 1$ и условий $\Delta_i(\omega_2) = 0$, которые вытекают из условия аналитичности $F_i(\omega)$ при $\text{Re } \omega > 0$.

Находя постоянные и обращая преобразование Лапласа, получим

$$P_1(S) = 1 - g_1(S) = (1 + a\omega_1)e^{\omega_1 S}, \quad (1.60)$$

$$P_2(S) = 1 - g_2(S) = \frac{c(1 + a\omega_1)(1 + a\omega_2) - \lambda_1 a}{c(1 + a\omega_2) - \lambda_1 a} e^{\omega_1 S}. \quad (1.61)$$

Зависимости вероятностей разорения $P_i(S)$ и их оценок, построенных по формулам (1.40) и (1.55), от капитала S приведены на рисунках 1.2 а и 1.2 б. Параметры $a = 1, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0$, финальные вероятности $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$.

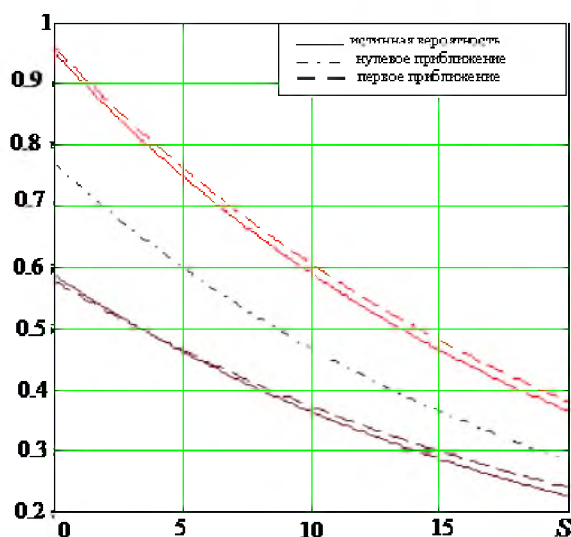


Рис. 1.2 а. – Аппроксимация вероятностей разорения при $\theta = 0.3$.

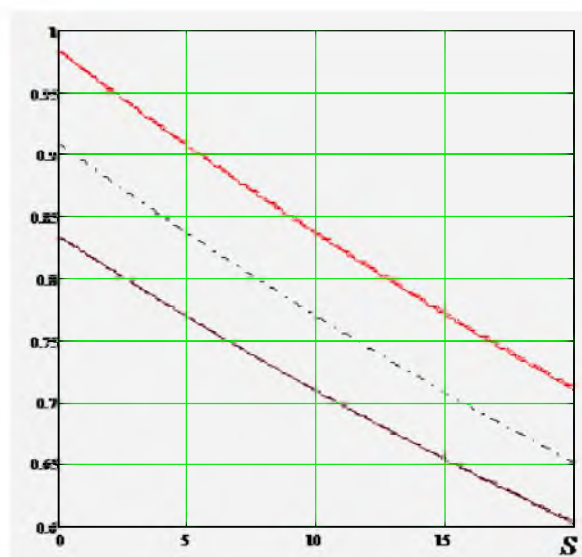


Рис. 1.2 б. – Аппроксимация вероятностей разорения при $\theta = 0.1$

Табл. 1.1.

θ	δ_1	δ_2
0.5	0.138	0.225
0.3	0.057	0.039
0.1	2.44×10^{-3}	1.668×10^{-3}
0.05	4.58×10^{-4}	3.105×10^{-4}
0.01	1.298×10^{-5}	1.174×10^{-5}

Обозначим оценки вероятностей разорения, вычисленные по формулам (1.54), как $\hat{P}_i(S)$, а через δ_i относительную погрешность аппроксимации, т.е.

$$\delta_i = \max_s \frac{|P_i(S) - \hat{P}_i(S)|}{P_i(S)}.$$

Зависимость погрешности аппроксимации δ_i от нагрузки страховой премии θ приведена в табл. 1.1. Как видно из таблицы, при $\theta \rightarrow 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю.

Пример 3. Пусть $n=3$. Страховые выплаты имеют гамма-распределение со средним значением a $\psi(s) = \frac{4}{a^2} s e^{-\frac{2s}{a}}$, интенсивности $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$,

матрица инфинитезимальных характеристик $Q = \begin{bmatrix} -1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 & -1 \end{bmatrix}$.

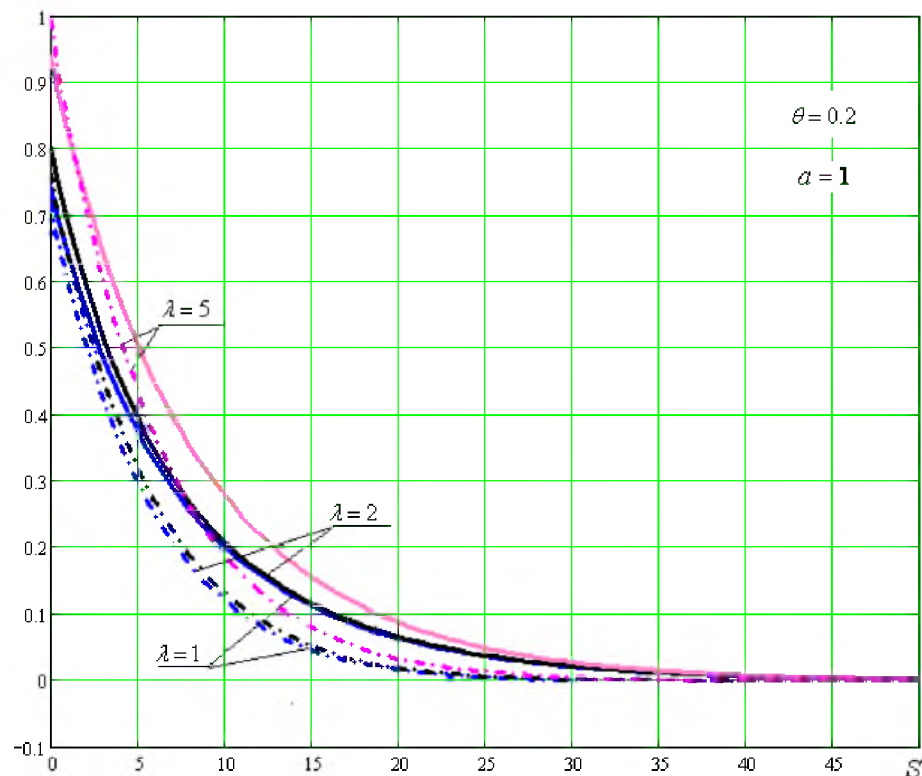


Рис. 1.4. – Зависимость вероятностей разорения и их оценок от начального капитала

Зависимость вероятностей разорения $P_i(S)$ (сплошные линии) и их оценок (штриховые линии), вычисленных по формулам (1.54), от капитала приведена на Рис. 1.4. Параметры $a=1, \theta=0.2$. Так как в данном случае получить точное решение уравнений (1.12) не удастся, то уравнения решались численно с помощью алгоритма, рассмотренного в гл. 4. Зависимость относительной погрешности аппроксимации δ_i от нагрузки страховой премии θ приведена в табл. 1.2

Табл. 1.2.

θ	δ_1	δ_2	δ_3
0.2	1.252	1.214	1.071
0.1	0.825	0.514	0.477
0.05	0.128	0.125	0.123
0.01	0.0029	0.0029	0.0027

1.5. Производящие функции условного времени до разорения

Рассмотренные выше вероятности разорения и выживания страховой компании являются исчерпывающими характеристиками её поведения на бесконечном временном интервале. Однако более общей характеристикой её деятельности является распределение условного времени до её разорения при условии, что разорение происходит [35]. Через распределение условного времени до разорения может быть выражена, в частности, вероятность её разорения как на бесконечном интервале, которая была определена выше, так и вероятность разорения на конечном временном интервале.

Для определения статистических характеристик условного времени до разорения применим, основываясь на [35], следующий подход.

Пусть $(\Omega, F, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ - вероятностное пространство, на котором определены траектории процесса $S(t)$ изменения капитала компании. Пусть в начальный момент времени капитал равен S и значение интенсивности $\lambda = \lambda_r$. Разобьём все возможные траектории процесса $S(t)$, выходящие из этой точки на два класса: $\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_r(S)\}$ - траектории приводящие к

разорению, и $\{S_\omega(t), \omega \in \overline{\Omega}_i(S)\}$ - траектории, приводящие к выживанию.

Пусть $t_i(S, \omega)$ - время до разорения на траектории, приводящей к разорению.

Обозначим

$$\Phi_i(S, u) = \int_{\Omega_i(S)} e^{-ut_i(S, \omega)} P(d\omega). \quad (1.62)$$

Так как вероятность разорения на бесконечном интервале при условии, что в начальный момент времени капитал равен S и интенсивность потока равна λ_i .

$$P_i(S) = \int_{\Omega_i(S)} P(d\omega), \quad (1.63)$$

то

$$\varphi_i(S, u) = \frac{\Phi_i(S, u)}{P_i(S)} \quad (1.64)$$

есть производящая функция моментов условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен S и интенсивность потока выплат равна λ_i . Функции $\Phi_i(S, u)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi_i(S, 0) = P_i(S), \lim_{S \rightarrow \infty} \Phi_i(S, u) = 0, \quad (1.65)$$

второе, из которых вытекает из того, что при $S \rightarrow \infty$ область интегрирования в (1.62) $\Omega_i(S) \rightarrow \emptyset$.

Если $F_i(t, S)$ - функция распределения условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен S и интенсивность потока страховых выплат равна λ_i , а $P_i(S, t)$ - вероятность разорения страховой компании за время t , то

$$P_i(S, t) = F_i(S, t) P_i(S), \quad (1.66)$$

так как для разорения за время, не превосходящее t , компания должна разориться и время до разорения должно быть не больше, чем t . Поэтому определение любой из вероятностей $P_i(S, t)$ или $F_i(S, t)$ определяет и вторую вероятность.

Для вывода уравнений, которым должны удовлетворять функции $\Phi_i(S, u)$ рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. За время Δt капитал компании изменится на величину ΔS и

$$t_i(S, \omega) = \Delta t + t_j(S + \Delta S, \omega), \quad (1.67)$$

где номер j соответствует значению интенсивности $\lambda(t)$ в момент времени $t + \Delta t$. Усредняя соотношение (1.65) будем иметь

$$\Phi_i(s, u) = e^{-u\Delta t} M_{\Delta S, j} \{ \Phi_j(S + \Delta S, u) \}. \quad (1.68)$$

Используя формулу полной вероятности, получим из (1.67)

$$\begin{aligned} \Phi_i(s, u) = & e^{-u\Delta t} [(1 - (\lambda_i - q_{ii})\Delta t)\Phi_i(s + C\Delta t, u) + \\ & + \lambda_i \Delta t \int_0^s \Phi_i(s + C\Delta t - x)\psi(x)dx + \lambda_i \Delta t \int_s^\infty \psi(x)dx + \\ & + \sum_{j \neq i} q_{ij} \Delta t \Phi_j(S + C\Delta t, u)] + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где учтено, что при $S < 0$ $t_j(S, \omega) = 0$. Считая функции $\Phi_j(s, u)$ дифференцируемыми и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial \Phi_i(s, u)}{\partial s} = & (\lambda_i + u)\Phi_i(s, u) - \sum_{j=1}^n q_{ij} \Phi_j(s, u) - \\ & - \lambda_i \int_0^s \Phi_i(s - x, u)\psi(x)dx - \lambda_i \int_s^\infty \psi(x)dx. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Получить точное решение системы уравнений системы (1.69) не удаётся. Поэтому рассмотрим опять асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (1.69) будем искать в виде:

$$\Phi_i(S, u) = A(u, \theta) f_i\left(\frac{\theta S}{1 + \theta}, \frac{u}{\theta^2}, \theta\right), \quad (1.70)$$

где $A(u, \theta)$ и $f_i(z, u, \theta)$ - некоторые пока не определённые функции. В силу произвольности функции $A(u, \theta)$ можно считать, что

$$\sum_{i=1}^n \pi_i f_i(0, u, \theta) = 1. \quad (1.71)$$

Так же будем считать, что функции $f_i(z, u, \theta)$ по крайней мере, трижды дифференцируемые по z и θ и равномерно непрерывны по u . Очевидно, что предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} A(\theta^2 u, \theta) \neq 0. \quad (1.72)$$

Подставляя (1.70) в уравнения (1.69) и сделав замены переменных

$\frac{\theta}{1+\theta} s = z, \frac{u}{\theta^2} = v$, получим уравнения относительно функций $f_i(z, v, \theta)$ при $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_0 a \theta \dot{f}_i(z, v, \theta) &= (\lambda_i + \theta^2 v) f_i(z, v, \theta) - \\ &- \sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(z, v, \theta) - \lambda_i \int_0^{\infty} f_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta} x, v, \theta\right) \psi(x) dx + R_i(z, \theta), \end{aligned} \quad (1.73)$$

где

$$R_i(z, \theta) = \lambda_i \int_{\frac{z(1+\theta)}{\theta}}^{\infty} \Phi_i\left(\frac{z(1+\theta)}{\theta} - x, \theta^2 v\right) \psi(x) dx - \frac{\lambda_1}{A(\theta^2 v, \theta)} \int_{\frac{z(1+\theta)}{\theta}}^{\infty} \psi(x) dx.$$

Аналогично анализу формулы (1.21) можно показать, что при сделанных предположениях $R_i(z, \theta) = o(\theta^2)$.

Теорема 1.3. При $\theta \ll 1$

$$f_i(z, u, \theta) = \exp\left\{-\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1 u}}{2A_1} u\right\} + O(\theta), \quad (1.74)$$

где постоянные A_1, A_2 определяются соотношениями (1.23) и (1.24) соответственно.

Доказательство. Обозначим

$$f_i(z, v) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f_i(z, v, \theta). \quad (1.75)$$

Переходя в (1.73) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(z, v) = 0. \quad (1.76)$$

Так как по условию $\text{Rang}[q_{ij}] = n-1$, то из сравнения систем уравнений (1.76) и (1.2) получаем, что

$$f_i(z, v) = f(z, v), \forall i, \quad (1.77)$$

где $f(z, v)$ - неизвестная пока функция.

Представим теперь функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде

$$f_i(z, v, \theta) = f(z, v) + B_i(z, v)\theta + o(\theta). \quad (1.78)$$

Подставляя разложения (1.78) в уравнение (1.73), раскладывая

$f\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ и $B_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами,

имеющими порядок θ , получим, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, что

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} B_j(z, v) = (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{f}(z, v). \quad (1.79)$$

Так как одновременно $\sum_{i=1}^n \pi_i q_{ij} = 0$ и $\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) = 0$, то система уравнений

(1.79) совместна и имеет ранг $(n-1)$, как и система уравнений (1.3).

Пусть матрица $\mathbf{R} = [R_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n-1}$ определяется соотношением (1.25).

Тогда решение системы (1.79) имеет вид:

$$B_i(z, v) = B_n(z, v) + \sum_{i=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \dot{f}(z, v). \quad (1.80)$$

Представим теперь функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде:

$$f_i(z, v, \theta) = f(z, v) + B_i(z, v)\theta + C_i(z, v)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (1.81)$$

Подставляя разложение (1.81) в уравнение (1.73), раскладывая

$f\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$, $B_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$, $C_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ в ряд Тейлора и

ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2 , получим, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ и учитывая (1.76) и (1.79)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n q_{ij} C_j(z, v) - (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{B}_i(z, v) + \lambda_i \frac{a_2}{2} \ddot{f}(z, v) + \\ + \lambda_i a \dot{f}(z, v) - v f(z, v) = 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Умножая соотношения (1.82) на π_i , суммируя и учитывая (1.3) будем иметь:

$$-\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{B}_i(z, v) + \lambda_0 \frac{a_2}{2} \ddot{f}(z, v) + \lambda_0 a \dot{f}(z, v) - v f(z, v) = 0. \quad (1.83)$$

Наконец, учитывая (1.80), из (1.83), получим

$$A_1 \ddot{f}(z, v) + A_2 \dot{f}(z, v) - v f(z, v) = 0, \quad (1.84)$$

где A_1 и A_2 определяются формулами (1.23) и (1.24). Откуда

$$f(z, v) = u_1(v) e^{\lambda_1(v)z} + u_2(v) e^{\lambda_2(v)z},$$

где

$$\chi_1(v) = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1v}}{2A_1}, \chi_2(v) = \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1v}}{2A_1} \quad (1.85)$$

– корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (1.84).

Так как $\frac{\Phi_i(s, u)}{P_i(s)}$ – производящая функция, то при $\operatorname{Re} u > 0$ $\left| \frac{\Phi_i(s, u)}{P_i(s)} \right| \leq 1$.

Следовательно, при $\operatorname{Re} v > 0$ и $z \rightarrow \infty$ $f(z, v) \rightarrow 0$. Поэтому $u_2(v) = 0$. Наконец, из условия (1.71) получаем, что $u_1(v) = 1$. Таким образом,

$$f(z, v) = e^{\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1v}}{2A_1} z}$$

и имеет место (1.74). Теорема доказана. •

Теорема 1.4. *Функции $B_i(z, v)$, входящие в разложения (1.78) функций $f_i(z, v, \theta)$ в ряд по степеням θ , имеют вид:*

$$B_n(z, v) = W_n(v) e^{\chi_1(v)z} + W(v) z e^{\chi_1(v)z}, \quad (1.86)$$

$$B_i(z, v) = W_i(v) e^{\chi_1(v)z} + W(v) z e^{\chi_1(v)z}, \quad (1.87)$$

где

$$W_n(v) = - \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \chi_1(v), \quad (1.88)$$

$$W_i(v) = - \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \chi_1(v) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \chi_1(v), \quad (1.89)$$

$$W(v) = \frac{A_3 \chi_1(v)^3 + A_4 \chi_1(v)^2 + (A_5 + vA_6) \chi_1(v)}{2A_1 \chi_1(v) + A_2}, \quad (1.90)$$

$$A_3 = a^3 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) \sum_{k=1}^{n-1} R_{jk} (\lambda_k - \lambda_0) - \frac{aa_2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j - \frac{aa_2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) + \frac{\lambda_0 a_3}{6}, \quad (1.91)$$

$$A_4 = \lambda_0 a_2 - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0), \quad (1.92)$$

$$A_5 = \lambda_0 a, \quad (1.93)$$

$$A_6 = a \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} + \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0). \quad (1.94)$$

Доказательство. Представим функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде:

$$f_i(z, v, \theta) = f(z, v) + B_i(z, v)\theta + C_i(z, v)\theta^2 + D_i(z, v)\theta^3 + o(\theta^3). \quad (1.95)$$

Подставляя разложения (1.95) в уравнения (1.69), раскладывая

$$f\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right), B_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right), C_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right), D_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$$

в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^3 , получим, учитывая (1.79) и (1.82) и переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n q_{ij} D_j(z, v) &= (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{C}_i(z, v) - \lambda_i \frac{a_2}{2} \ddot{B}_i(z, v) - \\ &- \lambda_i a \dot{B}_i(z, v) + v B_i(z, v) + \lambda_i a \dot{f}(z, v) + \lambda_i a_2 \ddot{f}(z, v) + \lambda_i \frac{a_3}{6} \ddot{\ddot{f}}(z, v). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Умножая уравнения (1.96) на π_i и суммируя уравнения, получим что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{C}_i(z, v) - \frac{a_2}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i \ddot{B}_i(z, v) - \\ - a \sum_{i=1}^n \pi_i \lambda_i \dot{B}_i(z, v) + v \sum_{i=1}^n \pi_i B_i(z, v) + \\ + \lambda_0 a \dot{f}(z, v) + \lambda_0 a_2 \ddot{f}(z, v) + \frac{\lambda_0 a_3}{6} \ddot{\ddot{f}}(z, v) = 0. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Так как

$$B_i(z, v) = B_n(z, v) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \dot{f}(z, v),$$

то

$$\sum_{i=1}^n \pi_i B_i(z, v) = B_n(z, v) + \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \dot{f}(z, v), \quad (1.98)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \lambda_i \dot{B}_i(z, v) = \lambda_0 \dot{B}_n(z, v) + \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \ddot{f}(z, v), \quad (1.99)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \lambda_i \ddot{B}_i(z, v) = \lambda_0 \ddot{B}_n(z, v) + \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0) a \ddot{\ddot{f}}(z, v). \quad (1.100)$$

Из уравнений (1.82)

$$\begin{aligned}
C_i(z, v) &= C_n(z, v) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0) a \dot{B}_j(z, v) - \\
&- \frac{aa_2}{2} \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j \ddot{f}(z, v) - a \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j \dot{f}(z, v) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}^1 v f(z, v).
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) a \dot{C}_i(z, v) &= a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0) \ddot{B}_j(z, v) - \\
- \frac{aa_2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j \ddot{f}(z, v) &- a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j \dot{f}(z, v) + \\
+ a \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} v f(z, v).
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\ddot{B}_j(z, v) = \ddot{B}_n(z, v) + \sum_{k=1}^{n-1} R_{jk}(\lambda_k - \lambda_0) \ddot{a} f(z, v),$$

получим

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) a \dot{C}_i(z, v) &= a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0) \ddot{B}_n(z, v) + \\
+ a^3 \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0) \sum_{k=1}^{n-1} R_{jk}(\lambda_k - \lambda_0) \ddot{f}(z, v) - \\
- \frac{aa_2}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j \ddot{f}(z, v) &- a^2 \sum_{k=1}^{k-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} \lambda_j \dot{f}(z, v) + \\
+ a \sum_{k=1}^{n-1} \pi_i(\lambda_i - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} v f(z, v).
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Подставляя соотношения (1.99), (1.100), (1.101) и (1.102) в соотношение (1.98), получим уравнение относительно функции $B_n(z)$

$$\begin{aligned}
A_1 \ddot{B}_n(z, v) + A_2 \dot{B}_n(z, v) - v B_n(z, v) &= \\
= A_3 \ddot{f}(z, v) + A_4 \dot{f}(z, v) + (A_5 + v A_6) f(z, v),
\end{aligned} \tag{1.103}$$

где A_1 и A_2 определяются соотношениями (1.23) и (1.24), A_3, A_4, A_5, A_6 соотношениями (1.91)-(1.94). Или

$$\begin{aligned}
A_1 \ddot{B}_n(z, v) + A_2 \dot{B}_n(z, v) - v B_n(z, v) &= \\
= \left[A_3 \chi_1(v)^3 + A_4 \chi_1(v)^2 + (A_5 + v A_6) \chi_1(v) \right] e^{\chi_1(v)z}.
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Так как $\chi_1(v)$ - корень характеристического уравнения дифференциального уравнения

$$A_1 x^2 + A_2 x - v = 0,$$

то общее решение уравнения (1.104) имеет вид:

$$B_n(z, v) = U_1(v)e^{\chi_1(v)z} + U_2(v)e^{\chi_2(v)z} + W(v)ze^{\chi_1(v)z}, \quad (1.105)$$

где $W(v)$ определяется формулой (1.90).

Из условия $|\Phi_i(s, u) / P_i(s)| \leq 1$ при $\text{Re}(u) > 0$ опять получим, что $U_2(v) = 0$.

Таким образом,

$$B_n(z, v) = W_n(v)e^{\chi_1(v)z} + W(z)ze^{\chi_1(v)z}$$

и

$$B_i(z, v) = W_n(v)e^{\chi_1(v)z} + W(z)ze^{\chi_1(v)z} + \sum_{j=1}^{k-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0) \alpha \chi_1(v) e^{\chi_1(v)z}.$$

Условие (1.71) должно выполняться для $\forall \theta$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n \pi_i B_i(0, v) = 0.$$

Откуда

$$W_n(v) + \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0) \alpha \chi_1(v) = 0$$

и имеет место (1.88), а затем (1.86) и (1.87). Теорема доказана. •

Таким образом, функции $\Phi_i(s, u)$ имеют вид:

$$\Phi_i(S, u) = A(u, \theta) e^{\chi_1 \left(\frac{u}{\theta^2} \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} S} + O(\theta), \quad (1.106)$$

или в более подробной записи:

$$\Phi_i(S, u) = A(u, \theta) \left[1 + W_i \left(\frac{u}{\theta^2} \right) \theta + W \left(\frac{u}{\theta^2} \right) \frac{\theta^2}{1+\theta} S \right] e^{\chi_1 \left(\frac{u}{\theta^2} \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} S} + o(\theta). \quad (1.107)$$

Для определения функции $A(u, \theta)$ учтем, что при выводе соотношений (1.106), (1.107) считалось, что в уравнениях (1.69) $S \neq 0$, что позволяло отбросить слагаемые $R_i(z, \theta)$. При $S = 0$ уравнения (1.69) принимают вид

$$C \frac{\partial \Phi_i(0, u)}{\partial s} = (\lambda_i + u) \Phi_i(0, u) - \sum_{j=1}^n q_{ij} \Phi_i(0, u) - \lambda_i. \quad (1.108)$$

Умножая уравнения системы (1.108) на π_i и складывая уравнения, будем иметь

$$C \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i(0, u)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i + u) \Phi_i(0, u) - \lambda_0. \quad (1.109)$$

Подставляя в (1.109) выражения (1.106), получим, что

$$A(u, \theta) = \lambda_0 \left[\lambda_0 + u - \lambda_0 a \theta \chi_1 \left(\frac{u}{\theta^2} \right) \right]^{-1} \quad (1.110)$$

и, таким образом,

$$\Phi_i(S, u) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + u - \lambda_0 a \theta \chi_1 \left(\frac{u}{\theta^2} \right)} \left[1 + W_i \left(\frac{u}{\theta^2} \right) \theta + W \left(\frac{u}{\theta^2} \right) \frac{\theta^2}{1 + \theta} S \right] e^{\chi_1 \left(\frac{u}{\theta^2} \right) \frac{\theta}{1 + \theta} S} + \alpha(\theta). \quad (1.111)$$

Из соотношений (1.111) и (1.63) получаем теперь выражения для вероятностей разорения на бесконечном интервале

$$P_i(S) = \left[1 + \frac{aA_2}{A_1} \theta \right]^{-1} \left(1 + W_i(0) \theta + W(0) \frac{\theta^2}{1 + \theta} S \right) e^{\frac{A_2 \theta}{(1 + \theta) A_1} S} + \alpha(\theta) \quad (1.112)$$

или с точностью $O(\theta)$

$$P_i(S) = \left[1 + \frac{aA_2}{A_1} \theta \right]^{-1} e^{\frac{A_2 \theta}{(1 + \theta) A_1} S} + O(\theta). \quad (1.113)$$

При $n=1$ соотношение (1.113) даёт

$$P(S) = \left(1 + \frac{2a^2}{a_2} \theta \right)^{-1} e^{\frac{2a\theta}{(1 + \theta)a_2} S} + O(\theta), \quad (1.114)$$

а из (1.112) получаем, что

$$P(S) = \left(1 + \frac{2a^2}{a_2} \theta \right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{4a_3 a^2}{3a_2^3} - \frac{2a}{a_2} \right) \frac{\theta^2}{1 + \theta} S \right) e^{\frac{2a\theta}{(1 + \theta)a_2} S} + \alpha(\theta). \quad (1.115)$$

При использовании оценок $P_i(S)$ (1.112) вне зависимости от оценок для

$\Phi_i(S, u)$ естественно входящую в (1.112) константу $\left[1 + \frac{aA_2}{A_1} \theta \right]^{-1}$ заменить на

константу $[1+\theta]^{-1}$, вытекающую из полученного ранее условия (1.16). Тогда оценка (1.114) принимает вид

$$P(S) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{2a\theta}{(1+\theta)a_2} S} + o(\theta), \quad (1.116)$$

и переходит, таким образом, в оценку Реньи (Renyi) [[95]], а оценка (1.115) принимает вид:

$$P(S) = \frac{1}{1+\theta} \left(1 + \left(\frac{4a_3 a^2}{3a_2^3} - \frac{2a}{a_2} \right) \frac{\theta^2}{1+\theta} S \right) e^{-\frac{2a\theta}{(1+\theta)a_2} S} \quad (1.117)$$

1.6. Численные примеры – 2

Пример 1. Пусть $n=1$ и $\psi(s) = \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{s}{a}\right\}$ - показательное распределение. Так как при этом $a_2 = 2a^2, a_3 = 6a^3$, то выражения (1.116) и (1.117) принимают вид

$$P(S) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta S}{(1+\theta)a}}.$$

Таким образом, в этом случае построенная аппроксимация приводит к истинной вероятности разорения. [35,106]

Пример 2. Пусть $n=1$. Страховые выплаты постоянны и имеют значение равное a , т.е. $\psi(x) = \delta(x-a)$. Вероятность разорения задаётся формулой (1.57). Зависимость вероятности разорения и ее аппроксимаций, построенных по формулам (1.115) и (1.40), от капитала при $\theta = 0.1, 0.2, 0.5$ и $a=1$ приведены на рисунке 1.5. Аппроксимация (1.115) естественно проигрывает (1.40) при малых значениях S , но делается лучше при увеличении капитала S .

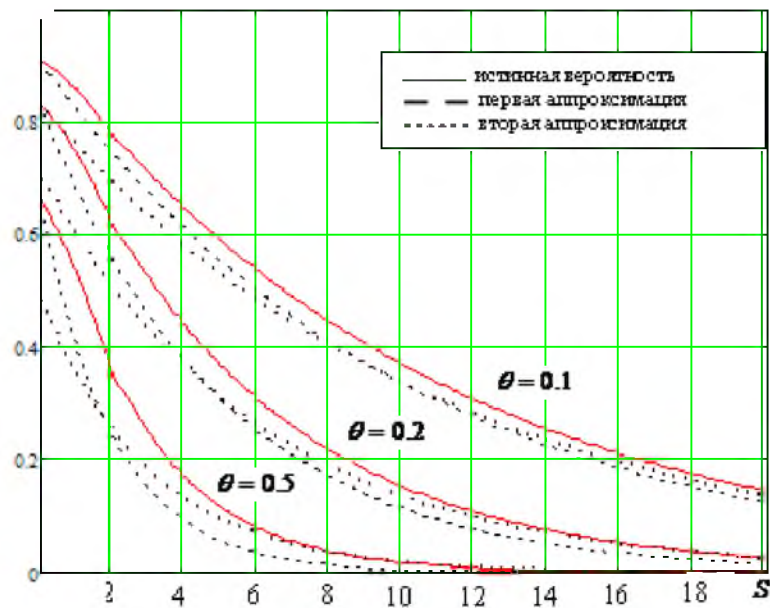


Рис. 1.5. – Аппроксимации вероятностей разорения, при $\theta = 0.1, 0.2, 0.5$

Пример 3. Пусть $n=2$. Страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение, то есть $\psi(s) = \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{s}{a}\right\}$. В этом случае соотношения,

определяющее вероятности разорения $P_1(s)$ и $P_2(s)$, получены в [35]. На рисунках 1.6-1.7 приведены зависимости вероятностей разорения и их оценок, построенных по формулам (1.111) и (1.112), при $\theta=0.1$ и $\theta=0.3$. Параметры: $a=1, \lambda_1=10, \lambda_2=2$, финальные вероятности $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$.

Зависимость погрешности аппроксимации δ_i от нагрузки страховой премии θ приведена в табл. 1.3. Как видно из таблицы, при $\theta \rightarrow 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю.

Табл. 1.3.

θ	δ_1	δ_2
0.5	0.327	2.152
0.3	0.154	0.169
0.1	0.034	0.037
0.05	0.016	0.017
0.01	0.003	0.003

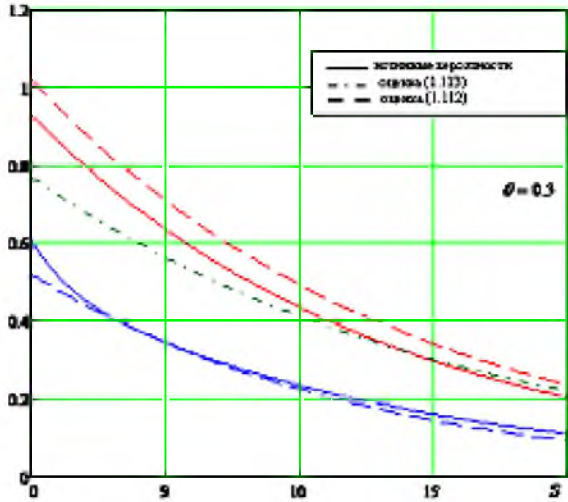


Рис. 1.6. – Зависимость

вероятностей разорения и их оценок от
капитала при $\theta = 0.3$

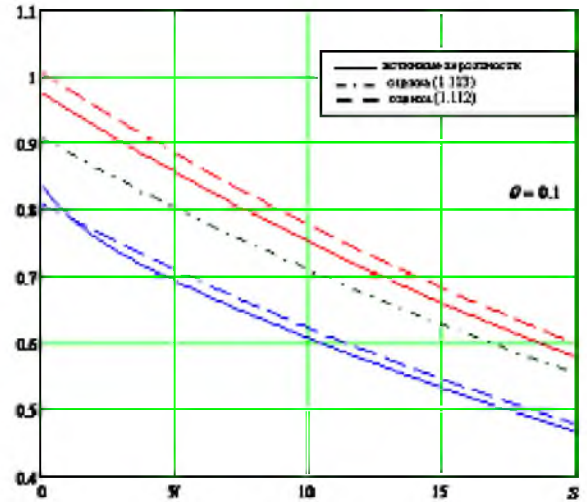


Рис.1.7. – Зависимость

вероятностей разорения и их оценок
от капитала при $\theta = 0.1$

1.7. Моменты условного времени до разорения

Моменты условного времени до разорения определяются соотношениями

$$t_i^k(s) = \frac{(-1)^k}{P_i(s)} \left. \frac{\partial^k \Phi_i(s, u)}{\partial u^k} \right|_{u=0}. \quad (1.118)$$

Вычисляя производную, получим, что при $\theta \ll 1$ среднее значение условного времени до разорения

$$t_i^1(S) = \frac{1}{\theta A_2 \left(1 + \theta \frac{aA_2}{A_1}\right)} \left(\frac{S}{1 + \theta} + \frac{\lambda_0 a + \theta A_2}{\lambda_0 \left(1 + \frac{aA_2}{A_1}\right)} \right) e^{X_1(0) \frac{\theta S}{1 + \theta}} + O(\theta).$$

Так как

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta t_i^1(S) = \frac{S + a}{A_2},$$

то при $\theta \ll 1$

$$t_i^1(s) = \frac{s+a}{\lambda_0 a \theta} + O(1), \quad (1.119)$$

Аналогично можно показать, что при $\theta \ll 1$ второй момент условного времени

$$t_i^2(s) = \frac{s^2}{\theta^2(1+\theta)^2 A_2^2} + \frac{2A_1 s}{\theta^3(1+\theta) A_2^3} + \frac{2S(\lambda_0 a + \theta A_2)}{\theta^2(1+\theta) A_2^2 \lambda_0 \left(1 + \theta a \frac{A_2}{A_1}\right)} +$$

$$+ \frac{2(\lambda_0 a + \theta A_2)^2}{\theta^2 A_2^2 \lambda_0^2 \left(1 + \theta a \frac{A_2}{A_1}\right)^2} + \frac{2\lambda_0 a A_1}{\theta^3 A_2^3 \lambda_0 \left(1 + \theta a \frac{A_2}{A_1}\right)} + O(\theta).$$

Поэтому дисперсия условного времени

$$D_i(s) = \frac{2A_1(s+a)}{A_2^3 \theta^3} + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right). \quad (1.120)$$

Пример 1. Зависимости среднего условного времени до разорения $t^1(s)$ от начального капитала для экспоненциального распределения выплат при $n=1$, вычисленные по формуле (1.118) (штриховые линии) и полученные путем имитационного моделирования (сплошные линии), приведены на рис. 1.8. Параметры: $a=5, \lambda=5$. Объем выборки при моделировании $N=100\,000$.

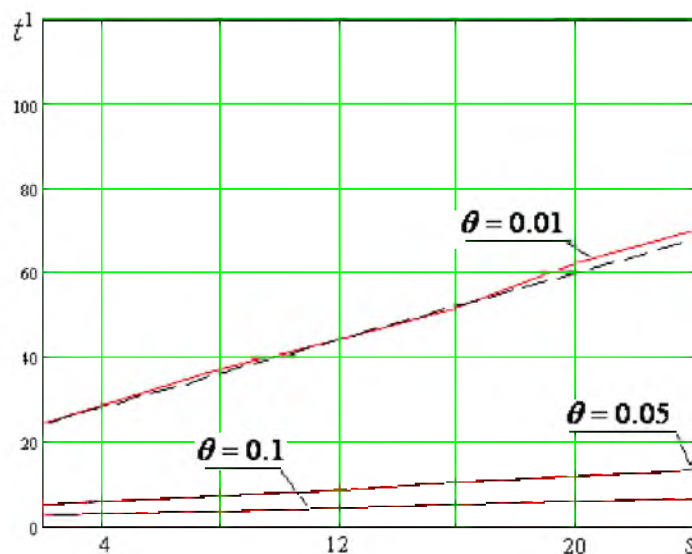


Рис. 1.8. – Зависимость среднего условного времени до разорения от начального капитала для экспоненциального распределения выплат

Пример 2. Зависимости среднего условного времени до разорения $t^1(s)$ от начального капитала для гамма-распределения выплат

$$\psi(s) = \frac{4s}{a^2} e^{-\frac{2s}{a}}$$

при $n=1$, вычисленные по формуле (1.118) (штриховые линии) и полученные путем имитационного моделирования (сплошные линии), приведены на рис. 1.9. Параметры: $a=5, \lambda=5$. Объем выборки при моделировании $N=100\,000$.

Соответствующие вероятности разорения $P(s)$, вычисленные по формулам (1.115) (штриховые линии) и полученные путем имитационного моделирования (сплошные линии), приведены на рис. 1.10. Отклонение значений, даваемых расчетными формулами (1.115), от результатов имитационного моделирования при малых значениях θ определяется, по-видимому, конечностью реализаций, используемых при моделировании. На некоторых реализациях разорение просто не успевает наступить.

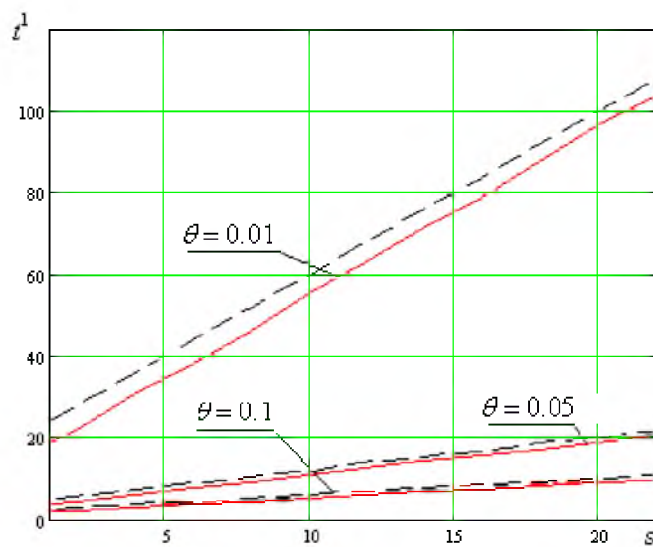


Рис. 1.9. – Зависимость среднего условного времени до разорения от начального капитала для гамма-распределения выплат

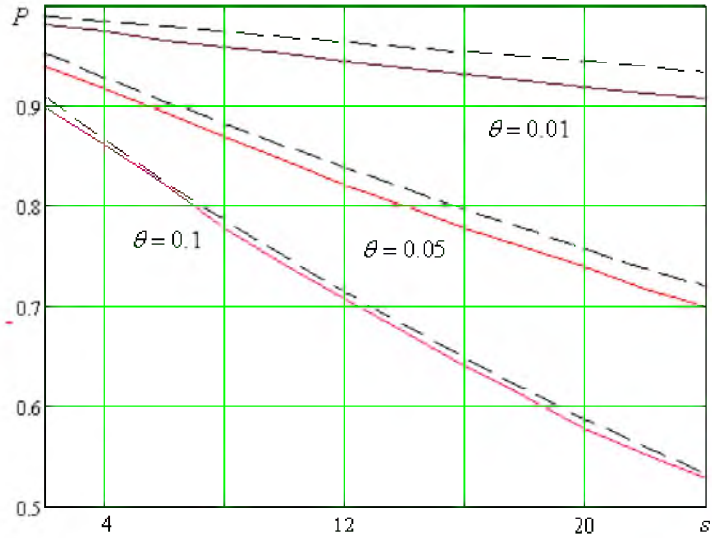


Рис. 1.10. – Зависимость вероятности разорения от начального капитала для гама-распределения выплат

1.8. Плотность распределения условного времени до разорения при нулевом начальном капитале

Из соотношений (1.64), (1.111), (1.112) вытекает, что производящая функция условного времени до разорения при нулевом начальном капитале

$$\varphi_i(0, u) = \frac{1+2\alpha}{\lambda_0\beta} \frac{1}{\chi + p + \sqrt{p}} + O(\theta), \quad (1.121)$$

где

$$p = \frac{u}{\lambda_0^2\beta} + \frac{\alpha^2}{\lambda_0^2\beta^2}, \quad (1.122)$$

$$\alpha = \frac{aA_2\theta}{2A_1}, \quad \beta = \frac{a^2}{A_1}, \quad \chi = \frac{\lambda_0(1+\alpha)\beta - \alpha^2}{\lambda_0^2\beta^2}. \quad (1.123)$$

Плотность распределения условного времени до разорения при нулевом начальном капитале $g_i(t, 0)$ определяется как обратное преобразование Лапласа от $\varphi_i(0, u)$

$$g_i(t, 0) = \lambda_0(1+2\alpha) e^{-\frac{\alpha^2 t}{\beta}} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{\lambda_0^2\beta tp}}{\chi + p + \sqrt{p}} dp + O(\theta).$$

Известно [67], что если отображению $F(p)$ соответствует прообраз $f(t)$, то отображению

$$F(p + \sqrt{p}) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u}{(t-u)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{u^2}{4(t-u)}} f(u) du.$$

В нашем случае $F(p) = \frac{1}{\chi + p}$ и $f(t) = e^{-\chi t}$. Поэтому

$$g_i(t, 0) = \frac{\lambda_0^2(1+2\alpha)\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 t}{\beta}} \int_0^{\lambda_0^2 \beta t} \frac{u}{(\lambda_0^2 \beta t - u)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{u^2}{4(\lambda_0^2 \beta t - u)}} e^{-\chi u} du + O(\theta).$$

Сделав замену переменной $u = \lambda_0^2 \beta x$, получим

$$g_i(t, 0) = \frac{\lambda_0^2(1+2\alpha)\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\lambda_0 \beta x + 2\alpha(t-x))^2}{4\beta(t-x)}} e^{-\lambda_0 \chi x} dx + O(\theta). \quad (1.124)$$

Пример 1. При $n=1$ и экспоненциальном распределении страховых выплат выражение (1.124) принимает вид:

$$g(t, 0) = \frac{\lambda\sqrt{\lambda}(1+\theta)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\lambda x - \frac{\lambda(x+\theta(t-x))^2}{4(t-x)}} dx + O(\theta). \quad (1.125)$$

Истинная плотность распределения $p(t, 0)$ в случае экспоненциального распределения страховых выплат имеет вид [35]

$$p(t, 0) = \frac{\sqrt{1+\theta}}{2t} e^{-\lambda(2+\theta)t} I_1(2\lambda\sqrt{1+\theta}t), \quad (1.126)$$

где $I_1(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого порядка [74]. Зависимость плотностей распределения $g(t, 0)$ и $p(t, 0)$ от времени t приведена на рисунке 1.11, параметр $\theta = 0.5$.

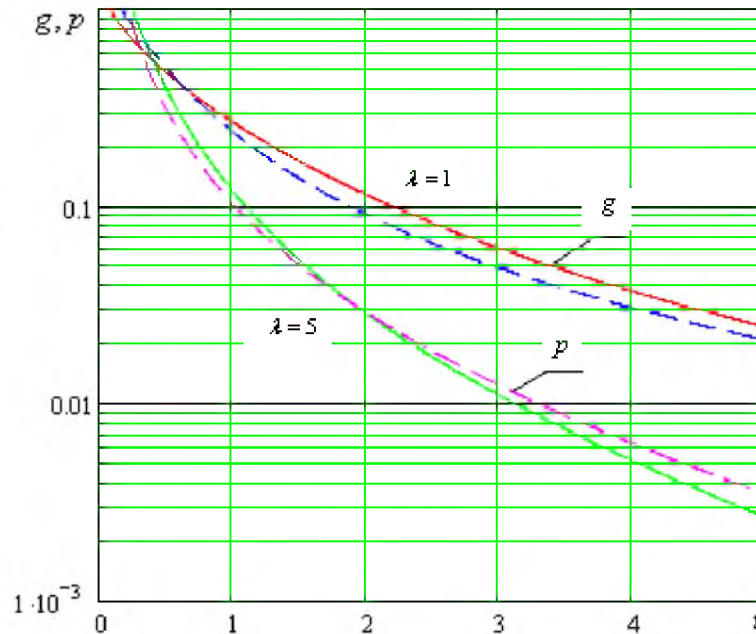


Рис. 1.11. Зависимость плотностей распределения $g(t,0)$ и $p(t,0)$ от времени при $\theta = 0.05$

1.9. Плотность распределения условного времени при неограниченно возрастающем начальном капитале

Будем теперь считать, что при $\theta \rightarrow 0$ начальный капитал компании $S \rightarrow \infty$ согласованно с θ , то есть $S = S(\theta)$. Пусть t – время до разорения.

Обозначим

$$m = \frac{1}{\theta A_2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2A_1}{A_2}},$$

введем величину

$$z = \frac{t - mS}{\sigma\sqrt{S}},$$

и обозначим через $\varphi_{i,z}(u, S)$ ее производящую функцию при заданном начальном капитале S .

Теорема 1.5. Если при $\theta \rightarrow 0$ $\theta s(\theta) \rightarrow \infty$, но $\theta^{\frac{3}{2}} s(\theta) \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \varphi_{i,z}(j\omega, S) = e^{\frac{-\omega^2}{2}}. \quad (1.127)$$

Доказательство. Производящая функция величины z

$$\varphi_{i,z}(u, S) = e^{\frac{u}{\sigma\sqrt{S}}} \varphi_i\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{S}}, S\right)$$

или

$$\varphi_{i,z}(u, z) = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{aA_2}{A_1} \theta\right) \exp\left\{\gamma u \sqrt{\theta S} + \frac{2\gamma^2 \theta S}{1+\theta} + X_1\left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}}\right) \frac{\theta S}{1+\theta}\right\}}{\lambda_0 + \frac{u}{\sigma \sqrt{S}} - \lambda_0 a \theta X_1\left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}}\right)} + O(\theta).$$

Далее,

$$X_1\left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}}\right) = -\gamma^2 - \gamma^2 \sqrt{1 + 2 \frac{u}{\gamma \sqrt{\theta S}}} =$$

$$-\gamma^2 \left[2 + \frac{u}{\gamma \sqrt{\theta S}} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{\gamma^2 \theta S} + \frac{1}{2} \frac{u^3}{\gamma^3 \theta S \sqrt{\theta S}} + o\left(\frac{1}{\theta S \sqrt{\theta S}}\right)\right].$$

Поэтому

$$\exp\left\{\gamma u \sqrt{\theta S} + \frac{2\gamma^2 \theta S}{1+\theta} + X_1\left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}}\right) \frac{\theta S}{1+\theta}\right\} = \exp\left\{\gamma u \sqrt{\theta S} \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{u^2}{2(1+\theta)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\theta S}}\right)\right\}$$

и

$$\varphi_{i,z}(u, S) = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{aA_2}{A_1} \theta\right) \exp\left\{\gamma u \sqrt{\theta S} \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{u^2}{2(1+\theta)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\theta S}}\right)\right\}}{\lambda_0 + \frac{u}{\sigma \sqrt{S}} - \lambda_0 a \theta X_1\left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}}\right)} + O(\theta).$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta S \rightarrow \infty$, получим (1.127). •

Таким образом, при $\theta \ll 1$ и $\theta S \gg 1$ случайная величина z имеет асимптотически нормальное распределение.

Резюме к главе 1

В настоящей главе была исследована математическая модель страховой компании в случае, когда поступление страховых премий в компанию детерминировано, а страховые выплаты образуют дважды стохастический

пуассоновский поток, при дополнительном предположении о том, что нагрузка страховой премии мала. В частности:

1. Получены выражения, определяющие вероятность разорения страховой компании на бесконечном временном интервале для данной математической модели в зависимости от начального капитала и начального значения интенсивности потока страховых выплат.

2. Получены выражения, определяющие производящие функции времени до разорения страховой компании, при условии, что разорение происходит. Это позволяет определить такие характеристики, как среднее и дисперсию условного времени до разорения, найти плотность распределения условного времени до разорения.

3. Показано, что при уменьшении нагрузки страховой премии и одновременном возрастании начального капитала условное время до разорения распределено асимптотически нормально.

Результаты данной главы опубликованы в работах [23,12,14]

Глава 2. Математическая модель страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и выплат

В главе 1 было рассмотрено обобщение классической модели страховой компании на случай, когда интенсивность потока страховых выплат представляет собой дискретный марковский процесс с непрерывным временем. При этом скорость поступления страховых премий считалась детерминированной и неизменной во времени. Более естественно считать, особенно, если рассматривать не общий портфель страховых рисков, а каждый отдельный вид страхования, что страховые премии, как и страховые выплаты, поступают в случайные моменты времени, а интенсивности потоков страховых выплат и страховых премий образуют независимые друг от друга дискретные марковские процессы. Получающаяся при этом математическая модель исследуется в данной главе.

2.1 Математическая модель страховой компании

Итак, будем считать, что интенсивность потока страховых премий $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и m состояниями $\lambda(t) = \lambda_j$. Переход из состояния i в состояние j задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{A} = [\alpha_{ij}]$ ранга $m-1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность

$$\begin{aligned} P_{ij}(\Delta t) &= \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j; \\ P_{ii}(\Delta t) &= 1 + \alpha_{ii}\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} = 0. \quad (2.1)$$

Обозначим $P_i(t) = \Pr\{\lambda(t) = \lambda_i\}$, $i = \overline{1, m}$. Если управляющая цепь является неразложимой, то существуют финальные вероятности [79] $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$, которые являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_{ji} = 0, \quad (2.2)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = 1. \quad (2.3)$$

Обозначим, далее, через λ_0 среднюю интенсивность потока страховых премий в стационарном режиме

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^m \pi_i \lambda_i. \quad (2.4)$$

Будем считать, что страховые премии являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и моментами $M\{x^k\} = a_k$, $k = 2, 3$.

Будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\mu(t)$ также является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями интенсивности $\mu(t) = \mu_j$. Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{B} = [\beta_{ij}]$ ранга $n-1$, где $\beta_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} = 0. \quad (2.5)$$

Обозначим через ρ_j – финальные вероятности состояний μ_j . Величины ρ_j являются решениями системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n \rho_j \beta_{ji} = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n = 1. \quad (2.7)$$

Обозначим через μ_0 среднюю интенсивность потока страховых выплат:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \mu_i. \quad (2.8)$$

Будем считать, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = b$ и моментами $M\{x^k\} = b_k, k = 2, 3$.

Наконец, будем считать, что с начала функционирования страховой компании прошло какое-то время, имеются застрахованные риски, потоки страховых премий и страховых выплат не зависят друг от друга.

Пусть $S(t)$ – капитал компании в момент времени t . Если интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат в момент времени t равны $\lambda(t) = \lambda_i$ и $\mu(t) = \mu_j$ соответственно, то изменение капитала компании за время Δt определится соотношением

$$\begin{aligned} \Delta S(t) &= S(t + \Delta t) - S(t) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } (1 - \lambda_i \Delta t)(1 - \mu_j \Delta t) + o(\Delta t), \\ x, & \text{с вероятностью } \lambda_i \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t), \\ -y, & \text{с вероятностью } \mu_j \Delta t \psi(y) dy + o(\Delta t), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где x – случайная страховая премия, а y – случайная страховая выплата за время Δt . Переходя в (2.9) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и усредняя, получим, что изменение среднего капитала компании $\bar{S}(t)$ определится уравнением

$$\dot{\bar{S}}(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \Pr\{\lambda(t) = \lambda_i\} a - \sum_{i=1}^n \mu_i \Pr\{\mu(t) = \mu_i\} b.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \bar{S}(t) &= S(0) + (\lambda_0 a - \mu_0 b)t + \\ &+ \sum_{i=1}^m \lambda_i a \int_0^t (\Pr\{\lambda(t) = \lambda_i\} - \pi_i) dt - \sum_{i=1}^n \mu_i b \int_0^t (\Pr\{\mu(t) = \mu_i\} - \rho_i) dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из выражения (2.10) следует, что при $t \gg 1$ капитал компании в среднем монотонно возрастает, если

$$\lambda_0 a = (1 + \theta) \mu_0 b, \quad (2.11)$$

где $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разоряется. Параметр θ , как и в классической модели, – нагрузка страховой премии.

2.2. Уравнения для вероятностей разорения и выживания

Пусть $T = \inf \{t: S(t) < 0\}$ и $T = \infty$, если $S(t) > 0 \forall t$. Случайная величина T – момент разорения [106]. Обозначим

$$P_{ij}(S) = \Pr \{T = \infty | S(0) = S, \lambda(0) = \lambda_i, \mu(0) = \mu_j\}$$

и

$$G_{ij}(S) = \Pr \{T < \infty | S(0) = S, \lambda(0) = \lambda_i, \mu(0) = \mu_j\}$$

– вероятности выживания и разорения страховой компании соответственно при условии, что в начальный момент времени ее капитал равен S и значения интенсивностей потоков страховых премий и выплат равны $\lambda = \lambda_i$ и $\mu = \mu_j$. Учитывая, что начальный капитал и начальные значения интенсивностей не зависят друг от друга, вероятности выживания и разорения страховой компании будут равны соответственно:

$$P(S) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \pi_i \rho_j P_{ij}(S), \quad G(S) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \pi_i \rho_j G_{ij}(S). \quad (2.12)$$

Для вывода уравнений, определяющих $P_{ij}(S)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени t капитал компании равен S , интенсивность $\lambda = \lambda_j$, интенсивность $\mu = \mu_j$. За время Δt могут произойти следующие события:

1. С вероятностью $(1 - \lambda_i \Delta t)(1 - \mu_j \Delta t)(1 + \alpha_{ii} \Delta t)(1 + \beta_{jj} \Delta t) + o(\Delta t)$ страховые премии не поступают, страховые выплаты не производятся, интенсивности потоков не меняются.

2. С вероятностью $\lambda_i \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$ поступает страховая премия размера x , выплаты не производятся, интенсивности потоков не меняются.

3. С вероятностью $\mu_j \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t)$ производится страховая выплата размера x , страховые премии не поступают, интенсивности потоков не меняются.

4. С вероятностью $\alpha_{jk} \Delta t + o(\Delta t)$ интенсивность потока страховых премий изменяется с λ_j на λ_k , страховые выплаты не производятся, страховые премии не поступают.

5. С вероятностью $\beta_{jk} \Delta t + o(\Delta t)$ интенсивность потока страховых выплат изменяется с μ_j на μ_k , страховые выплаты не производятся, страховые премии не поступают.

Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P_{ij}(S) = \left(1 - (\lambda_i + \mu_j) \Delta t + (\alpha_{ii} + \beta_{jj}) \Delta t\right) P_{ij}(S) + \lambda_i \Delta t \int_0^{\infty} P_{ij}(S+x) \varphi(S+x) dx + \\ + \mu_j \Delta t \int_0^S P_{ij}(S-x) \psi(x) dx + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} P_{kj}(S) \Delta t + \sum_{k \neq j} \beta_{jk} P_{ik}(S) \Delta t + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему уравнений для вероятностей выживания

$$(\lambda_i + \mu_j) P_{ij}(S) = \lambda_i \int_0^{\infty} P_{ij}(S+x) \varphi(x) dx + \mu_j \int_0^S P_{ij}(S-x) \psi(x) dx + \\ + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} P_{kj}(S) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} P_{ik}(S), \quad (2.13)$$

с граничными условиями

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P_{ij}(S) = 1. \quad (2.14)$$

Соответствующие (2.13) уравнения для вероятностей разорения имеют вид

$$(\lambda_i + \mu_j) G_{ij}(S) = \lambda_i \int_0^{\infty} G_{ij}(S+x) \varphi(x) dx + \mu_j \int_0^S G_{ij}(S-x) \psi(x) dx + \\ + \mu_j \int_S^{\infty} \psi(x) dx + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} G_{kj}(S) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} G_{ik}(S), \quad (2.15)$$

с граничными условиями

$$\lim_{S \rightarrow \infty} G_{ij}(S) = 0. \quad (2.16)$$

Граничные условия (2.16) следуют из того, что при неограниченном росте начального капитала компания выживает с вероятностью единица при любом начальном значении интенсивностей потоков премий и выплат.

2.3. Вероятности разорения при малой нагрузке страховой премии

Получить точное решение систем уравнений (2.13) или (2.15) в общем случае не удастся. При $m=n=1$ точное решение известно лишь при экспоненциальных распределениях премий и выплат [35]. Поэтому рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (2.15) будем искать в виде

$$G_{ij}(S) = C(\theta) f_{ij}(\theta S, \theta). \quad (2.17)$$

Относительно функций $f_{ij}(z, \theta)$ будем предполагать, что они являются дважды дифференцируемыми по своим аргументам. Для этого функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определяющие ядра уравнений (2.15), должны быть «достаточно гладкими». Очевидно также, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C(\theta) \neq 0.$$

Так как функция $C(\theta)$ произвольна, то на функции $f_{ij}(z, \theta)$ можно наложить дополнительное условие

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \pi_i \rho_j f_{ij}(0, \theta) = 1. \quad (2.18)$$

Подставляя выражения (2.17) в уравнения (2.15) и сделав замену переменной $\theta S = z$, получим уравнения относительно функций $f_{ij}(z, \theta)$

$$\begin{aligned}
(\lambda_i + \mu_j)C(\theta) f_{ij}(z, \theta) &= \lambda_i C(\theta) \int_0^{\infty} f_{ij}(z + \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \\
&+ \mu_j C(\theta) \int_0^{\infty} f_{ij}(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx + C(\theta) \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} f_{kj}(z, \theta) + \\
&+ \mu_j C(\theta) \int_0^{\infty} f_{ij}(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx + R_{ij}(\theta, z),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$R_{ij}(\theta, z) = \mu_j \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(x) dx - \mu_j C(\theta) \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_{ij}(z - \theta x) \psi(x) dx.$$

Теорема 2.1. При $\theta \ll 1$

$$f_{ij}(S, \theta) = \exp\left\{-\frac{A_2}{A_1} S\right\} + O(\theta), \tag{2.20}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} - \\
&- a^2 \sum_{k=1}^{m-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) - b^2 \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k (\mu_k - \mu_0) \sum_{j=1}^{n-1} Q_{kj} (\mu_j - \mu_0),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$A_2 = \mu_0 b, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1,1} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{R} = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m-1,1} & \cdots & \alpha_{m-1,m-1} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Оценим поведение $R_{ij}(\theta, z)$ при $\theta \ll 1$ и $z \neq 0$. Имеем,

$$\frac{1}{\theta^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(x) dx = \frac{1}{z^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \frac{z^3}{\theta^3} \psi(x) dx \leq \frac{1}{z^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} x^3 \psi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,$$

так как по условию $M\{x^3\} = b_3$ существует. Так как $f_{ij}(z, \theta)$ считается дифференцируемой и, следовательно, ограниченной, то аналогично ведет себя и второе слагаемое. Поэтому $R_{ij}(\theta, z) = o(\theta^3)$ и в дальнейшем это слагаемое учитываться не будет.

Обозначим

$$f_{ij}(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_{ij}(z, \theta). \quad (2.25)$$

Переходя в (2.19) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что функции $f_{ij}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} f_{kj}(z) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f_{ik}(z) = 0. \quad (2.26)$$

Введем вектор-строки

$$f_i(z) = [f_{i1}(z) \quad f_{i2}(z) \quad \dots \quad f_{in}(z)], \quad i = \overline{1, m}$$

и обозначим

$$X = \begin{bmatrix} f_1(z)^T \\ f_2(z)^T \\ \dots \\ f_m(z)^T \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (2.26) может быть переписана в виде

$$GX = 0, \quad (2.27)$$

где

$$G = A \otimes I_n + I_m \otimes B$$

– матрица размера $mn \times mn$ и знак \otimes означает прямое произведение матриц [4].

Пусть α_i – собственные значения матрицы A и β_j – собственные значения матрицы B . Тогда собственные значения матрицы G равны $\alpha_i + \beta_j$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). [68] Из соотношений (2.1) и (2.5) вытекает, что

матрицы A и B , учитывая ранги матриц, имеют собственные значения $\alpha_m = 0$ и $\beta_n = 0$ кратности 1. Далее, так как

$$\alpha_{ii} = -\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} < 0; \alpha_{ij} \geq 0, i \neq j,$$

то матрица A – полуустойчива [74], то есть действительные части всех ее собственных значений неположительны [74]. Учитывая, что $RangA = m-1$, получаем, что $m-1$ собственное значение матрицы A имеет отрицательные действительные части. Аналогично, $n-1$ собственное значение матрицы B имеет отрицательные действительные части. Таким образом, собственные значения $\alpha_i + \beta_j$ матрицы G отличны от нуля при $i \neq m, j \neq n$ и $\alpha_m + \beta_n = 0$. Отсюда вытекает, что $RangG = mn-1$ и, следовательно, решение системы уравнений (2.26) имеет вид

$$f_{ij}(z) = f(z), \quad (2.28)$$

где $f(z)$ – неопределенная пока функция.

Представим теперь функции $f_{ij}(z, \theta)$ в виде

$$f_{ij}(z, \theta) = f(z) + A_{ij}(z)\theta + o(\theta). \quad (2.29)$$

Подставляя разложения (2.29) в уравнения (2.19), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами разложения, имеющими порядок θ , получим, что

$$\left[\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} A_{kj}(z) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} A_{ik}(z) \right] C(\theta)\theta + (\lambda_i a - \mu_j b) f'(z) C(\theta)\theta + o(\theta) = 0. \quad (2.30)$$

Наконец, с учетом (2.11)

$$\lambda_i a - \mu_j b = (\lambda_i - \lambda_0) a - (\mu_j - \mu_0) b + \mu_0 b \theta.$$

Переходя в (2.30) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} A_{kj}(z) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} A_{ik}(z) = -[(\lambda_i - \lambda_0) a - (\mu_j - \mu_0) b] f'(z). \quad (2.31)$$

Представим теперь функции $f_{ij}(z, \theta)$ в виде

$$f_{ij}(z, \theta) = f(z) + A_{ij}(z)\theta + B_{ij}(z)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (2.32)$$

Подставляя разложения (2.32) в уравнения (2.19), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$, $B_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2 , получим, учитывая (2.27), что при $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} B_{kj}(z) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} B_{ik}(z) + [(\lambda_i - \lambda_0)a - (\mu_j - \mu_0)b] A'_{ij}(z) + \\ + \mu_0 b f'(z) + \frac{\lambda_i a_2 + \mu_j b_2}{2} f''(z) = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Умножая уравнения (2.33) на π_i и ρ_j и просуммировав уравнения, получим с учетом (2.2) и (2.6), что

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} f''(z) + \mu_0 b f'(z) + \sum_{i=1}^m \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a V'_i(z) - \\ - \sum_{j=1}^n \rho_j (\mu_j - \mu_0) b U'_j(z) = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$U_j(z) = \sum_{i=1}^m \pi_i A_{ij}(z), \quad j = \overline{1, n} \quad (2.35)$$

и

$$V_i(z) = \sum_{j=1}^n \rho_j A_{ij}(z), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.36)$$

Из соотношений (2.31) с учетом (2.2), (2.4) и (2.6), (2.8) умножая уравнения системы на π_i и ρ_j соответственно и суммируя, получим, что функции $U_j(z)$ и $V_i(z)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\sum_{k=1}^n \beta_{jk} U_k(z) = (\mu_j - \mu_0) b f'(z) \quad (2.37)$$

и

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} V_k(z) = -(\lambda_i - \lambda_0) a f'(z). \quad (2.38)$$

Рассмотрим систему уравнений (2.37). Ранг матрицы $[\beta_{jk}]$ равен $n-1$.

Перепишем ее в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{jk} U_k(z) = -\beta_{jn} U_n(z) + (\mu_j - \mu_0) b f'(z).$$

Отсюда

$$U_k(z) = U_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} Q_{kj} (\mu_j - \mu_0) b f'(z), \quad (2.39)$$

где

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1,1} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Аналогично,

$$V_k(z) = V_m(z) - \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a f'(z), \quad (2.40)$$

где

$$\mathbf{R} = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m-1,1} & \cdots & \alpha_{m-1,m-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Подставляя (2.39) и (2.40) в (2.34), получим уравнение на функцию $f(z)$

$$A_1 f''(z) + A_2 f'(z) = 0,$$

где A_1, A_2 определяются выражениями (2.20), (2.21). Откуда

$$f(z) = C_1 + C_2 \exp\left\{-\frac{A_2}{A_1} z\right\}.$$

Из доказанного в главе 1 следует, что константа $A_1 > 0$. Граничные условия (2.16) дают $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Откуда постоянная $C_1 = 0$. Таким образом,

$$f_{ij}(S, \theta) = C_2 \exp\left\{-\frac{A_2}{A_1} S\right\} + O(\theta).$$

из условия (2.18) имеем теперь $C_2 = 1$. Теорема доказана. •

Таким образом, вероятность разорения

$$G_{ij}(s) = C(\theta) \exp\left\{-\frac{A_2}{A_1} \theta S\right\} + O(\theta). \quad (2.41)$$

Для определения функции $C(\theta)$ рассмотрим теперь систему уравнений (2.15) при $S=0$. Из (2.15) при $S=0$ получим, очевидно,

$$(\lambda_i + \mu_j) G_{ij}(0) = \lambda_i \int_0^{\infty} G_{ij}(x) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} G_{kj}(0) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} G_{ik}(0) + \mu_j. \quad (2.42)$$

Умножая уравнения системы (2.42) на $\pi_i \rho_j$ и складывая уравнения, получим, учитывая (2.2) и (2.6),

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \pi_i \rho_j (\lambda_i + \mu_j) G_{ij}(0) = \sum_{i=1}^m \pi_i \lambda_i \sum_{j=1}^n \rho_j \int_0^{\infty} G_{ij}(x) \varphi(x) dx + \mu_0.$$

Откуда

$$C(\theta) = \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta x} \varphi(x) dx}. \quad (2.43)$$

Таким образом, при $\theta \ll 1$ окончательно получаем, что вероятность разорения

$$G_{ij}(S) = \frac{\mu_0 \exp\left\{-\frac{A_2}{A_1} \theta S\right\}}{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta x} \varphi(x) dx} + O(\theta), \quad (2.44)$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются формулами (2.20), (2.21).

Пример 1. Для оценки точности получившейся аппроксимации рассмотрим случай, когда $m=n=1$, а плотности распределения страховых премий и страховых выплат являются экспоненциальными с параметрами a и b соответственно. В этом случае истинная вероятность разорения имеет вид [35]

$$G(S) = \frac{a+b}{a+b(1+\theta)} \exp\left(-\frac{\theta S}{a+b(1+\theta)}\right). \quad (2.45)$$

Графики функции $G(S)$ (2.45) (сплошные линии) и ее оценки $\hat{G}(S)$ (пунктирные линии), построенной по формуле (2.44), приведены на рис. 2.1.

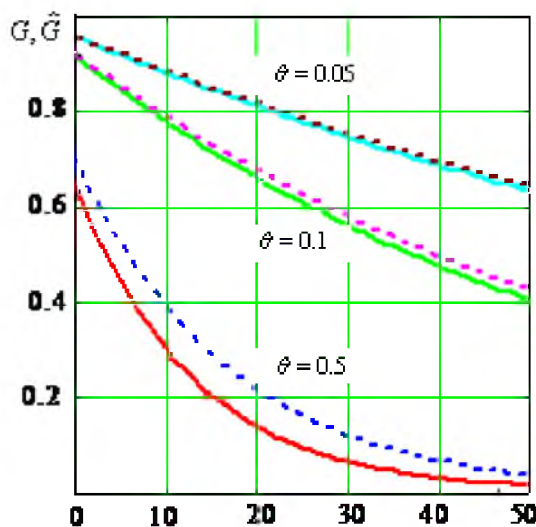


Рис.2.1. Зависимость вероятности разорения от начального капитала при $\theta = 0,1; 0,5; 0,005$.

Пример 2. Пусть $m = n = 1$, поступающие премии и выплаты имеют гамма-распределения

$$\varphi(S) = \frac{4S}{a^2} e^{-\frac{2S}{a}}, \quad \psi(S) = \frac{4S}{b^2} e^{-\frac{2S}{b}}.$$

Зависимость вероятности разорения $G(S)$ от начального капитала, полученная посредством имитационного моделирования (сплошные линии), описанного в гл. 4, и ее оценка, построенная по формулам (2.44), при различных значениях θ приведены на рис. 2.2. Параметры $a = 5, \lambda = 10, \mu = 1$.

Параметр $b = \frac{\lambda a}{(1 + \theta)\mu}$. Объем выборки при моделировании $N = 100\,000$. Как

видно из рис. 2.2, с уменьшением нагрузки страховой премии точность аппроксимации вероятности разорения соотношением (2.44) увеличивается.

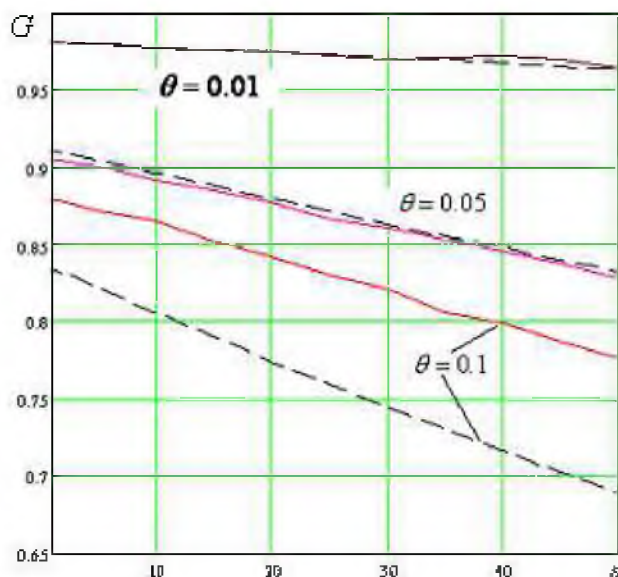


Рис. 2.2. Зависимость вероятности разорения и ее оценки от начального капитала

Пример 3. Пусть $m = n = 2$. Страховые премии и выплаты имеют экспоненциальные распределения со средними a и b соответственно.

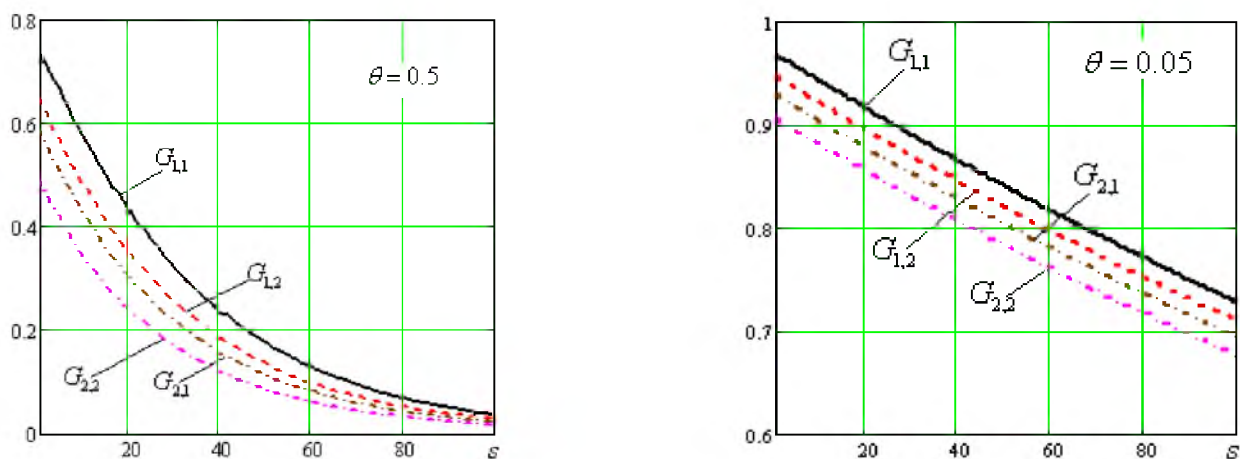


Рис. 2.3. Зависимости вероятностей разорения $G_{i,j}(S)$ от начального капитала.

Зависимости вероятностей разорения $G_{i,j}(S)$ от начального капитала, полученные численным решением системы уравнений (2.15) с помощью

алгоритма, описанного в гл.4, приведены на рис. 2.3. Параметры: $a=1, \lambda_1=15, \lambda_2=5, \mu_1=1, \mu_2=0.5$, матрицы инфинитезимальных характеристик

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.8 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

Зависимости вероятности разорения $G(S)$ (2.12) и ее оценки $\hat{G}(S)$, вычисленной согласно соотношению (2.44), приведены на рис. 2.4. Как видно из приведенных графиков при уменьшении нагрузки страховой премии построенная оценка (2.44) хорошо аппроксимирует вероятность разорения.

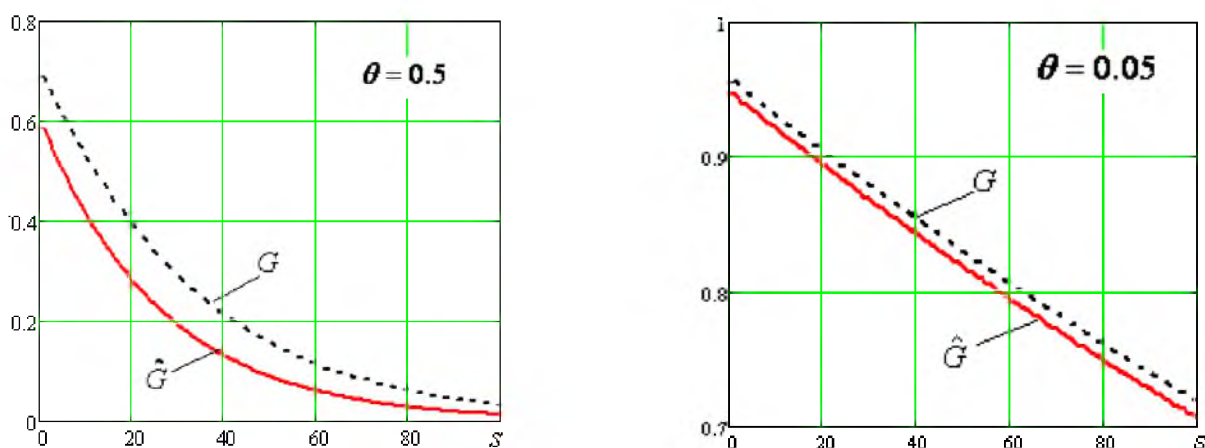


Рис. 2.4. Зависимость вероятности разорения $G(S)$ и ее оценки $\hat{G}(S)$ от начального капитала.

2.4 Производящие функции условного времени

Пусть $(\Omega, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ - вероятностное пространство, на котором определены траектории процесса $S(t)$ изменения капитала компании. Пусть в начальный момент времени капитал компании равен S и значения интенсивностей потоков страховых премий и страховых выплат равны

соответственно $\lambda(t) = \lambda_i$ и $\mu(t) = \mu_j$. Разобьем все возможные траектории процесса $S(t)$, выходящие из этой точки на два класса: $\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_{ij}(S)\}$ – траектории, приводящие к разорению, и $\{S_\omega(t), \omega \in \overline{\Omega}_{ij}(S)\}$ – траектории, приводящие к выживанию. Пусть $t_{ij}(S, \omega)$ – время до разорения на траектории, приводящей к разорению. Обозначим

$$\Phi_{ij}(S, u) = \int_{\Omega_{ij}(S)} e^{-ut_{ij}(S, \omega)} P(d\omega) . \quad (2.46)$$

Так как вероятность разорения на бесконечном интервале при условии, что в начальный момент времени капитал равен S и интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат равны λ_i и μ_j соответственно

$$G_{ij}(S) = \int_{\Omega_{ij}(S)} P(d\omega) , \quad (2.47)$$

то

$$\varphi_{ij}(S, u) = \frac{\Phi_{ij}(S, u)}{G_{ij}(S)} \quad (2.48)$$

есть производящая функция условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен S и интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат равны λ_i и μ_j соответственно.

Функции $\Phi_{ij}(S, u)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi_{ij}(S, 0) = G_{ij}(S), \quad \lim_{S \rightarrow \infty} \Phi_{ij}(S, u) = 0, \quad (2.49)$$

второе, из которых вытекает из того, что при $S \rightarrow \infty$ область интегрирования в (2.46) $\Omega_{ij}(S) \rightarrow \emptyset$.

Пусть $g_{ij}(t, S)$ – плотность распределения и $F_{ij}(t, S)$ – функция распределения условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен S и интенсивности потоков равны λ_i и μ_j . Очевидно, что

$$g_{ij}(t, S) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \phi_{ij}(S, u) e^{ut} du. \quad (2.50)$$

Если $P_{ij}(S, t)$ – вероятность разорения страховой компании за время t , то

$$P_{ij}(S, t) = F_{ij}(S, t) G_{ij}(S), \quad (2.51)$$

так как для разорения за время, не превосходящее t , компания должна разориться и время до разорения должно быть не больше, чем t . Поэтому определение любой из вероятностей $P_{ij}(S, t)$ или $F_{ij}(t, S)$ определяет и вторую вероятность.

Для вывода уравнений, которым должны удовлетворять функции $\Phi_{ij}(S, u)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. За время Δt капитал компании изменится на величину ΔS и

$$t_{ij}(S, \omega) = \Delta t + t_{pq}(S + \Delta S, \omega), \quad (2.52)$$

где номера p, q соответствуют значениям интенсивностей $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ в момент времени $t + \Delta t$. Усредняя соотношение (2.52), будем иметь

$$\Phi_{ij}(S, u) = e^{-u\Delta t} M_{\Delta S, p, q} \{ \Phi_{pq}(S + \Delta S, u) \}. \quad (2.53)$$

Используя формулу полной вероятности, получим из (2.53)

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(S, u) = & (1 - u\Delta t) \left[(1 - (\lambda_i + \mu_j)\Delta t + (\alpha_{ii} + \beta_{jj})\Delta t) \Phi_{ij}(S, u) \right. \\ & + \lambda_i \Delta t \int_0^S \Phi_{ij}(S + x, u) \varphi(x) dx + \mu_j \Delta t \int_0^S \Phi_{ij}(S - x, u) \psi(x) dx + \\ & \left. + \mu_j \Delta t \int_S^\infty \psi(x) dx + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} \Delta t \Phi_{kj}(S, u) + \sum_{k \neq j} \beta_{jk} \Phi_{ik}(S, u) + o(\Delta t), \right. \end{aligned}$$

где учтено, что при $S < 0$ $t_{ij}(S, u) = 0$. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu_j + u) \Phi_{ij}(S, u) = & \lambda_i \int_0^S \Phi_{ij}(S + x, u) \varphi(x) dx + \\ & + \mu_j \int_0^S \Phi_{ij}(S - x, u) \psi(x) dx + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \Phi_{kj}(S, u) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \Phi_{ik}(S, u) + \mu_j \int_S^\infty \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.5 Производящие функции условного времени при малой нагрузке страховой премии

Получить точное решение систем уравнений (2.54) не удастся. Поэтому опять рассмотрим асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (2.54) будем искать в виде

$$\Phi_{ij}(S, u) = A(u, \theta) f_{ij}\left(\theta S, \frac{u}{\theta^2}, \theta\right), \quad (2.55)$$

где $A(u, \theta)$ и $f_i(z, u, \theta)$ – некоторые пока не определенные функции. В силу произвольности функции $A(u, \theta)$ можно считать, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i \rho_j f_{ij}(0, u, \theta) = 1. \quad (2.56)$$

Также будем считать, что функции, $f_{ij}(z, u, \theta)$ по крайней мере, дважды дифференцируемы по z и равномерно непрерывны по u и θ , а также, что предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} A(\theta^2 u, \theta) \neq 0.$$

Подставляя (2.55) в уравнения (2.54) и сделав замену переменной $\theta S = z, \frac{u}{\theta^2} = \omega$ получим уравнения относительно функций $f_{ij}(z, \omega, \theta)$

$$\begin{aligned} & (\alpha_i + \mu_j + \omega\theta^2) f_{ij}(z, \omega, \theta) = \\ & = \alpha_i \int_0^{\infty} f_{ij}(z + \theta x, \omega, \theta) \varphi(x) dx + \mu_j \int_0^{\infty} f_{ij}(z - \theta x, \omega, \theta) \psi(x) dx + \\ & + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} f_{kj}(z, \omega, \theta) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f_{ik}(z, \omega, \theta) + R_{i,j}(\theta, z), \end{aligned} \quad (2.57)$$

где

$$R_{i,j}(\theta, z) = \mu_j \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_{ij}(z - \theta x, \omega, \theta) \psi(x) dx + \frac{\mu_j}{A(\theta^2, \omega, \theta)} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(x) dx. \quad (2.58)$$

Оценим поведение $R_{i,j}(\theta, z)$ при $\theta \ll 1$ и $z \neq 0$. Имеем

$$\frac{1}{\theta^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(x) dx = \frac{1}{z^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \frac{z^3}{\theta^3} \psi(x) dx \leq \frac{1}{z^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} x^3 \psi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,$$

так как по условию $M\{x^3\} = b_3$ существует. Так как $f_{ij}(z, \theta)$ считается дифференцируемой и, следовательно, ограниченной, то аналогично ведет себя и второе слагаемое. Поэтому $R_{i,j}(\theta, z) = o(\theta^3)$ и в дальнейшем это слагаемое учитываться не будет.

Теорема 2.2. При $\theta \ll 1$

$$f_{ij}(z, \omega, \theta) = e^{-\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1} z} + O(\theta), \quad (2.59)$$

где A_1, A_2 определяются соотношениями (2.20), (2.21).

Доказательство. Обозначим

$$f_{ij}(z, \omega) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_{ij}(z, \omega, \theta). \quad (2.60)$$

Переходя в (2.57) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} f_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f_{ik}(z, \omega) = 0.$$

Аналогично выводу (2.23) получаем, что

$$f_{ij}(z, \omega) = f(z, \omega) \quad \forall i, j, \quad (2.61)$$

где $f(z, \omega)$ – неизвестная пока функция.

Представим теперь функции $f_{ij}(z, \omega, \theta)$ в виде

$$f_{ij}(z, \omega, \theta) = f(z, \omega) + A_{ij}(z, \omega)\theta + o(\theta). \quad (2.62)$$

Подставляя разложения (2.62) в уравнения (2.57), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами разложения, имеющими порядок θ , получим, что

$$\theta \left[\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} A_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} A_{ik}(z, \omega) \right] + \theta(\lambda_i a - \mu_j b) f(z, \omega) + o(\theta) = 0 \quad (2.63)$$

Наконец, с учетом (2.11)

$$\lambda_i a - \mu_j b = (\lambda_i - \lambda_0) a - (\mu_j - \mu_0) b + \mu_0 b \theta.$$

Переходя в (2.63) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} A_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} A_{ik}(z, \omega) = -[(\lambda_i - \lambda_0)a - (\mu_j - \mu_0)b] \dot{f}(z, \omega). \quad (2.64)$$

Представим теперь функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде

$$f_{ij}(z, \omega, \theta) = f(z, \omega) + A_{ij}(z, \omega)\theta + B_{ij}(z, \omega)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (2.65)$$

Подставляя разложения (2.65) в уравнения (2.57), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$, $B_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2 , получим, учитывая (2.64) и переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} B_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} B_{ik}(z, \omega) + \frac{\lambda_i a_2 + \mu_j b_2}{2} f''(z) + \mu_0 b f'(z, \omega) \\ + [(\lambda_i - \lambda_0)a - (\mu_j - \mu_0)b] A'_{ij}(z, \omega) = \omega f(z, \omega). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Умножая соотношения (2.66) на π_i и ρ_j , суммируя и учитывая (2.2), (2.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} f''(z, \omega) + \mu_0 b f'(z, \omega) - \\ - \omega f(z, \omega) + \sum_{i=1}^m \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \sum_{j=1}^n \rho_j A'_{ij}(z, \omega) - \sum_{j=1}^n \rho_j (\mu_j - \mu_0) b \sum_{i=1}^m \pi_i A'_{ij}(z, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Обозначим

$$V_i(z, \omega) = \sum_{j=1}^n \rho_j A_{ij}(z, \omega), \quad i = \overline{1, m},$$

$$U_j(z, \omega) = \sum_{i=1}^m \pi_i A_{ij}(z, \omega), \quad j = \overline{1, n}.$$

Из соотношений (2.54) с учетом (2.2), (2.4) и (2.6), (2.8) умножая уравнения системы на π_i и ρ_j соответственно и суммируя, получим, что функции $U_j(z, \omega)$ и $V_i(z, \omega)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\sum_{k=1}^n \beta_{jk} U_k(z, \omega) = (\mu_j - \mu_0) b f'(z, \omega) \quad (2.68)$$

и

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{jk} V_k(z, \omega) = -(\lambda_j - \lambda_0) a f'(z, \omega). \quad (2.69)$$

Рассмотрим систему уравнений (2.58). Ранг матрицы $[\beta_{jk}]$ равен $n-1$.

Перепишем систему (2.58) в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{jk} U_k(z, \omega) = -\beta_{jn} U_n(z, \omega) + (\mu_j - \mu_0) b f'(z, \omega). \quad (2.70)$$

Откуда

$$U_k(z, \omega) = U_n(z, \omega) + \sum_{k=1}^{n-1} Q_{kj} (\mu_j - \mu_0) b f'(z, \omega), \quad (2.71)$$

где $\mathbf{Q} = [Q_{ij}]$ имеет вид (2.23). Аналогично,

$$V_k(z, \omega) = V_m(z, \omega) - \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a f'(z, \omega), \quad (2.72)$$

где $\mathbf{R} = [R_{ij}]$ имеет вид (2.24).

Подставляя соотношения (2.71) и (2.72) в (2.67), получим уравнение на функцию $f(z, \omega)$:

$$A_1 f''(z, \omega) + A_2 f'(z, \omega) - \omega f(z, \omega) = 0, \quad (2.73)$$

где A_1 и A_2 заданы соотношениями (2.20), (2.21). Откуда

$$f(z, \omega) = U_1(\omega) e^{x_1(\omega)z} + U_2(\omega) e^{x_2(\omega)z},$$

где

$$x_1(\omega) = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1}, \quad x_2(\omega) = \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1} \quad (2.74)$$

- корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (2.73).

Ранее было доказано, что $A_1 > 0$. Поэтому $U_2(\omega) = 0$. Наконец, из условия $f_{i,j}(z, \omega) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_{i,j}(z, \omega, \theta)$ получаем, что $U_1(\omega) = 1$ и, следовательно,

$$f(z, \omega) = e^{\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1} z}, \quad (2.75)$$

что и доказывает теорему. •

Таким образом,

$$\Phi_{ij}(S, u) = A(u, \theta) e^{x_i \left(\frac{u}{\theta^2}\right) \theta S} + O(\theta). \quad (2.76)$$

При выводе соотношения (2.76) предполагалось, что в уравнениях (2.57) $S \neq 0$. Для определения функции $A(u, \theta)$ рассмотрим теперь уравнения (2.57) при $S = 0$. Умножая уравнения системы (2.57) на π_i и ρ_j и складывая уравнения, при $S = 0$ будем иметь

$$(\lambda_0 + \mu_0 + u) A(u, \theta) = \lambda_0 A(u, \theta) \int_0^\infty e^{x_i \left(\frac{u}{\theta^2}\right) \theta x} \varphi(x) dx + \mu_0. \quad (2.77)$$

Откуда

$$A(u, \theta) = \frac{\mu_0}{(\lambda_0 + \mu_0 + u) - \lambda_0 \int_0^\infty e^{x_i \left(\frac{u}{\theta^2}\right) \theta x} \varphi(x) dx}. \quad (2.78)$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$\Phi_{ij}(S, u) = \frac{\mu_0 e^{x_i \left(\frac{u}{\theta^2}\right) \theta S}}{(\lambda_0 + \mu_0 + u) - \lambda_0 \int_0^\infty e^{x_i \left(\frac{u}{\theta^2}\right) \theta x} \varphi(x) dx} + O(\theta). \quad (2.79)$$

Из соотношений (2.79) и (2.49) можно получить теперь ранее полученное выражение (2.44) для вероятностей разорения на бесконечном интервале при $\theta \ll 1$

$$G_{ij}(S) = \frac{\mu_0 e^{-\frac{A_2}{A} \theta S}}{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^\infty e^{-\frac{A_2}{A} \theta x} \varphi(x) dx}.$$

Моменты условного времени до разорения определяются соотношениями

$$t_{ij}^k(S) = \frac{(-1)^k \partial^k \Phi_{ij}(S, u) \big|_{u=0}}{G_{ij}(S) \partial u^k}. \quad (2.80)$$

Вычисляя производные, получим, что при $\theta \ll 1$ среднее значение условного времени

$$t_{ij}^1(S) = \frac{1}{\theta A_2} \left(S + \frac{\lambda_0 a}{\mu_0} \right) + O(1). \quad (2.81)$$

Дисперсия условного времени

$$D_{ij}(S) = \frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3} \left(S + \frac{\lambda_0 a}{\mu_0} \right) + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right). \quad (2.82)$$

2.6 Плотность распределения условного времени при неограниченно возрастающем начальном капитале

Будем теперь считать, что при $\theta \rightarrow 0$ начальный капитал компании $S \rightarrow \infty$ согласованно с θ , то есть $S = S(\theta)$. Пусть t – время до разорения.

Обозначим

$$m = \frac{1}{\theta A_2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3}},$$

введем величину

$$z = \frac{t - mS}{\sigma\sqrt{S}}$$

и обозначим через $\varphi_{i,j,z}(u, S)$ ее производящую функцию при заданном S .

Теорема 2.3. Если при $\theta \rightarrow 0$ $\theta S(\theta) \rightarrow \infty$, но $\theta^{\frac{3}{2}} S(\theta) \rightarrow 0$ то

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi_{i,j,z}(j\omega, S) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Доказательство. Производящая функция величины z

$$\varphi_{i,j,z}(u, S) = e^{\frac{muS}{\sigma\sqrt{S}}} \varphi_{i,j} \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{S}}, S \right) \quad (2.83)$$

или

$$\varphi_{i,j,z}(u, z) = \frac{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{A_2}{A} \theta x} \varphi(x) dx}{\lambda_0 + \mu_0 + \frac{u}{\sigma\sqrt{S}} - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{-x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}} \right) \theta x} \varphi(x) dx} e^{\frac{A_2}{A} \theta S + x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{S}} \right) \theta S + \frac{m}{\sigma} \sqrt{S} u}. \quad (2.84)$$

Обозначим

$$\gamma = \sqrt{\frac{A_2}{2A_1}}.$$

Тогда

$$e^{\frac{A_2}{A_1}\theta S + \frac{m}{\sigma}\sqrt{Su+x_1}\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{S}}\right)\theta S} = e^{2\gamma^2\theta S + \gamma u\sqrt{\theta S} + x_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{S}}\right)\theta S}. \quad (2.85)$$

Далее,

$$\begin{aligned} x_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{S}}\right) &= -\gamma^2 - \gamma^2\sqrt{1 + \frac{2u}{\gamma\sqrt{\theta S}}} = \\ &= -\gamma^2\left[2 + \frac{u}{\gamma\sqrt{\theta S}} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{\gamma^2\theta S} + \frac{1}{2\gamma^3}\frac{u^3}{\theta S\sqrt{\theta S}}\right] + o\left(\frac{1}{\theta S\sqrt{\theta S}}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$e^{2\gamma^2\theta S + \gamma u\sqrt{\theta S} + x_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{S}}\right)\theta S} = e^{\frac{1}{2}u^2 - \frac{u^3}{2\gamma\sqrt{\theta S}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta S}}\right)}.$$

Наконец, при $\theta \rightarrow 0$ и $S \rightarrow \infty$ отношение

$$\frac{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^\infty e^{-2\gamma^2\theta x} \varphi(x) dx}{\lambda_0 + \mu_0 + \frac{u}{\sigma\sqrt{S}} - \lambda_0 \int_0^\infty e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{S}}\right)\theta x} \varphi(x) dx} \rightarrow 1.$$

При $\theta \rightarrow 0$ и $S \rightarrow \infty$, положив $u = j\omega$, получим (2.83). •

Таким образом, распределение условного времени до разорения при условии, что разорение происходит, сходится к нормальному распределению.

Резюме к главе 2

В настоящей главе была исследована математическая модель страховой компании в случае, когда страховые премии и страховые выплаты образуют дважды стохастические пуассоновские потоки, при дополнительном предположении о том, что нагрузка страховой премии мала. В частности:

1. Получены выражения, определяющие вероятность разорения страховой компании на бесконечном временном интервале для данной

математической модели в зависимости от начального капитала и начального значения интенсивностей потоков страховых выплат и страховых премий.

2. Получены выражения, определяющие производящие функции времени до разорения страховой компании, при условии, что разорение происходит. Это позволяет определить такие характеристики, как среднее и дисперсию условного времени до разорения, найти вероятность разорения страховой компании на конечном временном интервале.

3. Показано, что при уменьшении нагрузки страховой премии и при одновременном возрастании начального капитала условное время до разорения распределено асимптотически нормально.

Результаты главы опубликованы в работах [15,16,24,25,26].

Глава 3. Математические модели деятельности некоммерческого фонда

Под некоммерческим фондом в работе понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. К некоммерческим могут быть отнесены, например, эндаумент-фонды, внебюджетные фонды РФ, а также государство в целом, так как одной из основных функций государства является сбор посредством налогообложения денежных средств и их дальнейшее распределение.

Построению и исследованию моделей некоммерческих фондов посвящены работы [31,32,48 – 50,70 – 72,63,64].

Математические модели деятельности некоммерческих фондов имеют много общего с рассмотренными выше математическими моделями страхования, прежде всего за счёт того, что как в том, так и в другом случаях потоки поступающих денежных средств и выплат являются в общем случае случайными. Общие черты этих моделей особенно проявляются при сравнении с моделями страхования, в которых как, например, в [57,93,98,100], допускается выплата дивидендов при достаточно большом накопленном капитале. Принципиальная разница состоит в том, что если управление денежными средствами в страховой компании осуществляется в основном за счёт выбора нагрузки страховой премии, то страховой фонд имеет возможность выбора стратегии расходования денежных средств в зависимости от накопленного капитала. Ниже рассматриваются статистические характеристики математических моделей деятельности некоммерческих фондов при различных предположениях о моделях потоков денежных средств и управлением их расходованием.

3.1. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке поступающих платежей и релейном управлении выплатами.

3.1.1. Модель изменения капитала фонда

Как указывалось выше, к некоммерческим фондам могут быть отнесены так называемые государственные внебюджетные фонды РФ. Основная особенность деятельности этих фондов состоит в том, что поступление и расходование денежных средств внебюджетных фондов определяется законодательством, которое устанавливает не только размеры страховых взносов, но и временные границы перечисления средств в фонды. Так в настоящее время в соответствии с законом перечисление средств во внебюджетные фонды должно осуществляться до 15 числа месяца, следующего за отчётным [81]. Это приводит к тому, что интенсивность потока страховых платежей имеет существенно различные значения в первой и второй половине месяца. В то же время моменты изменения величины интенсивности зависят от многих случайных факторов и не могут рассматриваться как детерминированные. Подходящей моделью потока страховых платежей опять может считаться дважды стохастический пуассоновский поток.

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t . Будем предполагать, что с капиталом могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределёнными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$ и моментами $M\{x\} = a$ и $M\{x^2\} = a_2$.

Моменты поступления денежных средств образуют дважды стохастический пуассоновский поток с переменной интенсивностью $\lambda(t)$. Процесс $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_j$. Переход из состояния в состояние задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ ранга $n-1$.

2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что моменты выплаты денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью μ . Расходуемые суммы являются независимыми случайными величинами $b(S)x$, где случайная величина x имеет плотность распределения $\psi(x)$ и моменты $M\{x\} = 1$ и $M\{x^2\} = \beta_2$. Предполагается также, что стратегия расходования денежных средств имеет релейный характер, т.е.

$$b(S) = \begin{cases} b_0, & S < S_0, \\ b_1, & S > S_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

для некоторого порогового значения капитала S_0 . Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$\mu b_0 < \lambda_0 a, \mu b_1 > \lambda_0 a, \quad (3.2)$$

где $\lambda_0 = M\{\lambda\}$ - средняя интенсивность потока поступающих премий. Таким образом, управление капиталом фонда заключается в том, что при $S < S_0$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем собирает, а при $S > S_0$ расходует больше средств, чем в него поступает.

Наконец, будем считать, что при $S < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатёжеспособности фонда, выплаты начисляются, и обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

3.1.2. Плотность распределения капитала фонда

Обозначим $P_i(S, t) ds = \Pr\{S < S(t) \leq S + ds; \lambda(t) = \lambda_i\}$ ($i = \overline{1, n}$). Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени $t + \Delta t$ $\lambda(t + \Delta t) = \lambda_i$ и капитал фонда $S(t + \Delta t) = S$. Тогда на интервале времени длиной Δt могли произойти следующие события:

1. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt не изменялась, денежные средства в фонд не поступали и не выплачивались. Вероятность этого события равна $1 + (q_{ii} - \lambda_i - \mu)\Delta t + o(\Delta t)$.

2. За время Δt значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_j$ поменялось на $\lambda(t + \Delta t) = \lambda_i$. Денежные средства в фонд не поступали и не выплачивались. Вероятность этого события $q_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$.

3. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_j$, за время Δt интенсивность не изменилась, поступили денежные средства в размере x . Вероятность этого события $\lambda_j \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$.

4. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_j$, за время Δt интенсивность не изменилась, была произведена случайная выплата в размере x . Вероятность этого события равна $\mu \Delta t \frac{1}{b(S+x)} \Psi\left(\frac{x}{b(S+x)}\right) dx + o(\Delta t)$.

5. Вероятность иных событий равна $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P_i(S, t + \Delta t) = (1 + (q_{ii} - \lambda_i - \mu)\Delta t)P_i(S, t) + \sum_{j \neq i} q_{ji}P_j(S, t)\Delta t + \\ + \lambda_i \Delta t \int_0^{\infty} P_i(S - x, t) \varphi(x) dx + \mu \Delta t \int_0^{\infty} P_i(S + y) \frac{1}{b(S + y)} \Psi\left(\frac{y}{b(S + y)}\right) dy + o(\Delta t).$$

Считая функции, $P_i(S, t)$ дифференцируемыми по t и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial P_i(S, t)}{\partial t} = (q_{ii} - \lambda_i - \mu)P_i(S, t) + \sum_{j \neq i} q_{ji}P_j(S, t) + \\ + \lambda_i \int_0^{\infty} P_i(S - x, t) \varphi(x) dx + \mu \int_0^{\infty} P_i(S + y) \frac{1}{b(S + y)} \Psi\left(\frac{y}{b(S + y)}\right) dy. \quad (3.3)$$

Рассмотрим далее стационарный случай. Пусть

$$P_i(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(S, t). \quad (3.4)$$

Функции $P_i(S)$ будут удовлетворять уравнениям

$$(\lambda_i + \mu)P_i(S) - \sum_{j=1} q_{ji}P_j(S) = \\ = \lambda_i \int_0^{\infty} P_i(S - x) \varphi(x) dx + \mu \int_0^{\infty} P_i(S + y) \frac{1}{b(S + y)} \Psi\left(\frac{y}{b(S + y)}\right) dy \quad (3.5)$$

с вытекающими из определения условиями нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(S) dS = \pi_j, \quad (3.6)$$

где π_j финальная вероятность состояния λ_j .

При произвольных распределениях страховых премий $\varphi(x)$ и страховых выплат $\Psi(x)$ получить точное решение системы уравнений (3.5) не удаётся. Однако, пользуясь методикой, использованной в главах 1 и 2, опять можно построить приближённые решения уравнений.

Введем параметр θ , где $0 < \theta < 1$ и будем считать, что

$$\mu b_0 = (1 - \theta)\lambda_0 a, \quad \mu b_1 = (1 + \theta)\lambda_0 a. \quad (3.7)$$

Рассмотрим далее асимптотический случай, когда $\theta \ll 1$. Практически это означает, что при любом значении капитала S фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом естественно считать, что порог S_0 , определяющий управление капиталом, зависит от θ и растёт с уменьшением θ . Более точно будем считать, что при $\theta \rightarrow 0$, $S_0(\theta) \rightarrow \infty$, но так, что существует конечный предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta S_0(\theta) = z_0. \quad (3.8)$$

Решение уравнений (3.5) будем искать в виде

$$P_i(S) = \theta f_i(\theta S, \theta), \quad (3.9)$$

считая функции $f_i(z, \theta)$ дважды дифференцируемыми по θ и дважды дифференцируемыми по z за исключением точки, $z_0 = \theta S_0$, так как в точке S_0 коэффициенты $b(S)$ имеют разрыв.

Теорема 3.1. При $\theta \ll 1$ функции

$$f_i(z, \theta) = \pi_i e^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0} |z - z_0|} + O(\theta), \quad (3.10)$$

где

$$\gamma_1 = \lambda_0 a, \quad b_2 = \frac{\lambda_0^2 a^2}{\mu^2} \beta_2 \quad (3.11)$$

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} - \sum_{k,j=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_0) R_{kj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a^2, \quad (3.12)$$

$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Рассмотрим область $S < S_0$. В этой области уравнения (3.5) переписутся как

$$\begin{aligned}
(\lambda_i + \mu)P_i(S) &= \lambda_i \int_0^{\infty} P_i(S-x)\varphi(x)dx + \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} P_i(S+y)\psi\left(\frac{y}{b_0}\right)dy + \\
&+ \sum_{j=1}^n q_{ji}P_j(S) + \mu \int_{S_0-S}^{\infty} P_i(S+y) \left[\frac{1}{b} \psi\left(\frac{y}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \psi\left(\frac{y}{b_0}\right) \right] dy.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Подставляя функции (3.9) в уравнения (3.14) после замены переменных $z = \theta S$ и $z_0 = \theta S_0$, получим в области $z < z_0$

$$\begin{aligned}
(\lambda_i + \mu) f_i(z, \theta) &= \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \\
&+ \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} f_i(z + \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \sum_{j=1}^n q_{ji} f_j(z, \theta) + R_i(\theta, z),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$R_i(\theta, z) = \mu \int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} f_i(z + \theta x, \theta) \left[\frac{1}{b_1} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) \right] dx.$$

Так как $f_i(z, \theta)$ предполагается дважды дифференцируемой по z и, следовательно, ограниченной, то

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta^2} R_i(\theta, z) &\leq \frac{1}{\theta^2} \max_z f_i(z, \theta) \int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} \left[\frac{1}{b_1} \psi_1\left(\frac{x}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) \right] dx = \\
&= \max_z f_i(z, \theta) \frac{1}{\theta^2} \int_{\frac{z_0-z}{\theta b_1}}^{\frac{z_0-z}{\theta b_0}} \psi(x) dx \leq \max_z f_i(z, \theta) \frac{1}{\theta^2} \int_{\frac{z_0-z}{\theta b_1}}^{\infty} \psi(x) dx \leq \\
&\leq \max_z f_i(z, \theta) \frac{b_1^2}{(z_0 - z)^2} \int_{\frac{z_0-z}{\theta b_1}}^{\infty} x^2 \psi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,
\end{aligned}$$

так как $M\{x^2\} = \beta_2$ по условию существует. Таким образом, при $z < z_0$ $R_i(\theta, z) = o(\theta^2)$ и это слагаемое, входящее в (3.15), в дальнейшем учитывать не будем. Переходя в уравнениях (3.15) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} f_j(z, 0) = 0. \tag{3.16}$$

Так как финальные вероятности π_j являются решением системы уравнений (1.3)

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} \pi_j = 0, \quad (3.17)$$

где величины π_j удовлетворяют условию нормировки (1.4)

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1,$$

и ранг матрицы $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ равен $n-1$, то из (3.16) и (3.17) получаем, что

$$f_j(z, 0) = \pi_j f(z), \quad (3.18)$$

где $f(z)$ - неопределённая пока функция.

Пусть теперь

$$f_j(z, \theta) = \pi_j f(z) + h_j(z)\theta + o(\theta). \quad (3.19)$$

Подставляя выражения (3.19) в уравнения (3.15), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ , получим

$$\theta \left[\sum_{j=1}^n q_{ji} h_j(z) + \mu b_0 \pi_i \dot{f}(z) - \lambda_i a \pi_i \dot{f}(z) \right] + o(\theta) = 0.$$

Откуда, учитывая первое соотношение (3.7), при $\theta \rightarrow 0$ будем иметь

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} h_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0) a \pi_i \dot{f}(z). \quad (3.20)$$

Пусть теперь

$$f_i(z, \theta) = \pi_i f(z) + h_i(z)\theta + g_i(z)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (3.21)$$

Подставляя разложения (3.21) в уравнения (3.15), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок не выше θ^2 , получим, учитывая (3.7), (3.16) и (3.20), что

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_i \frac{a_2}{2} + \mu \frac{b_0^2 \beta_2}{2} \right) \pi_i \ddot{f}(z) - \lambda_0 a \pi_i \dot{f}(z) - (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(z) + \\ & + \sum_{j=1}^n q_{ji} g_j(z) + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Обозначив

$$b_2 = \frac{\lambda_0^2 a^2}{\mu^2} \beta_2 \quad (3.23)$$

и переходя в (3.22) к пределу при $\theta \rightarrow 0$ будем иметь

$$-\sum_{j=1}^{i\#+1} q_{ji} g_j(z) = \frac{\lambda_i a_2 + \mu b_2}{2} \pi_i \ddot{f}(z) - (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(z) - \lambda_0 a \pi_i \dot{f}(z). \quad (3.24)$$

Просуммировав, наконец, все соотношения (3.24) по i , получим, что

$$\frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} \ddot{f}(z) - \lambda_0 a \dot{f}(z) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(z) = 0. \quad (3.25)$$

Из системы уравнений (3.20)

$$\sum_{j=1}^{i\#+1} q_{ji} \dot{h}_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0) a \pi_i \ddot{f}(z), \quad (3.26)$$

Так как одновременно $\sum_{j=1}^n q_{ji} = 0$ и $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i = 0$, то система уравнений

(3.26) совместна и имеет ранг $(n-1)$, как и система уравнений (3.17). Пусть

матрица $\mathbf{R} = [R_{ij}]$ определяется соотношением (3.13). Тогда решение уравнений (3.17)

$$\pi_k = -\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{nj} \pi_n,$$

где π_n определяется из условия нормировки, а решение системы (3.26) имеет вид

$$\dot{h}_k(z) = -\sum_{j=1}^{i\#+1} R_{kj} q_{nj} \dot{h}_n(z) + \sum_{j=1}^{i\#+1} R_{kj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a \ddot{f}(z). \quad (3.27)$$

Или

$$\dot{h}_k(z) = \frac{\pi_k}{\pi_n} \dot{h}_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a \ddot{f}(z).$$

Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_0) a \dot{h}_k(z) = a^2 \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) \ddot{f}(z). \quad (3.28)$$

Таким образом, при $z < z_0$ функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_0 \ddot{f}(z) - \gamma_1 \dot{f}(z) = 0, \quad (3.29)$$

где γ_0, γ_1 определяются соотношениями (3.11) и (3.12), решение которого имеет вид

$$f(z) = C_1 + C_2 e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0} z}.$$

Из определения функций $f_i(z, \theta)$ следует, что при $z \rightarrow -\infty$, $f(z) \rightarrow 0$.

Поэтому при $z < z_0$

$$f(z) = C \exp\left\{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}(z - z_0)\right\}, \quad (3.30)$$

где C - некоторая постоянная.

В области $S > S_0$ функции $P_i(S)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu)P_i(S) = \\ = \lambda_i \int_0^\infty P_i(S-x)\varphi(x)dx + \frac{\mu}{b_1} \int_0^\infty P_i(S+y)\psi\left(\frac{y}{b_1}\right)dy + \sum_{j=1}^n q_{ji}P_j(S). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Откуда для функций $f_i(z, \theta)$ в области $z > z_0$ получаем уравнения

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu) f_i(z, \theta) = \lambda_i \int_0^\infty f_i(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \\ + \frac{\mu}{b_1} \int_0^\infty f_i(z + \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx + \sum_{\delta=1}^n q_{ji} f_j(z, \theta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Аналогичные вышеприведённым рассуждения показывают, что при $z > z_0$

$$f_j(z, 0) = \pi_j f(z), \quad (3.33)$$

где теперь

$$f(z) = D \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}(z - z_0)\right\}. \quad (3.34)$$

Так как при $\theta \rightarrow 0$ $b_1 \rightarrow b_0$ и уравнение (3.32) переходит в уравнение (3.15), то функцию $f(z)$ можно считать непрерывной в точке z_0 . Условие непрерывности $f(z)$ даёт $C = D$.

Отсюда, при $\theta \ll 1$

$$f_i(z, \theta) = D \pi_i \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}|z - z_0|\right\} + O(\theta). \quad (3.35)$$

Условие нормировки (3.6) и соотношение (3.7) дают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(z, \theta) dz = \pi_i.$$

Откуда $D = \frac{\gamma_1}{2\gamma_0}$. Теорема доказана. •

Таким образом, при $\theta \ll 1$

$$P_i(S) = \pi_i \frac{\gamma_1}{2\gamma_0} \theta e^{-\frac{\gamma_1 \theta}{\gamma_0} |S - S_0|} + o(\theta). \quad (3.36)$$

Пусть, наконец, $P(S) = \sum_{i=1}^n P_i(S)$ - безусловная плотность распределения капитала в стационарном режиме. Из (3.36) окончательно получим, что

$$P(S) = \frac{\theta \gamma_1}{2\gamma_0} \exp\left\{-\frac{\gamma_1 \theta}{\gamma_0} |S - S_0|\right\} + o(\theta). \quad (3.37)$$

3.1.3 Плотность распределения продолжительности периода неплатёжеспособности

Под периодом неплатёжеспособности фонда понимается время, в течение которого фонд не может выполнять свои обязательства.

Пусть $t_i(S)$ - продолжительность периода неплатёжеспособности фонда при условии, что в начале периода капитал фонда равен $S (S < 0)$ и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Обозначим через

$$\psi_i(u, S) = M\left\{e^{-u t_i(S)}\right\} \quad (3.38)$$

- условную производящую функцию периода неплатёжеспособности.

Если в начале периода $\lambda(t) = \lambda_i$, то за малое время Δt происходят следующие события: капитал фонда меняется на величину ΔS , а интенсивность $\lambda(t)$ либо остаётся неизменной с вероятностью $1 + q_{ii} \Delta t + o(\Delta t)$, либо принимает значение λ_j с вероятностью $q_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$.

Поэтому

$$t_i(S) = \Delta t + (1 + q_{ii} \Delta t) t_i(S + \Delta S) + \sum_{j \neq i} q_{ij} \Delta t t_j(S + \Delta S) + o(\Delta t)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_i(u, S) = e^{-u\Delta t} [(1 + q_{ii}\Delta t) M_{\Delta S} \{\psi_i(u, S + \Delta S)\} + \\ + \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t M_{\Delta S} \{\psi_j(u, S + \Delta S)\}] + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Усредняя (3.39) по ΔS , получим, отбрасывая члены, имеющие порядок $o(\Delta t)$, и учитывая, что при $S > 0$ период неплатёжеспособности заканчивается, и, следовательно, $t_i(S) = 0$, что

$$\begin{aligned} \psi_i(u, S) = e^{-u\Delta t} [(1 + q_{ii} - \lambda_i - \mu)\Delta t \psi_i(u, S) + \lambda_i \Delta t \int_0^{-S} \psi_i(u, S + x) \varphi(x) dx + \\ + \lambda_i \Delta t \int_{-S}^{\infty} \varphi(x) dx + \frac{\mu}{b_0} \Delta t \int_0^{\infty} \psi_i(u, S - x) \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \sum_{\delta \neq i} q_{ij} \Delta t \psi_j(u, S)] + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Переходя в (3.40) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, что производящие функции $\psi_i(u, S)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu + u)\psi_i(u, S) = \lambda_i \int_0^{-S} \psi_i(u, S + x) \varphi(x) dx + \lambda_i \int_{-S}^{\infty} \varphi(x) dx + \\ + \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} \psi_i(u, S - x) \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \sum_{j=1}^n q_{ij} \psi_j(u, S). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Решение уравнений (3.41) будем искать в виде

$$\psi_i(u, S) = f_i\left(\frac{u}{\theta^2}, \theta S, \theta\right), \quad (3.42)$$

где функции $f_i(\omega, z, \theta)$ предполагаются дважды дифференцируемыми по z и θ и равномерно непрерывными по ω . Подставляя выражения (3.42) в уравнения (3.41) и делая замену переменных $\omega = \frac{u}{\theta^2}$, $z = \theta S$, получим уравнения относительно функций $f_i(\omega, z, \theta)$

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu + \theta^2 \omega) f_i(\omega, z, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(\omega, z, \theta) = \\ = \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(\omega, z + \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} f_i(\omega, z - \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + R_i(\theta), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где

$$R_i(\theta) = \lambda_i \int_{-\frac{z}{\theta}}^{\infty} \varphi(x) dx - \lambda_i \int_{-\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_i(\omega, z + \theta x, \theta) \varphi(x) dx. \quad (3.44)$$

Так как $|f_i(\omega, z, \theta)| \leq 1$ и второй момент $M\{x^2\} = a_2$ конечен, то при любом конечном $z \neq 0$

$$\frac{1}{\theta^2} \left| \int_{-\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_i(\omega, z + \theta x, \theta) \varphi(x) dx \right| \leq \frac{1}{z^2} \int_{-\frac{z}{\theta}}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

Поэтому $R_i(\theta) = o(\theta^2)$ при $\theta \rightarrow 0$ и это слагаемое в (3.43) в дальнейшем учитывать не будем.

Теорема 3.2. При $\theta \ll 1$ функции

$$f_i(\omega, z, \theta) = e^{t_2(\omega)z} + O(\theta), \quad (3.45)$$

где

$$t_2(\omega) = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_0\omega}}{2\gamma_0}, \quad (3.46)$$

$$\gamma_1 = \lambda_0 a, \quad b_2 = \frac{\lambda_0^2 a^2}{\mu^2} \beta_2, \quad (3.47)$$

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} - \sum_{k,j=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_0) R_{ij} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a^2, \quad (3.48)$$

$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n-1,1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.49)$$

Доказательство. Переходя в уравнения (3.43) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(\omega, z, 0) = 0. \quad (3.50)$$

Так как ранг матрицы $[q_{ij}]$ равен $n-1$, то

$$f_j(\omega, z, 0) = f(\omega, z), \quad (3.51)$$

где $f(\omega, z)$ - произвольная функция.

Пусть теперь

$$f_i(\omega, z, \theta) = f(\omega, z) + h_i(\omega, z)\theta + o(\theta). \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.43) раскладывая функции $f_i(\omega, z \pm \theta x, \theta)$ в ряд Тейлора по второму аргументу по малому параметру θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ , получим

$$-\theta \sum_{j=1}^n q_{ij} h_j(\omega, z) = (\lambda_i a - \mu b_0) \dot{f}(\omega, z) \theta + o(\theta).$$

Так как $\mu b_0 = (1 - \theta)\lambda_0 a$, то, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} h_j(\omega, z) = (\lambda_0 - \lambda_i) a \dot{f}(\omega, z). \quad (3.53)$$

Пусть теперь

$$f_i(\omega, z, \theta) = f(\omega, z) + h_i(\omega, z)\theta + g_i(\omega, z)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (3.54)$$

Подставляя (3.54) в (3.43), раскладывая функции $f_i(\omega, z \pm \theta x, \theta)$ по второму аргументу по малому параметру θ , ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2 , получим, учитывая (3.50) и (3.53) и переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, что

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_i a_2 + \mu b_2}{2} \ddot{f}(\omega, z) + \lambda_0 a \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) + \\ & + (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{f}_i(\omega, z) = - \sum_{j=1}^n q_{ij} g_j(\omega, z). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Наконец, умножая соотношения (3.55) на финальные вероятности π_i и учитывая соотношения (1.3) и (1.4) для финальных вероятностей будем иметь

$$\frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} \ddot{f}(\omega, z) + \lambda_0 a \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) + a \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i \dot{h}_i(\omega, z) = 0. \quad (3.56)$$

Из уравнений (3.53) следует, что функции $h_i(\omega, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} \dot{h}_j(\omega, z) = (\lambda_0 - \lambda_i) a \ddot{f}(\omega, z) \quad (3.57)$$

Откуда аналогично выводу формул (3.28) получим

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_0) \pi_k a \dot{h}_k(\omega, z) = - \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_0) \sum_{k=1}^{n-1} R_{jk} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) a^2 \ddot{f}(\omega, z).$$

Подставляя данное выражение в уравнение (3.56) получим, что функция $f(\omega, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\gamma_0 \ddot{f}(\omega, z) + \gamma_1 \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) = 0. \quad (3.58)$$

Решение уравнения (3.58) имеет вид

$$f(\omega, z) = C_1(\omega)e^{t_1(\omega)z} + C_2(\omega)e^{t_2(\omega)z}, \quad (3.59)$$

где

$$t_1(\omega) = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_0\omega}}{2\gamma_0}, \quad t_2(\omega) = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_0\omega}}{2\gamma_0}. \quad (3.60)$$

Так как $f(\omega, z)$ - производящая функция, то $|f(\omega, z)| \leq 1$ при всех $z < 0$. Поэтому в (3.59) необходимо положить $C_1(\omega) = 0$. Откуда $f(\omega, z) = C_2(\omega)e^{t_2(\omega)z}$.

Для определения $C_2(\omega)$ рассмотрим поведение $\psi_i(u, S)$ при $S = 0$. При $S = 0$ уравнение (3.41) даёт

$$(\lambda_i + \mu + u)\psi_i(u, 0) = \frac{\mu}{b_0} \int_0^\infty \psi_i(u_1 - x)\psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \sum_{\delta=1}^n q_{ij}\psi_j(u, 0) + \lambda_i.$$

Откуда функции $f_i(\omega, 0, \theta)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda_i + \mu + \theta^2\omega) f_i(\omega, 0, \theta) = \frac{\mu}{b_0} \int_0^\infty f_i(\omega_i - \theta x, \theta)\psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \sum_{\delta=1}^n q_{ij} f_j(\omega, 0, \theta) + \lambda_i. \quad (3.61)$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим отсюда, что $f(\omega, 0) = 1$, и, следовательно, $C_2(\omega) = 1$. Таким образом, $f(\omega, z) = e^{t_2(\omega)z}$. Теорема доказана. •

Из доказанного вытекает, что при $\theta \ll 1$ производящая функция

$$\psi_i(\omega, S) = e^{t_2\left(\frac{\omega}{\theta^2}\right)\theta S} + O(\theta). \quad (3.62)$$

При $S < 0$, как следует из (3.37), случайная величина S имеет плотность распределения

$$P(S|S < 0) = P(S) / \Pr\{S < 0\} = \frac{\theta\gamma_1}{\gamma_0} e^{\frac{\gamma_1\theta}{\gamma_0} S}.$$

Усредняя (3.62) по вероятностям состояний π_i и по S , получим, что безусловная производящая функция

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n \pi_i \int_{-\infty}^0 \psi_i(\omega, S) P(S|S < 0) dS = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha\omega}},$$

где

$$\alpha = \frac{4\gamma_0}{\theta^2\gamma_1^2}. \quad (3.63)$$

Откуда, вычисляя обратное преобразование Лапласа [44, 67], получим, что плотность распределения периода неплатёжеспособности имеет вид

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha t}} e^{-\frac{t}{\alpha}} - \frac{2}{\alpha} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\right). \quad (3.64)$$

3.1.4 Плотность распределения продолжительности периода повышенных выплат

Период повышенных выплат наступает, когда капитал фонда $S > S_0$. Обозначим через $t_i(S)$ продолжительность периода повышенных выплат, если в начале периода капитал фонда равен $S (S \geq S_0)$ и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Обозначим через

$$H_i(u, S) = M\{e^{-ut_i(S)}\} \quad (3.65)$$

условную производящую функцию продолжительности периода повышенных выплат.

Пусть в начале периода $\lambda(t) = \lambda_i$. За малое время Δt происходят следующие события: капитал фонда меняется на случайную величину ΔS , а интенсивность потока $\lambda(t)$ либо остаётся неизменной с вероятностью $1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$, либо принимает значение λ_j с вероятностью $q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$. Поэтому

$$t_i(S) = \Delta t + (1 + q_{ii}\Delta t)t_i(S + \Delta S) + \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t t_j(S + \Delta S) + o(\Delta t)$$

и

$$H_i(u, S) = e^{-u\Delta t} [(1 + q_{ii}\Delta t)M_{\Delta S}\{H_i(u, S + \Delta S)\} + \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t M_{\Delta S}\{H_j(u, S + \Delta S)\}] + o(\Delta t). \quad (3.66)$$

Усредняя (3.66) по ΔS , получим, отбрасывая члены, имеющие порядок $o(\Delta t)$, и учитывая, что при $S < S_0$ период повышенных выплат заканчивается и, следовательно, $t_i(S) = 0$, что

$$H_i(u, S) = e^{-u\Delta t} [(1 + q_{ii} - \lambda_i - \mu)\Delta t H_i(u, S) + \lambda_i \Delta t \int_0^{\infty} H_i(u, S + x) \varphi(x) dx + \frac{\mu}{b_1} \int_0^{S-S_0} H_i(u, S - x) \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx + \frac{\mu}{b_1} \int_{S-S_0}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx + \sum_{j \neq i} q_{ij} \Delta t H_j(u, S)] + o(\Delta t). \quad (3.67)$$

Наконец, переходя в (3.67) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, что производящие функции $H_i(u, S)$ должны удовлетворять уравнениям

$$(\lambda_i + \mu + u)H_i(u, S) - \sum_{j=1}^n q_{ij} H_j(u, S) = \lambda_i \int_0^{\infty} H_i(u, S + x) \varphi(x) dx + \frac{\mu}{b_1} \int_0^{S-S_0} H_i(u, S - x) \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx + \frac{\mu}{b_1} \int_{S-S_0}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx. \quad (3.68)$$

Решение уравнений (3.68) будем искать в виде

$$H_i(u, S) = f_i\left(\frac{u}{\theta^2}, \theta S, \theta\right), \quad (3.69)$$

где функции $f_i(\omega, z, \theta)$ предполагаются дважды дифференцируемыми по z и θ и равномерно непрерывными по ω . Подставляя выражения (3.69) в уравнения (3.68) и делая замену переменных $\omega = \frac{u}{\theta^2}$, $z = \theta S$, получим, положив $z_0 = \theta S_0$,

$$(\lambda_i + \mu + \theta^2 \omega) f_i(\omega, z, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(\omega, z, \theta) = \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(\omega, z + \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \frac{\mu}{b_1} \int_0^{\infty} f_i(\omega, z - \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx + R_i(\theta), \quad (3.70)$$

где

$$R_i(\theta) = \frac{\mu}{b_1} \int_{\frac{z-z_0}{\theta}}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx - \frac{\mu}{b_1} \int_{\frac{z-z_0}{\theta}}^{\infty} f_i(\omega, z - \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) dx.$$

Так как при любом $z > z_0$ и $\theta \ll 1$ $R_i(\theta) = o(\theta^2)$, то в дальнейшем слагаемое $R_i(\theta) = o(\theta^2)$ в (3.70) учитываться не будет.

Теорема 3.3. При $\theta \ll 1$

$$f_i(\omega, z, \theta) = e^{-t_2(\omega)(z-z_0)} + O(\theta), \quad (3.71)$$

где $t_2(\omega)$ определяется соотношением (3.46), а γ_1, γ_0 соотношениями (3.47) и (3.48) соответственно.

Доказательство. Доказательство теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.2. Аналогично предыдущему можно показать, что при $\theta \ll 1$ решения уравнений (3.70) имеют вид

$$f_i(\omega, z, \theta) = f(\omega, z) + O(\theta),$$

где функция $f(\omega, z)$ является решением уравнения

$$\gamma_0 \ddot{f}(\omega, z) - \gamma_1 \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) = 0.$$

Или

$$f(\omega, z) = C_1(\omega)e^{-t_1(\omega)z} + C_2(\omega)e^{-t_2(\omega)z}.$$

Так как $f(\omega, z)$ - производящая функция, то $|f(\omega, z)| \leq 1$ при всех $z \geq z_0$. Поэтому необходимо положить $C_1(\omega) = 0$. Откуда

$$f(\omega, z) = C_2(\omega)e^{-t_2(\omega)z}.$$

Для определения $C_2(\omega)$ рассмотрим поведение $H_i(u, S)$ при $S = S_0$. При $S = S_0$ уравнение (3.68) даёт

$$(\lambda_i + \mu + u)H_i(u, S_0) - \sum_{j=1}^n q_{ij}H_j(u, S_0) = \lambda_i \int_0^{\infty} H_i(u, S_0 + x)\varphi(x)dx + \mu.$$

Откуда при $z = z_0$

$$(\lambda_i + \mu + \theta^2\omega) f_i(\omega, z_0, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(\omega, z_0, \theta) = \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(\omega, z_0 + \theta x, \theta)\varphi(x)dx + \mu.$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим отсюда, что $f(\omega, z_0) = 1$ и, следовательно, $C_2(\omega) = e^{t_2(\omega)z_0}$. Таким образом,

$$f(\omega, z) = e^{-t_2(\omega)(z-z_0)},$$

что и доказывает теорему. •

Из доказанного вытекает, что при $\theta \ll 1$ условная производящая функция

$$H_i(u, S) = e^{-t_2\left(\frac{u}{\theta^2}\right)\theta(S-S_0)} + O(\theta) \quad (3.72)$$

При $S > S_0$ случайная величина S , как следует из (3.37), имеет распределение

$$P(S / S > S_0) = \frac{P(S)}{\Pr\{S > S_0\}} = \frac{\theta \gamma_1}{\gamma_0} e^{-\frac{\theta \gamma_1}{\gamma_0}(S - S_0)}.$$

Усредняя (3.72) по вероятностям состояний π_i и по S , получим, что безусловная производящая функция

$$H(S) = \sum_{i=1}^n \pi_i \int_{S_0}^{\infty} H_i(\omega, S) P(S | S > S_0) ds = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + d\omega}}, \quad (3.73)$$

где α определяется формулой (3.63). Откуда плотность распределения периода повышенных выплат

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi \alpha t}} e^{-\frac{t}{\alpha}} - \frac{2}{\alpha} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\right). \quad (3.74)$$

Совпадение выражений для плотностей распределения продолжительностей периодов неплатежеспособности и повышенных выплат объясняется тем, что был рассмотрен симметричный случай, определяемый соотношениями (3.7).

3.2. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при пуассоновском потоке поступающих платежей и релейно-гистерезисном управлении выплатами

3.2.1. Модель изменения капитала фонда

В отличие от модели, исследованной выше, в данном разделе рассматривается следующий вариант изменения капитала фонда:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и вторым моментом $M\{x^2\} = a_2$.

2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что расходование денежных средств происходит непрерывно во времени со ско-

ростью $b(S)$, где S - капитал фонда в текущий момент времени, так что за малое время Δt выплата составляет $b(S)\Delta t$. Предполагается, что функция $b(S)$ определяется следующим образом. Устанавливается два пороговых значения капитала S_1 и S_2 , где $S_1 < S_2$. В области $S < S_1$ $b(S) = b_0$, в области $S > S_2$ $b(S) = b_1$. Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$b_0 < \lambda a, \quad b_1 > \lambda a. \quad (3.75)$$

В области же $S_1 \leq S \leq S_2$ устанавливается $b(S) = b_0$ либо $b(S) = b_1$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошёл в эту область. Если он вошёл в неё через порог S_1 снизу вверх, то остаётся $b(S) = b_0$, если же он вошёл в эту область через порог S_2 сверху вниз, то остаётся $b(S) = b_1$. Таким образом, значение $b(S) = b_1$, устанавливается при достижении капиталом $S(t)$ значения S_2 и оканчивается при уменьшении капитала до значения S_1 . Следуя [50], такой алгоритм управления капиталом фонда назовём релейно-гистерезисным. Область $S_1 \leq S \leq S_2$ и представляет собой область гистерезиса в управлении капиталом.

Возможная реализация изменения капитала фонда $S(t)$, полученная с помощью имитационного моделирования приведена на рисунке 3.1. Поступления имеют экспоненциальное распределение со средним значением $a=1$. Параметры $\lambda=1$, $b_0 = (1-\theta)\lambda a$, $b_1 = (1+\theta)\lambda a$, $\theta=0.1$. Пороги $S_1 = S_2 = 0$.

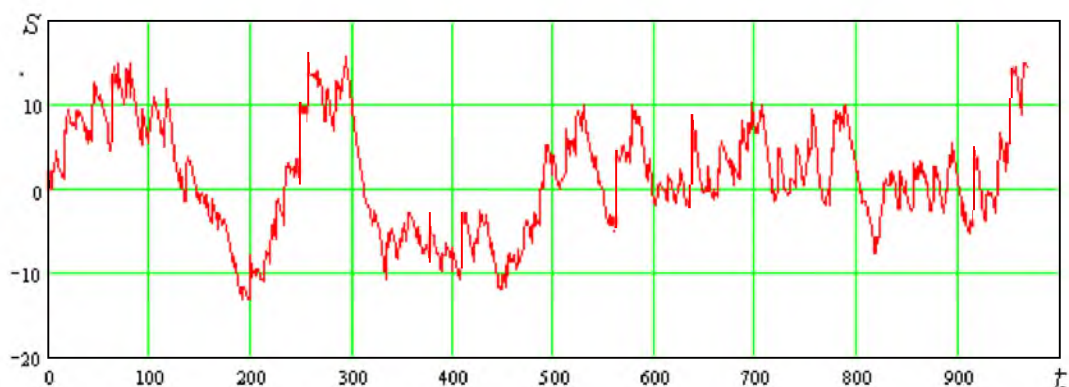


Рис.3.1 – Реализация изменения капитала фонда при $a=1$ и $\theta=0.1$.

3.2.2 Плотность распределения капитала фонда

Выпишем уравнения, определяющие плотность вероятностей $P(S)$ величины капитала S фонда во всех областях в стационарном режиме. Так как сумма поступающих премий представляет собой сложно-пуассоновский процесс [84], то процесс изменения капитала в каждой области есть сумма линейной составляющей и сложно-пуассоновского процесса. Поэтому плотность $P(S)$ существует и может иметь разрывы лишь в точках S_1, S_2 . Перенесём для удобства начало отсчета в точку $S = S_1$ и обозначим $S_0 = S_2 - S_1$. При этом нижний порог $S_1 = 0$.

Начнём с области $S < 0$. В этой области плотность вероятностей $P(S)$ будем обозначать как $P_0(S)$. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. За время Δt с капиталом фонда могли произойти следующие изменения. С вероятностью $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ премии в фонд не поступали и, следовательно, капитал фонда уменьшился на величину $b_0\Delta t$. С вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ в фонд поступила случайная премия x и капитал фонда увеличился на величину $x - b_0\Delta t$. Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$. Откуда по формуле полной вероятности получим, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$,

$$b_0 \dot{P}_0(S) = \lambda P_0(S + b_0\Delta t) + \lambda \Delta t \int_0^{\infty} P_0(S - x) \varphi(x) dx. \quad (3.76)$$

Решение уравнения (3.76) должно удовлетворять очевидному граничному условию $P_0(-\infty) = 0$.

Перейдем к рассмотрению области $0 \leq S \leq S_0$. Здесь возможны два варианта $b(S) = b_0$ и $b(S) = b_1$. Рассмотрим сначала случай, когда $b(S) = b_0$. Обозначим

$$g_0(S) = \Pr\{S < S(t) \leq S + dS, b(S) = b_0\} / dS.$$

Значение капитала S в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся $S + b_0\Delta t$ и за время Δt премии не поступали. В момент времени t капитал фонда рав-

нялся $S + b_0\Delta t - x > 0$ и за время Δt поступила случайная премия x . Выписывая вероятности соответствующих событий, по формуле полной вероятности получим

$$g_0(S) = (1 - \lambda\Delta t)g_0(S + b_0\Delta t) + \lambda\Delta t \int_0^S g_0(S - x)\varphi(x)dx + \\ + \lambda\Delta t \int_S^\infty P_0(S - x)\varphi(x)dx + o(\Delta t). \quad (3.77)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, будем иметь

$$b_0 \dot{g}_0(S) = \lambda g_0(S) - \lambda \int_0^S g_0(S - x)\varphi(x)dx - \lambda \int_S^\infty P_0(S - x)\varphi(x)dx. \quad (3.78)$$

Решение уравнения (3.78) должно удовлетворять граничному условию

$$g_0(S_0) = 0, \quad (3.79)$$

которое вытекает из того, что при $b(S) = b_0$ на границу $S = S_0$ возможны переходы только снизу и, следовательно, при $S = S_0$ в правой части соотношения (3.77) отсутствует первое слагаемое.

Рассмотрим теперь случай, когда $b(S) = b_1$. Обозначим

$$g_1(S) = \Pr\{S < S(t) \leq S = dS, b(S) = b_1\} / dS.$$

В этом случае значение капитала S в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся $S + b_1\Delta t$ и за время Δt премии не поступали. В момент времени t капитал фонда равнялся $S + b_1\Delta t - x > 0$ и за время Δt поступила случайная премия x . Выписывая вероятности соответствующих событий, по формуле полной вероятности получим, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$,

$$b_1 \dot{g}_1(S) = \lambda g_1(S) - \lambda \int_0^S g_1(S - x)\varphi(x)dx. \quad (3.80)$$

Рассмотрим, наконец, область $S > S_0$. Обозначим в этой области плотность распределения вероятностей $P(S)$ как $P_2(S)$. В этом случае значение капитала S в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся $S + b_1\Delta t$ и за время Δt премии не поступали. В момент времени t капитал фонда

равнялся $S + b_1\Delta t - x$ и за время Δt поступила случайная премия x . Так как при этом $S + b_1\Delta t - x$ может принадлежать одной из трех областей $(-\infty, 0)$, $(0, S_0)$, $(S_0, S + b_1\Delta t)$, то после предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$b_1 \dot{P}_2(S) = \lambda P_2(S) - \lambda \int_0^{S-S_0} P_2(S-x)\varphi(x)dx - \lambda \int_{S-S_0}^S [g_0(S-x) + g_1(S-x)]\varphi(x)dx - \lambda \int_S^\infty P_0(S-x)\varphi(x)dx. \quad (3.81)$$

Функция $P_2(S)$ должна удовлетворять очевидному условию $P_2(+\infty) = 0$ и условию

$$P_2(S_0) = g_1(S_0), \quad (3.82)$$

так как на границе $S = S_0$ имеем, очевидно, что

$$g_1(S_0) = (1 - \lambda\Delta t)P_2(S_0 + b_1\Delta t) + \alpha(\Delta t).$$

Решение системы уравнений (3.76), (3.78), (3.80), (3.81) должно удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^0 P_0(S)dS + \int_0^{S_0} [g_0(S) + g_1(S)]ds + \int_{S_0}^\infty P_2(S)dS = 1. \quad (3.83)$$

Наконец, для получения условия сшивания решений на границе $S = 0$ поступим следующим образом. Проинтегрируем уравнения (3.76), (3.78), (3.80), (3.81) по области их определения и сложим полученные уравнения. С учётом условия нормировки (3.83) и условий $g_0(S_0) = 0$, $g_1(S_0) = P_2(S_0)$ получим, что

$$b_0 P_0(0) = b_0 g_0(0) + b_1 g_1(0). \quad (3.84)$$

Таким образом, в точке $S = 0$ плотность распределения $P(S)$ имеет разрыв первого рода.

3.2.3 Экспоненциальное распределение премий

В случае, когда распределение поступающих денежных сумм (премий) является экспоненциальным

$$\varphi(S) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{S}{a}\right)$$

может быть найдено точное решение системы уравнений (3.76), (3.78), (3.80), (3.81).

Теорема 3.4. При экспоненциальном распределении премий плотность распределения капитала фонда имеет вид

$$P(S) = \begin{cases} B \left(\frac{\lambda a}{b_0} - e^{-\omega_0(S_2 - S_1)} \right), & S < S_1, \\ B \left(1 - e^{\omega_0(S - S_2)} \right) + B \frac{b_0 \omega_0}{b_1 \omega_1} \left(1 - \frac{\lambda a}{b_1} e^{-\omega_1(S - S_1)} \right), & S_1 \leq S \leq S_2, \\ B \frac{b_0 \omega_0}{b_1 \omega_1} \left(e^{\omega_1(S_2 - S_1)} - \frac{\lambda a}{b_1} \right) e^{-\omega_1(S - S_1)}, & S > S_2, \end{cases} \quad (3.85)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\lambda a - b_0}{ab_0}, \quad \omega_1 = \frac{b_1 - \lambda a}{ba} \quad (3.86)$$

и

$$B = \frac{(b_1 - \lambda a)}{(b_1 - b_0)(S_0 + a)}. \quad (3.87)$$

Доказательство. Уравнение (3.76) в нашем случае переходит в уравнение

$$b_0 \dot{P}_0(S) = \lambda P_0(S) - \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_{-\infty}^S P_0(x) e^{\frac{x}{a}} dx, \quad (3.88)$$

продифференцировав которое, получим

$$\ddot{P}_0(S) - \omega_0 \dot{P}_0(S) = 0, \quad (3.89)$$

где ω_0 определяется первой формулой (3.86). Откуда с учётом граничного условия $P_0(-\infty) = 0$ получим

$$P_0(S) = A e^{\omega_0 S}. \quad (3.90)$$

Уравнение (3.78) переходит в уравнение

$$b_0 \dot{g}_0(S) = \lambda g_0(S) - \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_0^S g_0(x) e^{\frac{x}{a}} dx - \lambda \int_{-\infty}^0 P_0(x) \frac{1}{a} e^{-\frac{S-x}{a}} dx, \quad (3.91)$$

продифференцировав которое, получим

$$\ddot{g}_0(S) - \omega_0 \dot{g}_0(S) = 0. \quad (3.92)$$

Откуда

$$g_0(S) = B + B_2 e^{\omega_0 S}. \quad (3.93)$$

Граничное условие (3.79) $g_0(S_0) = 0$ даёт $B_2 = B e^{-\omega_0 S_0}$ и, таким образом,

$$g_0(S) = B(1 - e^{\omega_0(S-S_0)}). \quad (3.94)$$

Решение (3.94) должно удовлетворять исходному уравнению (3.91). Подставляя (3.90) и (3.94) в уравнение (3.91), получаем условие, связывающее постоянные A и B

$$A = B \left(\frac{\lambda a}{b_0} - e^{-\omega_0 S_0} \right). \quad (3.95)$$

Уравнение (3.80) переходит в уравнение

$$b_1 \dot{g}_1(S) = \lambda g_1(S) - \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_0^S g_1(x) e^{\frac{x}{a}} dx, \quad (3.96)$$

которое дифференцированием сводится к уравнению

$$\ddot{g}_1(S) + \omega_1 \dot{g}_1(S) = 0, \quad (3.97)$$

где ω_1 определяется второй формулой (3.86). Откуда

$$g_1(S) = C + C_2 e^{-\omega_1 S}. \quad (3.98)$$

Решение (3.98) должно удовлетворять исходному уравнению (3.96). Подставляя (3.98) в (3.96), получим условие, связывающее постоянные C и C_2 ,

$$C_2 = -\frac{\lambda a}{b_1} C. \text{ Откуда}$$

$$g_1(S) = C \left(1 - \frac{\lambda a}{b_1} e^{-\omega_1 S} \right). \quad (3.99)$$

Условие сшивания (3.84) на границе $S=0$ и соотношения (3.90), (3.94), (3.95), (3.99) дают связь между постоянными B и C

$$B b_0 \omega_0 = C b_1 \omega_1. \quad (3.100)$$

Наконец, уравнение (3.81) в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned}
b_1 \dot{P}_2(S) &= \lambda P_2(S) - \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_{S_0}^S P_2(x) e^{\frac{x}{a}} dx - \\
& - \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_0^{S_0} [g_0(x) + g_1(x)] e^{\frac{x}{a}} dx - \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_{-\infty}^0 P_0(x) e^{\frac{x}{a}} dx.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Откуда

$$\ddot{P}_2(S) + \omega_1 \dot{P}_1(S) = 0.$$

И с учётом граничного условия $P_2(+\infty) = 0$ получаем

$$P_2(S) = D e^{-\omega_1 S}. \tag{3.102}$$

Условие сшивания на границе $S = S_0$ $g_2(S_0) = P_2(S_0)$ даёт

$$D = C \left(e^{\omega_1 S_0} - \frac{\lambda a}{b_1} \right). \tag{3.103}$$

Таким образом, получаем, что функции

$$\begin{aligned}
P_0(S) &= B \left(\frac{\lambda a}{b_0} - e^{-\omega_0 S_0} \right) e^{\omega_0 S}, & g_0(S) &= B(1 - e^{\omega_0(S - S_0)}), \\
g_1(S) &= B \frac{b_0 \omega_0}{b_1 \omega_1} \left(1 - \frac{\lambda a}{b_1} e^{-\omega_1 S} \right), & P_2(S) &= B \frac{b_0 \omega_0}{b_1 \omega_1} \left(e^{\omega_1 S_0} - \frac{\lambda a}{b_1} \right) e^{-\omega_1 S}.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Постоянная B определяется теперь из условия нормировки (3.83). Подставляя (3.104) в условие нормировки (3.83) получим, что постоянная B определяется соотношением (3.87). Переходя к старому началу координат, окончательно получим, что плотность распределения капитала имеет вид (3.85). Теорема доказана. •

Графики плотности распределения $P(S)$, построенные по формулам (3.85) приведены на рисунке 3.2. Параметры: $a = 1, \lambda = 3, S_2 = 5a, S_1 = 0, b_0 = (1 - \theta)\lambda a, b_1 = (1 + \theta)\lambda a$. Параметр $\theta = 0.05; 0.1; 0.2$.

В области $S_1 \leq S \leq S_2$ функция $P(S)$, как следует из (3.85) имеет максимум в точке $S = S_0 \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \ln \frac{\lambda a b_0}{b_1^2}$ или иначе в точке

$$S = S_0 \frac{1 + \theta}{2} + \ln \frac{(1 - \theta)}{(1 + \theta)^2}. \tag{3.105}$$

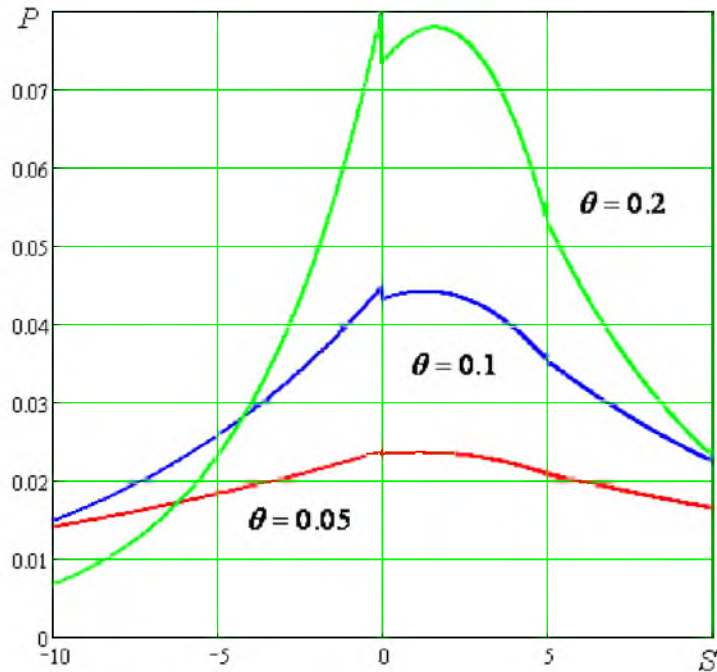


Рис. 3.2. – Плотность распределения капитала фонда

Зная плотность распределения капитала фонда, можно найти такие его характеристики как вероятности неплатёжеспособности и повышенных выплат, плотности распределения периода неплатёжеспособности и периода повышенных выплат.

Неплатёжеспособность фонда наступает тогда, когда его капитал становится отрицательным. Поэтому вероятность неплатёжеспособности фонда

$$P_n = \int_{-\infty}^0 P(S) dS = \frac{B}{\omega_0} \left(\frac{\lambda a}{b_0} e^{-\omega_0 S_1} - e^{-\omega_0 S_2} \right). \quad (3.106)$$

Повышенные выплаты фонд производит в двух случаях. Либо когда капитал фонда $S > S_2$, либо при $S_1 \leq S \leq S_2$, когда траектория изменения капитала, начавшись при $S = S_2$, ещё не достигла значения S_1 . Поэтому вероятность повышенных выплат

$$P_n = \int_{S_2}^{\infty} P(S) dS + \int_{S_1}^{S_2} g_2(S) dS = \frac{\lambda a - b_0}{b_1 - b_0}. \quad (3.107)$$

Как следует из соотношения (3.107), вероятность P_n не зависит от порогов алгоритма.

3.2.4 Плотность распределения капитала фонда при произвольном распределении премий

При произвольном распределении премий $\varphi(x)$ получить точное решение систем уравнений (3.76), (3.78), (3.80), (3.81) не удаётся. Однако, в этом случае можно построить приближённое решение уравнений, вводя, как и во всех предыдущих случаях, рассмотренных в диссертации, малый параметр. Введём параметр θ , где $0 < \theta < 1$, и будем считать, что

$$b_0 = (1 - \theta)\lambda a, \quad b_1(1 + \theta)\lambda a. \quad (3.108)$$

Рассмотрим, далее, асимптотический случай, когда $\theta \ll 1$. Практически это означает, что при любом значении капитала S фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом естественно считать, что пороги S_1 и S_2 , определяющие гистерезисное управление капиталом, зависят от θ . Более точно будем считать, что при $\theta \rightarrow 0$ разность порогов $S_0(\theta) = S_2(\theta) - S_1(\theta) \rightarrow \infty$, но существует конечный предел $z_0 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta S_0(\theta)$. Ниже считается, что функция $P(S)$ по крайней мере дважды дифференцирована, за исключением точек $S = S_1, S_2$.

Теорема 3.5. При $\theta \ll 1$

$$P(S) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\theta\omega_0(S_2 - S_1)}}{2(S_2 - S_1)} e^{\theta\omega_0(S - S_1)} + o(\theta), & S < S_1, \\ \frac{2 - e^{-\theta\omega_0(S - S_1)} - e^{\theta\omega_0(S - S_2)}}{2(S_2 - S_1)} + o(\theta), & S_1 \leq S \leq S_2, \\ \frac{1 - e^{-\theta\omega_0(S_2 - S_1)}}{2(S_2 - S_1)} e^{-\theta\omega_0(S - S_2)} + o(\theta), & S > S_2, \end{cases} \quad (3.109)$$

где

$$\omega_0 = \frac{2a}{a_2}. \quad (3.110)$$

Доказательство. Опять для удобства перенесём начало отсчёта в точку $S = S_1$ и рассмотрим в начале область $S < 0$. Решение уравнения (3.76) в этой области будем искать в виде

$$P_0(S) = \theta f_0(\theta S, \theta), \quad (3.111)$$

где $f_0(z, \theta)$ - некоторая дважды дифференцируемая по z и равномерно непрерывная по θ функция. Подставляя (3.111) в (3.76) получим, делая замену переменных $\theta S = z$, что функция $f_0(z, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta b_0 \dot{f}_0(z, \theta) = \lambda f_0(z, \theta) - \lambda \int_0^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx.$$

Раскладывая функцию $f_0(z - \theta x, \theta)$ в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим, учитывая первое соотношение (3.108), что

$$\ddot{f}_0(z, \theta) - \omega_0 \dot{f}_0(z, \theta) + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0,$$

где ω_0 определяется формулой (3.110).

Обозначим

$$f_0(z) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f_0(z, \theta). \quad (3.112)$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим уравнение относительно $f_0(z)$

$$\ddot{f}_0(z) - \omega_0 f_0(z) = 0. \quad (3.113)$$

Откуда

$$f_0(z) = A_1 + A_2 e^{\omega_0 z}. \quad (3.114)$$

С учётом граничного условия $P_0(-\infty) = 0$ будем иметь, что

$$f_0(z) = A e^{\omega_0 z}, \quad (3.115)$$

где константа A определяется условиями сшивания.

Рассмотрим теперь область $0 \leq S \leq S_0$. Решение уравнения (3.78) в этой области будем искать в виде

$$g_0(S) = \theta \psi_0(\theta S, \theta), \quad (3.116)$$

где функция $\psi_0(z, \theta)$ считается дважды дифференцируемой по z и равномерно непрерывной по θ . Подставляя (3.116) и (3.111) в уравнение (3.78), получим после замены переменных $\theta S = z$

$$\begin{aligned} \theta b_0 \dot{\psi}_0(z, \theta) &= \lambda \psi_0(z, \theta) - \lambda \int_0^{\infty} \psi_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \\ &+ \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Раскладывая функцию $\psi_0(z - \theta x, \theta)$ в ряд по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{2} \ddot{\psi}_0(z, \theta) - a \dot{\psi}_0(z, \theta) + \frac{\lambda}{\theta^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \\ - \frac{\lambda}{\theta^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \frac{\alpha(\theta^2)}{\theta^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Функция $\psi_0(z, \theta)$ является дифференцируемой, и, следовательно, ограниченной. Поэтому При $z \neq 0$

$$\frac{1}{\theta^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi_0(z - \theta x) \varphi(x) dx \leq \max \psi_0(y, \theta) \frac{1}{z^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \varphi(x) dx \leq \max \psi_0(y, \theta) \frac{1}{z^2} \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,$$

так как второй момент $M\{x^2\} = a_2$ по условию существует. Аналогично может быть оценен второй интеграл, входящий в (3.117).

Обозначим

$$\psi_0(z) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \psi_0(z, \theta). \quad (3.118)$$

Переходя в (3.117) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим уравнение относительно функции $\psi_0(z)$

$$\ddot{\psi}_0(z) - \omega_0 \dot{\psi}_0(z) = 0. \quad (3.119)$$

Откуда

$$\psi_0(z) = B_1 + B_2 e^{\omega_0 z}.$$

Граничное условие $g_0(S_0) = 0$ даёт теперь $\psi_0(z_0) = 0$. Поэтому

$$\psi_0(z) = B(1 - e^{\omega_0(z-z_0)}). \quad (3.120)$$

При выводе уравнения ((3.119) неявно предполагалось, что $S \neq 0$. Пусть теперь $S = 0$. Тогда из уравнения (3.78) получим

$$\theta b_0 \dot{\psi}_0(0, \theta) = \lambda \psi_0(0, \theta) - \lambda \int_0^{\infty} f_0(-\theta x, \theta) \varphi(x) dx. \quad (3.121)$$

После предельного перехода при $\theta \rightarrow 0$ получим отсюда, что $\psi_0(0) = f_0(0)$.

Откуда находим связь между константами A и B .

$$A = B(1 - e^{-\omega_0 z_0}). \quad (3.122)$$

Решение уравнения (3.80) относительно функции $g_1(S)$ будем искать в виде

$$g_1(S) = \theta \psi_1(\theta S, \theta). \quad (3.123)$$

Функция $\psi_1(z, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta b_1 \dot{\psi}_1(z, \theta) = \lambda \psi_1(z, \theta) - \lambda \int_0^{\frac{z}{\theta}} \psi_1(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx.$$

Опять, считая функцию $\psi_1(z, \theta)$ дважды дифференцируемой по z и равномерно непрерывной по θ , раскладывая в уравнении подынтегральное выражение в ряд по первому аргументу и обозначая

$$\psi_1(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \psi_1(z, \theta),$$

получим после предельного перехода при $\theta \rightarrow 0$ уравнение относительно $\psi_1(z)$

$$\ddot{\psi}_1(z) + \omega_0 \dot{\psi}_1(z) = 0,$$

решение, которого имеет вид

$$\psi_1(z) = C + C_2 e^{-\omega_0 z}.$$

Условие сшивания (3.84) на границе $S = 0$ принимает в нашем случае вид

$$(1 - \theta) \lambda a f_0(0, \theta) = (1 - \theta) \lambda a \psi_0(0, \theta) = (1 + \theta) \lambda a \psi_1(0, \theta).$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$f_0(0) = \psi_0(0) + \psi_1(0).$$

Так как $f_0(0) = \psi_0(0)$, то условие сшивания решений на границе $S = 0$ даёт теперь $\psi_1(0) = 0$. Откуда $C_2 = -C$ и

$$\psi_1(z) = C(1 - e^{-\omega_0 z}).$$

Рассмотрим, наконец, область $S > S_0$. В ней плотность распределения капитала фонда должна удовлетворять уравнению (3.81). Решение уравнения (3.81) будем искать в виде

$$P_2(S) = \theta f_2(\theta S, \theta), \quad (3.124)$$

где функция $f_2(z, \theta)$ будет очевидно, удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \theta b_1 \dot{f}_2(z, \theta) = \lambda f_2(z, \theta) - \lambda \int_0^{\frac{z-z_0}{\theta}} f_2(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \\ - \lambda \int_{\frac{z-z_0}{\theta}}^{\frac{z}{\theta}} [\psi_0(z - \theta x, \theta) + \psi_1(z - \theta x, \theta)] \varphi(x) dx - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Опять, считая функцию $f_2(z, \theta)$, дважды дифференцируемой по z и равномерно непрерывной по θ , раскладывая подынтегральные функции в ряд по первому аргументу и переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, в конце концов, уравнение относительно

$$f_2(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_2(z, \theta), \quad (3.125)$$

в области $z > z_0$, где $z_0 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta S_0$,

$$\ddot{f}_2(z) + \omega_0 \dot{f}_2(z) = 0.$$

Откуда

$$f_2(z) = D_1 + D_2 e^{-\omega_0 z}.$$

Граничные условия $P_2(+\infty) = 0$ и $P_2(S_0) = g_1(S_0)$ дают теперь $f_2(+\infty) = 0$ и $f_2(z_0) = \psi_1(z_0)$. Поэтому

$$f_2(z) = C(1 - e^{-\omega_0 z_0}) e^{-\omega_0(z-z_0)}. \quad (3.126)$$

Для определения связи между константами B и C рассмотрим уравнения (3.78), (3.80), (3.81) при $S = S_0$. Сравнивая уравнения, получим, что при $S = S_0$ должно выполняться условие

$$b_1 \dot{P}_2(S_0) = b_1 \dot{g}_1(S_0) + b_0 \dot{g}_0(S_0),$$

которое при $\theta \rightarrow 0$ даёт

$$\dot{f}_2(z_0) = \dot{\psi}_1(z_0) + \psi_2(z_0).$$

Откуда следует, что $C = B$.

Наконец, из условия нормировки (3.83) при $\theta \rightarrow 0$ получим

$$\int_{-\infty}^0 f_0(z) dz + \int_0^{z_0} [\psi_0(z) + \psi_1(z)] dz + \int_{z_0}^{+\infty} f_2(z) dz = 1.$$

Откуда

$$B = \frac{1}{2z_0}. \quad (3.127)$$

Таким образом, получаем, что искомые функции равны

$$f_0(z) = \frac{1 - e^{-\omega_0 z_0}}{2z_0} e^{\omega_0 z}, \quad z < 0, \quad (3.128)$$

$$\psi_0(z) = \frac{1 - e^{\omega_0(z-z_0)}}{2z_0}, \quad 0 \leq z \leq z_0, \quad (3.129)$$

$$\psi_1(z) = \frac{1 - e^{-\omega_0 z}}{2z_0}, \quad 0 \leq z \leq z_0, \quad (3.130)$$

$$f_2(z) = \frac{1 - e^{-\omega_0 z_0}}{2z_0} e^{-\omega_0(z-z_0)}, \quad z > z_0. \quad (3.131)$$

Откуда, учитывая (3.111), (3.116), (3.123), (3.124) получим (3.109). Теорема доказана. •

Среднее значение капитала фонда при $\theta \ll 1$ согласно (3.109) будет равно

$$M\{S\} = \int_{-\infty}^{\infty} SP(S) dS = \frac{S_2 - S_1}{2}$$

и не зависят от других параметров. Таким образом, при $\theta \ll 1$ желательного значения среднего капитала можно добиться, выбирая пороги алгоритма.

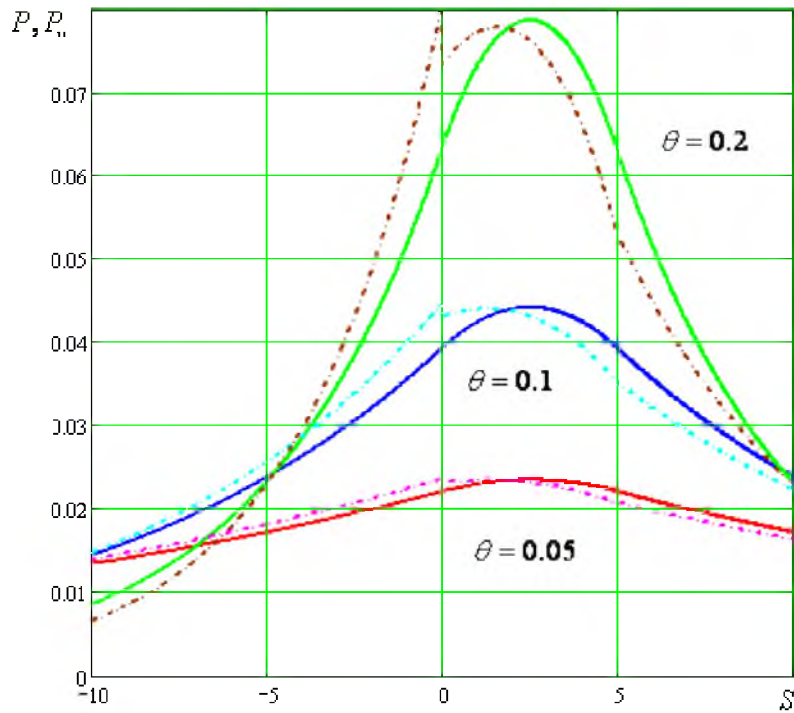


Рис. 3.3. – Плотность распределения капитала и ее аппроксимация

На рис. 3.3 приведены графики аппроксимации плотности распределения $P(S)$, построенной по формулам (3.109) (сплошные линии), и истинной плотности распределения $P_u(S)$ (3.85) для случая экспоненциального распределения поступлений. Параметры: $a=1, \lambda=3, S_2=5a, S_1=0$.

Построенная аппроксимация (3.109) плотности распределения капитала может быть улучшена за счёт учёта дополнительных членов разложения функций $f_i(z, \theta)$ и $\psi_i(z, \theta)$ в ряд по степеням θ . Так как в общем случае получаются довольно громоздкие выражения для коэффициентов, то приведем вывод только для случая релейного управления капиталом, то есть будем считать, что порог $S_2 = S_1 = 0$, что всегда можно обеспечить переносом начала отсчета. Функции $f_0(z)$ (3.128) и $f_2(z)$ (3.131) при этом имеют вид

$$f_0(z) = \frac{\omega_0}{2} e^{\omega_0 z}, \quad f_2(z) = \frac{\omega_0}{2} e^{-\omega_0 z}.$$

Будем также считать, что для плотности распределения $\varphi(x)$ существует третий момент $M\{x^3\} = a_3$.

Начнем с рассмотрения области $z < 0$ и функции $f_0(z, \theta)$. Будем теперь искать ее в виде

$$f_0(z, \theta) = f_0(z) + \theta \bar{f}_0(z, \theta). \quad (3.132)$$

Подставляя выражение (3.132) в уравнение (3.76), получим после замены переменной $\theta s = z$

$$b_0 \theta (\dot{f}_0(z) + \theta \dot{\bar{f}}_0(z, \theta)) = \lambda (f_0(z) + \theta \bar{f}_0(z, \theta)) - \lambda \int_0^{\infty} (f_0(z - \theta x) + \theta \bar{f}_0(z - \theta x, \theta)) \varphi(x) dx.$$

Раскладывая подинтегральные функции в ряд Тейлора с точностью до $\alpha(\theta^3)$ и учитывая, что $f_0(z)$ удовлетворяет уравнению (3.113), будем иметь

$$\ddot{\bar{f}}_0(z, \theta) - \omega_0 \dot{\bar{f}}_0(z, \theta) = \frac{a_3}{3a_2} f_0^{(3)}(z) + \frac{\alpha(\theta^3)}{\theta^3}. \quad (3.133)$$

Обозначим

$$\bar{f}_0(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \bar{f}_0(z, \theta). \quad (3.134)$$

Переходя в (3.133) к пределу при $\theta \rightarrow 0$ получим, что функция $\bar{f}_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\bar{f}}_0(z) - \omega_0 \dot{\bar{f}}_0(z) = \frac{a_3}{3a_2} f_0^{(3)}(z). \quad (3.135)$$

Решение уравнения (3.135), удовлетворяющее граничному условию $\bar{f}_0(-\infty) = 0$ имеет вид

$$\bar{f}_0(z) = Ae^{\omega_0 z} + \frac{a_3}{6a_2} \omega_0^3 ze^{\omega_0 z}. \quad (3.136)$$

Рассмотрим теперь область $z > 0$. Функцию $f_2(z, \theta)$ будем искать в виде

$$f_2(z, \theta) = f_2(z) + \theta \bar{f}_2(z, \theta). \quad (3.137)$$

Аналогично предыдущему можно показать, используя исходное уравнение (3.81), что функция

$$\bar{f}_2(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \bar{f}_2(z, \theta), \quad (3.138)$$

удовлетворяющая условию $\bar{f}_2(+\infty) = 0$ определяется выражением

$$\bar{f}_2(z) = Be^{-\omega_0 z} + \frac{a_3}{6a_2} \omega_0^3 ze^{-\omega_0 z}. \quad (3.139)$$

Постоянные A и B , входящие в (3.136) и (3.139), должны удовлетворять условию сшивания на границе $z=0$ (3.84), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$(1 - \theta)(f_0(0) + \theta \bar{f}_0(0)) = (1 + \theta)(f_2(0) + \theta \bar{f}_2(0)) + o(\theta).$$

Так как $f_0(0) = f_2(0) = \frac{1}{2}$, то $B = A - 1$. Наконец условие нормировки (3.83)

приводит к соотношению

$$\int_{-\infty}^0 \bar{f}_0(z) dz + \int_0^{\infty} \bar{f}_2(z) dz = 0.$$

Откуда следует, что $A = \frac{1}{2}$.

Таким образом, окончательно получаем, что

$$f_0(z) = \frac{1}{2} e^{\omega_0 z} \left(1 + \frac{a_3}{3a_2} \omega_0^3 z\right), \quad f_2(z) = \frac{1}{2} e^{-\omega_0 z} \left(-1 + \frac{a_3}{3a_2} \omega_0^3 z\right)$$

и, следовательно, плотность распределения капитала фонда имеет вид

$$P(S) = \begin{cases} \frac{\theta \omega_0}{2} e^{\theta \omega_0 S} \left(1 + \frac{\theta}{\omega_0} + \frac{a_3}{3a_2} \omega_0^3 \theta^2 S\right), & S < 0, \\ \frac{\theta \omega_0}{2} e^{-\theta \omega_0 S} \left(1 - \frac{\theta}{\omega_0} + \frac{a_3}{3a_2} \omega_0^3 \theta^2 S\right), & S > 0. \end{cases} \quad (3.140)$$

На Рис. 3.4 приведены графики плотности распределения капитала фонда $P(S)$, определяемой соотношением (3.85), и ее оценок $P^1(S)$ и $P^2(S)$, вычисленных по формулам (3.109) и (3.140) соответственно. Параметры: $\theta = 0.5, \lambda = 3, a = 1$. Как видно из рис. 3.4, введение дополнительных слагаемых в аппроксимирующие формулы позволяет естественно улучшить точность аппроксимации.

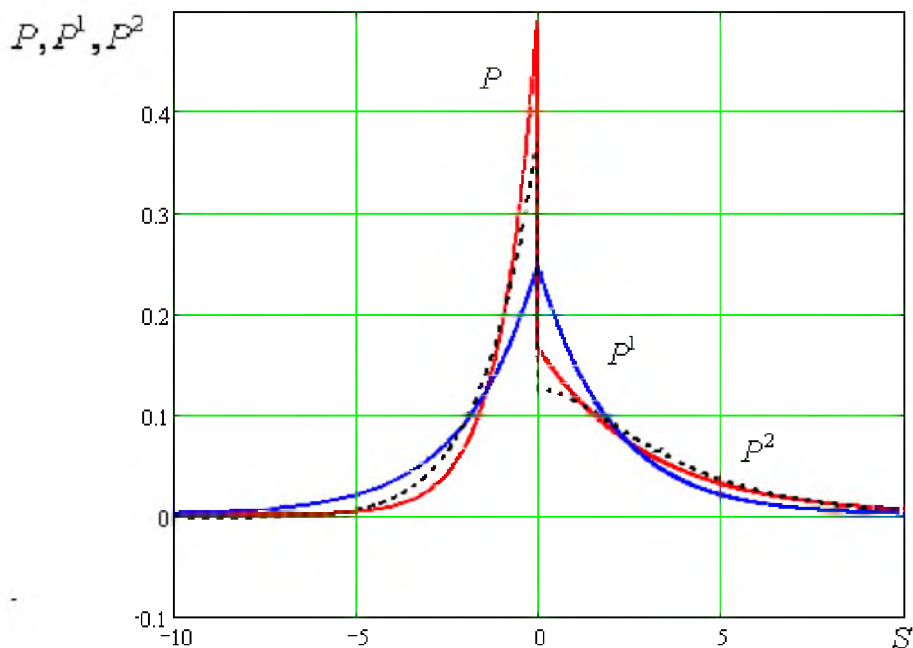


Рис. 3.4. – Плотность распределения капитала фонда и ее аппроксимации

3.3 Математическая модель деятельности некоммерческого фонда с пуассоновскими потоками поступлений и выплат и релейно-гистерезисным управлением интенсивностью выплат

3.3.1 Модель изменения капитала фонда

Обобщением рассмотренной в предыдущем параграфе модели является модель, в которой моменты выплаты денежных средств также производятся в случайные моменты времени. Ниже предполагается, что с капиталом $S(t)$ фонда могут происходить следующие изменения.

1. В фонд поступают денежные средства. Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределёнными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и вторым моментом $M\{x^2\} = a_2$.

2. Фонда расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что выплаты являются независимыми одинаково распределёнными слу-

чайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = b$ и вторым моментом $M\{x^2\} = b_2$. Моменты начисления выплат денежных средств также образуют пуассоновский поток, интенсивность которого $\mu(S)$ зависит от капитала фонда. Предполагается, что управление расходом денежных средств определяется следующим образом: устанавливаются два пороговых значения капитала S_1 и S_2 , причём $S_2 > S_1$. В области $S < S_1$ $\mu(S) = \mu_0$, в области $S > S_2$ $\mu(S) = \mu_1$. Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$\mu_0 b < \lambda a < \mu_1 b. \quad (3.141)$$

В области же $S_1 \leq S \leq S_2$ устанавливается значение $\mu(S) = \mu_0$ или $\mu(S) = \mu_1$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошёл в эту область. Если он вошёл в неё через порог S_1 снизу вверх, то остаётся $\mu(S) = \mu_0$, если же он вошёл в эту область через порог S_2 сверху вниз, то остаётся $\mu(S) = \mu_1$. Таким образом, значение $\mu(S) = \mu_1$ устанавливается при достижении капиталом $S(t)$ значения S_2 и оканчивается при уменьшении капитала до значения S_1 . Область $S_1 \leq S \leq S_2$ и представляет собой область гистерезиса в управлении капиталом.

3.3.2 Плотность распределения капитала фонда

Выпишем уравнения, определяющие плотность вероятностей $P(S)$ величины капитала фонда S во всех областях изменения капитала в стационарном режиме. Так как суммы поступающих премий и расходуемых денежных средств представляют собой сложно-пуассоновские процессы [84] в каждой из областей, то плотность $P(S)$ существует и может иметь разрывы лишь в точках S_1 и S_2 . Перенесём начало отсчёта в точку $S = -S_1$ и обозначим $S_0 = S_2 - S_1$. При этом нижний порог $S_1 = 0$.

Начнём с рассмотрения области $S > S_0$. Обозначим $P(S, t)$ плотность распределения капитала фонда S в момент времени t . Рассмотрим два близ-

ких момента времени t и $t + \Delta t$. Значение капитала S в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих случаях. В момент времени t капитал фонда равнялся S и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся, $S - x$ и за время Δt поступила случайная премия x . Вероятность этого события $\lambda \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $S + x$ и за время Δt произведена случайная выплата x . Вероятность этого события $\mu_1 \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t)$. По формуле полной вероятности будем иметь

$$P(S, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t)P(S, t) + \lambda \Delta t \int_0^{\infty} P(S - x, t) \varphi(x) dx + \\ + \mu_1 \Delta t \int_0^{\infty} P(S + x, t) \psi(x) dx + o(\Delta t).$$

Обозначая

$$P(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(S, t)$$

и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, получим, что при $S > S_0$

$$(\lambda + \mu_1)P(S) = \lambda \int_0^{\infty} P(S - x) \varphi(x) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} P(S + x) \psi(x) dx. \quad (3.142)$$

Решение уравнения (3.142) должно удовлетворять граничному условию $P(+\infty) = 0$.

Перейдём к рассмотрению области $0 \leq S \leq S_0$. Здесь возможны два варианта $\mu(S) = \mu_0$ и $\mu(S) = \mu_1$. Обозначим через $g_0(S)$ и $g_1(S)$ плотности распределения капитала фонда в стационарном режиме

$$g_0(S) = \Pr\{S < S(t) \leq S + dS, \mu(S) = \mu_0\} / dS, \\ g_1(S) = \Pr\{S < S(t) \leq S + dS, \mu(S) = \mu_1\} / dS.$$

Очевидно, что $P(S) = g_0(S) + g_1(S)$.

Рассмотрим сначала траекторию, для которой $\mu(S) = \mu_0$. В этом случае значение капитала S в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся S и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_0)\Delta t + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $S - x$ и за время Δt поступила случайная

премия x . Вероятность этого события $\lambda\Delta t\varphi(x)dx + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $S + x$ и за время Δt произведена случайная выплата x . Вероятность этого события $\mu_0\Delta t\psi(x)dx + o(\Delta t)$. Причём $S + x \leq S_0$, так как в противном случае $\mu(S)$ равнялось бы μ_1 , а не μ_0 (траектория начиналась бы в области $S > S_0$). По формуле полной вероятности получим в стационарном режиме, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_0)g_0(S) &= \lambda \int_0^S g_0(S-x)\varphi(x)dx + \\ &+ \lambda \int_S^\infty P(S-x)\varphi(x)dx + \mu_0 \int_0^{S_0-S} g_0(S+x)\psi(x)dx. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu(S) = \mu_1$ (траектория изменения капитала начиналась в области $S > S_0$). В этом случае значение капитала S в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся S и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $S - x$ и за время Δt поступила случайная премия x . Вероятность этого события равна $\lambda\Delta t\varphi(x)dx + o(\Delta t)$. При этом $S - x > 0$, так как в противном случае $\mu(S) = \mu_0$, а не μ_1 (траектория начиналась бы в области $S < 0$). В момент времени t капитал фонда равнялся $S + x$ и за время Δt произведена случайная выплата x . Вероятность этого события $\mu_1\Delta t\psi(x)dx + o(\Delta t)$. В стационарном режиме получим

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1)g_1(S) &= \lambda \int_0^S g_1(S-x)\varphi(x)dx + \\ &+ \mu_1 \int_0^{S_0-S} g_1(S+x)\psi(x)dx + \mu_1 \int_{S_0-S}^\infty P(S+x)\psi(x)dx. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Наконец, в области $S < 0$, учитывая, что переход в эту область возможен как из области $S > S_0$, так и из области $0 \leq S \leq S_0$ как с траектории с $\mu(S) = \mu_0$, так и с траектории с $\mu(S) = \mu_1$ получим в стационарном режиме

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu_0)P(S) &= \lambda \int_0^{\infty} P(S-x)\varphi(x)dx + \mu_0 \int_0^{-S} P(S+x)\varphi(x)dx + \\
&+ \mu_0 \int_{-S}^{S_0-S} g_0(S+x)\psi(x)dx + \mu_1 \int_{-S}^{S_0-S} g_1(S+x)\psi(x)dx + \\
&+ \mu_1 \int_{S_0-S}^{\infty} P(S+x)\psi(x)dx.
\end{aligned} \tag{3.145}$$

Решение уравнения (3.145) должно удовлетворять граничному условию $P(-\infty) = 0$.

3.3.3. Экспоненциальные распределения премий и выплат

Пусть распределения поступающих денежных сумм (премий) и выплат из фонда являются экспоненциальными

$$\varphi(S) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{S}{a}\right), \quad \psi(S) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{S}{b}\right). \tag{3.146}$$

В этом случае может быть найдено точное решение системы уравнений (3.142)-(3.145).

Теорема 3.6. При экспоненциальном распределении поступающих премий и выплат (3.146) плотность распределения капитала фонда имеет вид

$$P(S) = \begin{cases} W_0((1+k_0a) - (1-k_0b)e^{-k_0S_0})e^{k_0S}, & S < 0, \\ W_0(1 - (1-k_0b)e^{k_0(S-S_0)}) + W_1(1 - (1-k_1a)e^{-k_1S}), & 0 \leq S \leq S_0, \\ W_1((1+k_1b)e^{k_1S_0} - (1-k_1a))e^{-k_1S}, & S > S_0, \end{cases} \tag{3.147}$$

где

$$k_0 = \frac{\lambda a - \mu_0 b}{ab(\lambda + \mu_0)}, \quad k_1 = \frac{\mu_1 b - \lambda a}{ab(\lambda + \mu_1)}, \tag{3.148}$$

$$W_0 = \frac{k_1(1+k_0a)}{(S_0 + a + b)(k_0 + k_1)}, \quad W_1 = \frac{k_0(1-k_1a)}{(S_0 + a + b)(k_0 + k_1)}. \tag{3.149}$$

Доказательство. Рассмотрим решение уравнений на примере решения уравнения (3.145), как самого громоздкого. Подставляя в уравнение (3.145) плотности распределения $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ (3.146), получим

$$(\lambda + \mu_0)P(S) = \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{S}{a}} \int_{-\infty}^S P(y) e^{\frac{y}{a}} dy + \frac{\mu_0}{b} e^{-\frac{S}{b}} \int_S^0 P(y) e^{-\frac{y}{b}} dy + Q e^{-\frac{S}{b}}, \quad (3.150)$$

где

$$Q = \frac{\mu_0}{b} \int_0^{S_0} g_0(y) e^{-\frac{y}{b}} dy + \frac{\mu_1}{b} \int_0^{S_0} g_1(y) e^{-\frac{y}{b}} dy + \frac{\mu_1}{b} \int_{S_0}^{\infty} P(y) e^{-\frac{y}{b}} dy.$$

Дважды дифференцируя (3.150), приходим к уравнению

$$\ddot{P}(S) - k_0 \dot{P}(S) = 0, \quad (3.151)$$

где k_0 определяется соотношением (3.148). Откуда, учитывая условие $P(-\infty) = 0$, будем иметь, что при $S < 0$

$$P(S) = D e^{k_0 S}. \quad (3.152)$$

Постоянная D должна теперь быть определена так, чтобы решение (3.152) дифференциального уравнения (3.151) удовлетворяло исходному уравнению (3.150).

Аналогично, решение уравнения (3.142), удовлетворяющее граничному условию $P(+\infty) = 0$, имеет в области $S > S_0$ вид

$$P(S) = A e^{-k_1 S}, \quad (3.153)$$

где k_1 определяется (1.148).

Решение уравнения (3.143) в области $0 \leq S \leq S_0$ имеет вид

$$g_0(S) = B_1 + B_2 e^{k_0 S}, \quad (3.154)$$

а решение уравнения (3.144)

$$g_1(S) = C_1 + C_2 e^{-k_1 S}. \quad (3.155)$$

Постоянные A, B, B_2, C_1, C_2, D должны быть теперь выбраны так, чтобы функции (3.152)-(3.155) удовлетворяли системе исходных уравнений (3.145), (3.142), (3.143), (3.144) и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^0 P(S) dS + \int_0^{S_0} (g_0(S) + g_1(S)) ds + \int_0^{+\infty} P(S) dS = 1. \quad (3.156)$$

Подстановка решений (3.152), (3.153), (3.154), (3.155) в исходные уравнения приводит к соотношениям на постоянные

$$B_1 + B_2 \frac{1}{1 + k_0 a} = D \frac{1}{1 + k_0 a}, \quad (3.157)$$

$$B_1 + B_2 \frac{e^{k_0 S_0}}{1 - k_0 b} = 0, \quad (3.158)$$

$$C_1 + C_2 \frac{1}{1 - k_1 a} = 0, \quad (3.159)$$

$$C_1 + C_2 \frac{e^{-k_1 S_0}}{1 + k_1 b} = A \frac{e^{-k_1 S_0}}{1 + k_1 b}, \quad (3.160)$$

$$A \frac{k_1 e^{-k_1 S_0}}{(1 - k_1 a)((1 + k_1 b) - (1 - k_1 a)e^{-k_1 S_0})} = D \frac{k_0 e^{k_0 S_0}}{(1 + k_0 a)((1 + k_0 a)e^{k_0 S_0} - (1 - k_0 b))}. \quad (3.161)$$

Решая систему уравнений (3.157)-(3.161) и учитывая условие нормировки (3.156) окончательно получим (3.147). Теорема доказана. •

3.3.4. Плотность распределения капитала фонда при произвольных распределениях премий и выплат

При произвольных распределениях поступающих премий $\varphi(S)$ и выплат $\psi(s)$ получить точное решение систем уравнений (3.1442) – (3.145) не удаётся. Однако, в этом случае можно построить приближённое решение уравнений при некоторых дополнительных предположениях. Введём параметр θ , где $0 < \theta < 1$, и будем считать, что

$$\mu_0 b = (1 - \theta)\lambda a, \quad \mu_1 b = (1 + \theta)\lambda a. \quad (3.162)$$

Рассмотрим, далее, асимптотический случай, когда $\theta \ll 1$. Практически это означает, как уже отмечалось ранее, что при любом значении капитала S фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом опять будем считать, что пороги S_1 и S_2 , определяющие гистерезисное управление капиталом, зависят от θ . Более точно будем считать, что при $\theta \rightarrow 0$ разность порогов $S_0(\theta) = S_2(\theta) - S_1(\theta) \rightarrow \infty$, но существует конечный предел $z_0 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta S_0(\theta)$.

Перенесём начало отсчёта в точку $S = S_1$. Решение систем уравнений (3.142) – (3.145) будем искать в виде

$$g_0(S) = \theta f_0(\theta S, \theta), \quad (3.163)$$

$$g_1(S) = \theta f_1(\theta S, \theta), \quad (3.164)$$

$$P(S) = \theta f(\theta S, \theta), \quad (3.165)$$

где $f(z, \theta), f_i(z, \theta)$ - некоторые функции, которые считаются дважды дифференцируемые по z и равномерно непрерывными по θ .

Теорема 3.7. При $\theta \ll 1$ плотность распределения капитала фонда имеет вид

$$P(S) = \begin{cases} \frac{(1 - e^{-\omega_0 \theta S_0}) \omega_1}{S_0(\omega_0 + \omega_1)} e^{\omega_0 \theta S} + o(\theta), & S < 0, \\ \frac{\omega_1 (1 - e^{\omega_0 \theta (S - S_0)})}{S_0(\omega_0 + \omega_1)} + \frac{\omega_0 (1 - e^{-\omega_1 \theta S})}{S_0(\omega_0 + \omega_1)} + o(\theta), & 0 \leq S \leq S_0, \\ \frac{\omega_0 (e^{\omega_1 \theta S_0} - 1)}{S_0(\omega_0 + \omega_1)} e^{-\omega_1 \theta S} + o(\theta), & S > S_0, \end{cases} \quad (3.166)$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_0 b_2}, \quad \omega_1 = \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_1 b_2}. \quad (3.167)$$

Доказательство. Подставляя (3.163), (3.164), (3.165) в уравнение (3.143) и делая замену переменной $\theta S = z$, получим уравнение относительно функции $f_0(z, \theta)$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_0) f_0(z, \theta) &= \lambda \int_0^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \mu_0 \int_0^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx + \\ &+ \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx - \\ &- \mu_0 \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Раскладывая в первых двух интегралах в (3.168) подынтегральные выражения в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим, учитывая (3.162),

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda a_2 + \mu_0 b_2}{2} \ddot{f}_0(z, \theta) - \lambda a \dot{f}_0(z, \theta) + \frac{1}{\theta^2} \left[\lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \right. \\ & \left. - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \mu_0 \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx \right] + \frac{\alpha(\theta^2)}{\theta^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Функции $f(z, \theta)$, $f_0(z, \theta)$ предполагаются дифференцируемыми и, следовательно, ограниченными. Поэтому, например,

$$\frac{1}{\theta^2} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx \leq \max_y f_0(y, \theta) \frac{1}{(z_0 - z)^2} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} x^2 \psi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,$$

так как второй момент $M\{x^2\} = b_2$ по условию существует. Аналогично могут быть оценены и другие интегралы.

Обозначим

$$f_0(z) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f_0(z, \theta). \quad (3.170)$$

Переходя в (3.169) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим уравнение относительно функции $f_0(z)$

$$\ddot{f}_0(z) - \omega_0 \dot{f}_0(z) = 0, \quad (3.171)$$

где ω_0 определяется (3.167). Откуда

$$f_0(z) = B_1 + B_2 e^{\omega_0 z}$$

и, следовательно,

$$g_0(S) = \theta(B_1 + B_2 e^{\omega_0 \theta S}) + \alpha(\theta). \quad (3.172)$$

Аналогичные рассуждения позволяют показать, что функция

$$f_1(z) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f_1(z, \theta) \quad (3.173)$$

имеет вид

$$f_1(z) = C_1 + C_2 e^{-\omega_1 z}, \quad (3.174)$$

где ω_1 определяется вторым выражением (3.167), и, следовательно,

$$g_1(S) = \theta(C_1 + C_2 e^{-\omega_1 \theta S}) + \alpha(\theta). \quad (3.175)$$

Наконец, функция

$$f(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f(z, \theta) \quad (3.176)$$

будет равна

$$f(z) = \begin{cases} Ae^{-\omega_1 z}, & z > z_0, \\ De^{\omega_0 z}, & z < 0, \end{cases} \quad (3.177)$$

где учтено, что $f(z, \theta) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, и, следовательно,

$$P(S) = \begin{cases} A\theta e^{-\omega_1 \theta S} + o(\theta), & s > S_0, \\ D\theta e^{\omega_0 \theta S} + o(\theta), & s < 0. \end{cases} \quad (3.178)$$

При выводе соотношений (3.172), (3.175), (3.178) неявно предполагалось, что $S \neq 0$ и $S \neq S_0$. Рассмотрим теперь уравнения системы (3.142)-(3.145) при $S = 0$ и $S = S_0$. При $S = 0$ уравнение (3.143) имеет вид

$$(\lambda + \mu_0)g_0(0) = \mu_0 \int_0^{S_0} g_0(x)\psi(x)dx + \lambda \int_0^{\infty} P(-x)\varphi(x)dx.$$

Откуда, учитывая (3.172) и (3.178), будем иметь

$$(\lambda + \mu_0)(B_1 + B_2) = \mu_0 \int_0^{S_0} (B_1 + B_2 e^{\omega_0 \theta x})\psi(x)dx + \lambda D \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \theta x}\varphi(x)dx + o(\theta).$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$B_1 + B_2 = D. \quad (3.179)$$

Рассматривая теперь уравнение (3.143) при $S = S_0$, аналогично получаем

$$B_1 + B_2 e^{\omega_0 z_0} = 0. \quad (3.180)$$

Уравнение (3.144) при $S = 0$ и $S = S_0$ приводит к соотношениям

$$C_1 + C_2 = 0, \quad (3.181)$$

$$C_1 + C_2 e^{-\omega_1 z_0} + A e^{-\omega_1 z_0}. \quad (3.182)$$

Наконец, уравнение (3.142) при $S = S_0$ даёт

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1) A e^{-\omega_1 \theta S_0} &= \mu_1 A e^{-\omega_1 \theta S_0} \int_0^{\infty} e^{-\omega_1 \theta x} \psi(x) dx + \lambda D e^{\omega_0 \theta S_0} \int_{S_0}^{\infty} e^{-\omega_0 \theta x} + \\ &+ \lambda \int_0^{S_0} (B_1 + B_2 e^{\omega_0 \theta S_0 - \omega_0 \theta x}) \varphi(x) dx + \lambda \int_0^{S_0} (C_1 + C_2 e^{-\omega_1 \theta S_0 + \omega_1 \theta x}) \varphi(x) dx + o(\theta). \end{aligned} \quad (3.183)$$

Откуда с учётом (3.179)-(3.182)

$$\frac{\lambda a \omega_0}{1 - e^{-\omega_0 z_0}} D - \left(\mu_1 b \omega_1 + \frac{\lambda a \omega_1}{e^{\omega_1 z_0} - 1} \right) A e^{-\omega_1 z_0} + \frac{o(\theta)}{\theta} = 0.$$

Так как $\mu_1 b = (1 + \theta) \lambda a$, то переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$A \frac{\omega_1}{e^{\omega_1 z_0} - 1} = D \frac{\omega_0}{1 - e^{-\omega_0 z_0}}. \quad (3.184)$$

Решая систему уравнений (3.179)-(3.182) и используя условие нормировки (3.156), окончательно получим, что при $\theta \ll 1$ плотность распределения капитала фонда $P(S)$ определяется соотношением (3.166). Теорема доказана. •

На рис. 3.6 и рис. 3.7 приведены зависимости плотности распределения капитала фонда для случая экспоненциальных распределений поступлений и выплат, построенные по формулам (3.147) ($Pu(S)$ – сплошные линии) и аппроксимирующим формулам (3.166) ($P(S)$ – штриховые линии). Параметры: $\lambda = 1, a = 2, b = 1$ для рис. 3.6 – среднее поступление больше средней выплаты; $\lambda = 1, a = 2, b = 5$ для рис. 3.7 – среднее поступление меньше средней выплаты. Параметр $S_0 = 10a$.

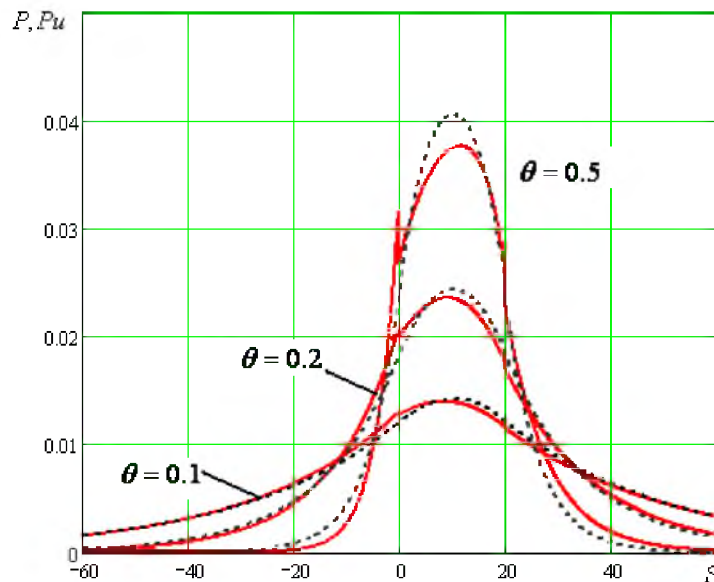


Рис. 3.6. – Плотность распределения капитала фонда, когда среднее поступление больше средней выплаты

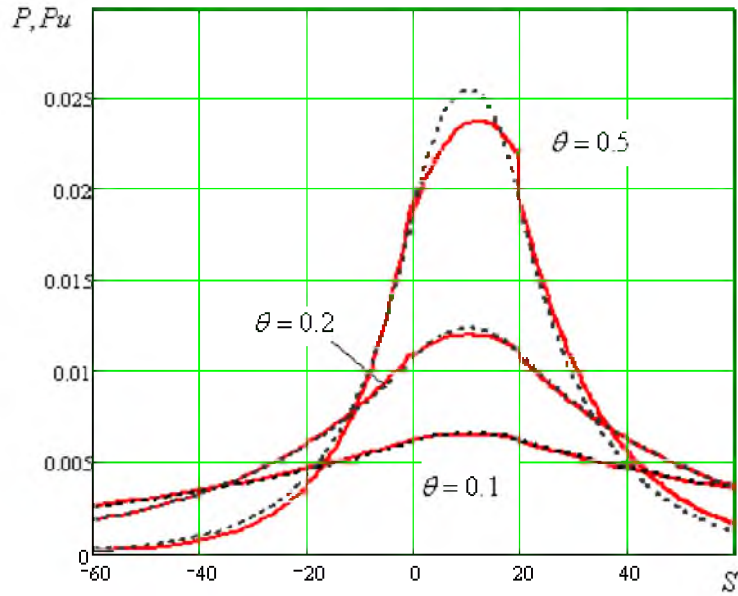


Рис. 3.7. – Плотность распределения капитала фонда, когда среднее поступление меньше средней выплаты

Зная плотность распределения капитала фонда, можно найти такие его характеристики как вероятности неплатёжеспособности и повышенных выплат.

Неплатежеспособность фонда наступает тогда, когда его капитал становится меньше $-S_1$ (при выбранном начале отсчёта). Поэтому вероятность неплатёжеспособности фонда

$$P_n = \int_{-\infty}^{-S_1} P(S) dS = \frac{\omega_1 (e^{-\omega_0 \theta S_1} - e^{-\omega_0 \theta S_2})}{\theta (S_2 - S_1) \omega_0 (\omega_0 + \omega_1)}. \quad (3.185)$$

Повышенные выплаты фонд производит в двух случаях. Либо когда капитал фонда $S > S_0$, либо при $0 \leq S \leq S_0$, когда траектория изменения капитала, начавшись при $S = S_0$, ещё не достигла значения 0. Поэтому вероятность повышенных выплат

$$P_n = \int_{S_0}^{\infty} P(S) dS + \int_0^{S_0} g_2(S) dS = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}. \quad (3.186)$$

Как следует из соотношения (3.186), вероятность P_n не зависит от порогов алгоритма.

Резюме к главе 3

В настоящей главе были исследованы математические модели деятельности некоммерческих фондов при различных предположениях о характеристиках потоков поступающих платежей и производимых фондом выплат и различных предположениях об управлении капиталом фонда в частности:

1. Для модели с дважды стохастическим потоком поступающих платежей и релейным управлением выплатами из фонда найдена плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме при дополнительном предположении о малости нагрузки поступающих премий, плотности распределения периода неплатёжеспособности фонда и периода повышенных выплат.

2. Для модели фонда с пуассоновским потоком поступающих платежей и релейно-гистерезисном управлением выплатами из фонда. Найдена плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме при условии, что поступающие платежи имеют экспоненциальное распределение, и в общем случае, когда нагрузка поступающих премий является малой.

3. Для модели фонда с пуассоновскими потоками поступающих платежей и выплат и релейно-гистерезисным управлением интенсивностью потока выплат найдена плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме при условии, что поступающие платежи и выплаты имеют экспоненциальное распределение, и в общем случае произвольных распределений платежей и выплат при дополнительном предположении о малости нагрузки премий.

Результаты данной главы опубликованы в работах [11,13,17 – 22].

Глава 4. Комплекс алгоритмов и программ для вычисления вероятностей разорения и имитационного моделирования моделей страховых компаний

В данной главе рассматривается комплекс алгоритмов и программ, реализующих имитационное моделирование и вычисление вероятностей разорения математических моделей страховых компаний. Данный комплекс включает:

- программы вычисления вероятностей разорения;
- программы вычисления статистических характеристик модели страховой компании методом имитационного моделирования.

По отношению к рассмотренным в диссертации задачам глава носит вспомогательный характер. Рассмотренные алгоритмы использовались для оценки границ применимости полученных в гл. 1 и гл. 2 асимптотических соотношений.

4.1. Комплекс алгоритмов и программ для расчета вероятностей разорения математических моделей страховых компаний

В работе разработан комплекс алгоритмов и программ [27, 28, 29] для получения численных решений систем интегро-дифференциальных (1.12) и интегральных (2.15) уравнений, задающих вероятности разорения, которые были получены в главе 1 и в главе 2. В алгоритмах используется метод моментов [7, 43, 77] решения интегро-дифференциальных и интегральных уравнений. Программный комплекс реализован в среде программирования Delphi.

Разработанный комплекс состоит из следующих приложений:

1. Вычисление вероятности разорения страховой компании в предположении о дважды стохастическом потоке страховых выплат.

В этом приложении реализован численный алгоритм нахождения решений системы уравнений (1.12). Особенность алгоритма состоит в том, что решения системы $P_i(S)$ ищутся в виде

$$P_i(S) = \frac{1}{1+\theta} \sum_{t=0}^m P_{i,t} \frac{\theta^t S^t}{t!} e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta S},$$

где параметры A_1 и A_2 определяются формулами (1.22) и (1.23).



Рис. 4.1. – Блок-схема алгоритма решения системы уравнений (1.12)

Число членов разложения определяется задаваемой точностью ε . Блок-схема алгоритма приведена на рис. 4.1.

Для выполнения алгоритма задаются следующие входные данные: число состояний n , значения интенсивностей λ_i потока страховых выплат, среднее значение страховой выплаты a , плотность распределения страховых выплат $\psi(x)$, матрица инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} , нагрузка страховой премии θ , точность ε .

После ввода начальных данных автоматически начинается реализация численных алгоритмов, запрограммированных в теле приложений. При реализации алгоритма происходит расчет вероятностных характеристик, и строятся графики зависимости вероятностей разорения страховой компании от начального капитала S и начального значения λ_i .

Пример 1. Вычислить вероятности разорения страховой компании в предположении, о том, что моменты наступления страховых выплат образуют дважды стохастический пуассоновский поток, $\lambda_1=10, \lambda_2=0, a=1$,

$\psi(S) = \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{S}{a}\right\}$, матрица инфинитезимальных характеристик

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } \theta = 0.1.$$

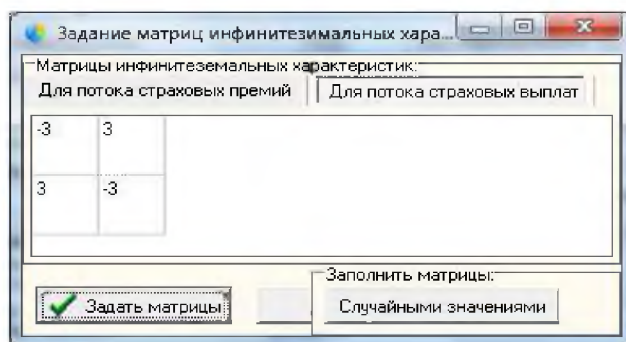


Рис 4.2. – Задание матрицы инфинитезимальных характеристик для потока страховых выплат

Математическая модель страховой компании

Параметры модели

Время моделирования: Шаг моделирования: (эти параметры необходимы для построения имитационной модели)

Количество прогонов модели:

Максимальное значение начального капитала: Шаг нач. капитала: Параметр гамма-функции распределения: (1 - экспоненциальное распределение)

Параметры расчета

а: Тета: Дельта: Точность разложения (Эпсилон): (эти параметры важны только для расчетной модели)

Страховые выплаты

Количество значений интенсивности потока страховых выплат:

Массив интенсивностей потока страховых выплат:

Начальное состояние потока страховых выплат: Среднее значение страховой выплаты: <- Эти параметры необходимы для построения имитационной модели

© Разработка модели и алгоритмов: Я.С. Бублик.

Текущее состояние: Расчет завершен, жду указаний

Рис. 4.3. – Параметры для модели страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат

Графики зависимости вероятностей разорения страховой компании, полученные как численные решения системы (1.12), от начального капитала приведены на рисунке 4.4.

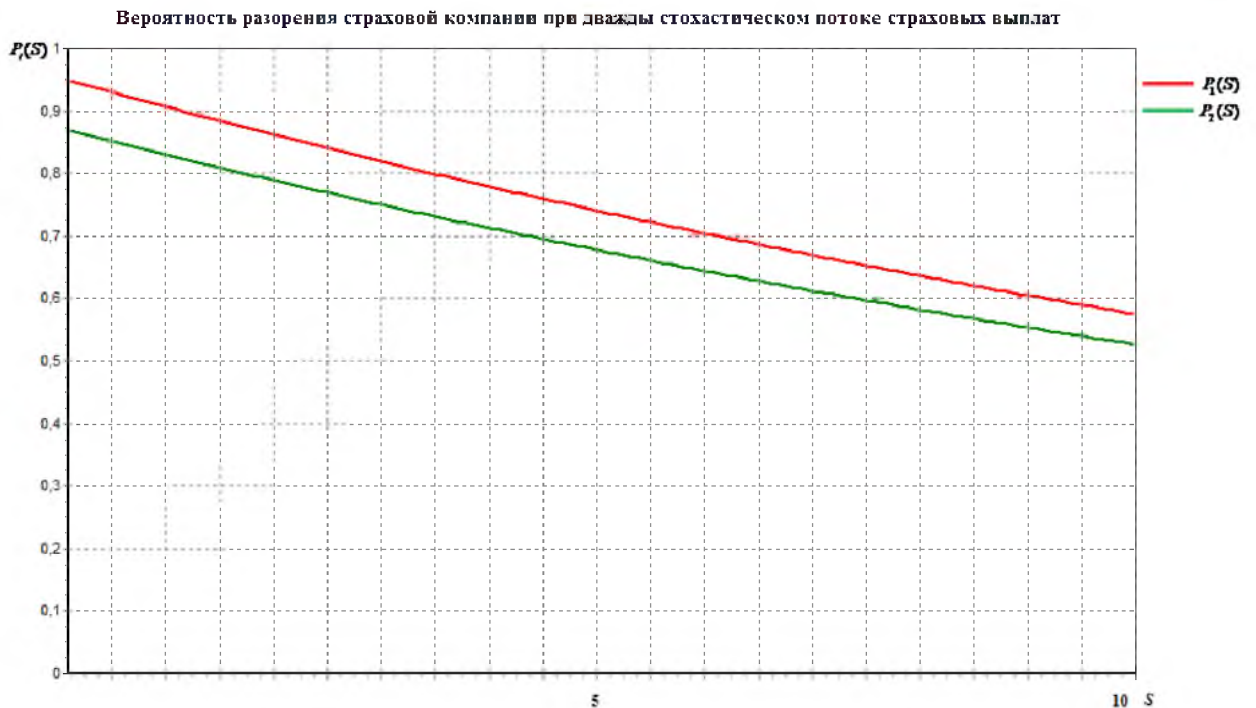


Рис 4.4. – Вероятности разорения при дважды стохастическом потоке страховых выплат

2. Вычисление вероятности разорения страховой компании в предположении о дважды стохастических потоках страховых премий и выплат.

В этом приложении реализован численный алгоритм нахождения решений системы уравнений (2.15). Особенность алгоритма состоит в том, что решения системы $G_{i,j}(S)$ ищутся в виде

$$G_{i,j}(S) = \sum_{t=0}^m P_{i,j,t} \frac{A_2^t \theta^t S^t}{A_1^t t!} e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta S},$$

где параметры A_1 и A_2 определяются формулами (2.21) и (2.22). Число членов разложения определяется задаваемой точностью ε . Блок-схема алгоритма практически не отличается от блок-схемы предыдущего алгоритма и здесь не приводится.

Для выполнения алгоритма задаются следующие входные данные: число состояний m и значения интенсивностей λ_i потока страховых премий, число состояний n и значения интенсивностей μ_i потока страховых выплат; среднее значение a страховой премии; плотность распределения страховых премий $\varphi(x)$ и плотность распределения страховых выплат $\psi(x)$; матрицы инфинитезимальных характеристик \mathbf{A} и \mathbf{B} , нагрузка страховой премии θ , точность ε .

Пример 2. Вычислить вероятности разорения страховой компании в предположении, о том, что моменты наступления страховых премий и страховых выплат образуют дважды стохастические пуассоновские потоки,

$$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \mu_1 = 1, \mu_2 = 2, a = 1, b = 5, \psi(S) = \frac{4S}{b^2} e^{-\frac{2S}{b}}, \varphi(S) = \frac{4S}{a^2} e^{-\frac{2S}{a}}$$

$$\text{матрицы инфинитезимальных характеристик } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.8 & -0.8 \end{pmatrix}$$

и $\theta = 0.5$.

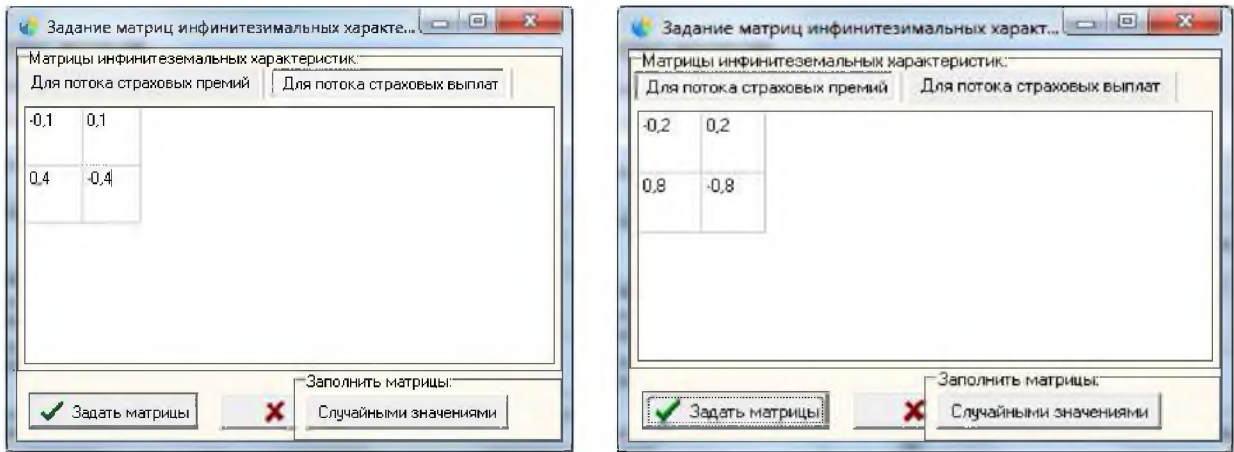


Рис 4.5. – Задание матриц инфинитезимальных характеристик для потоков страховых премий и страховых выплат

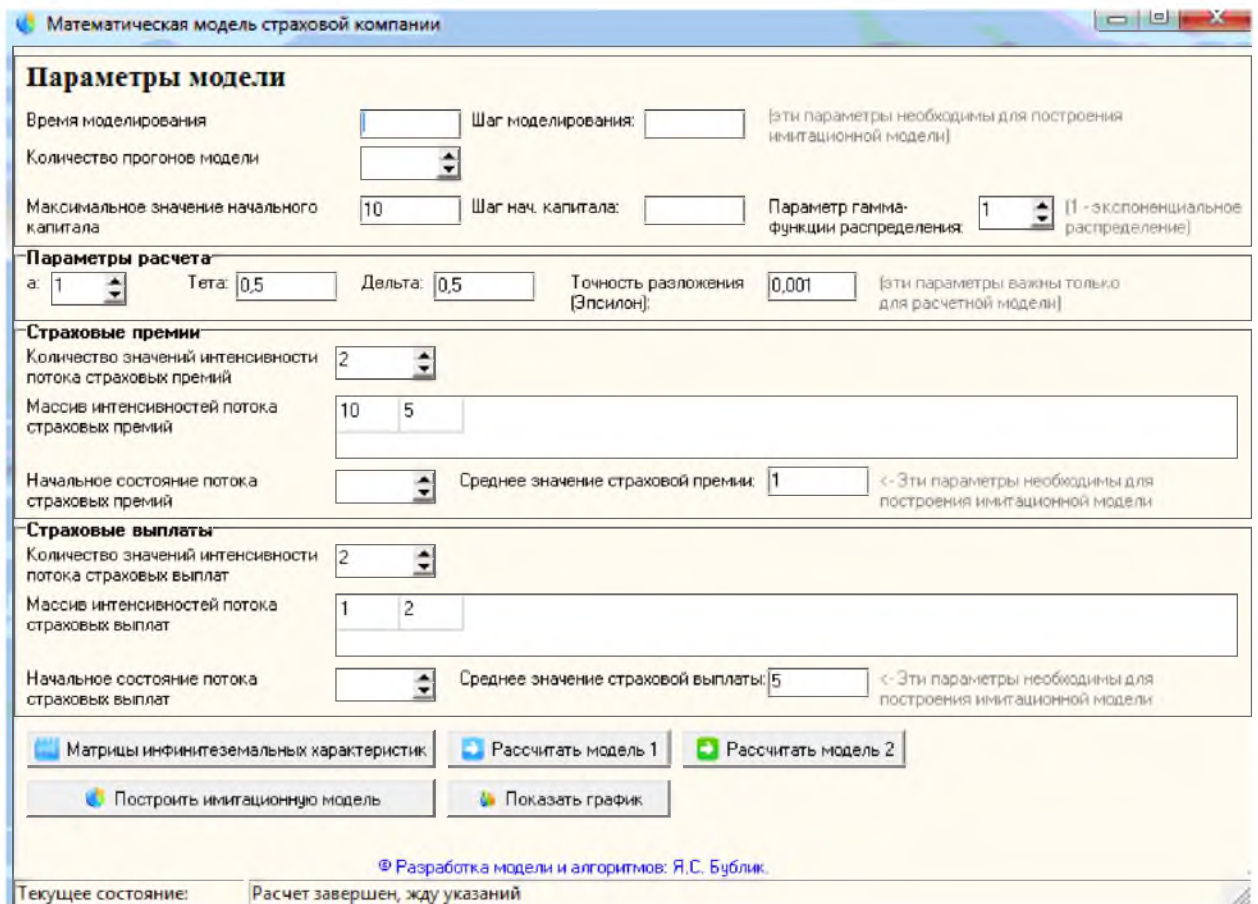


Рис. 4.6. – Параметры для модели страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и выплат

Графики зависимости вероятностей разорения страховой компании, полученные как численные решения системы (2.15), от начального капитала приведены на рисунке 4.7.

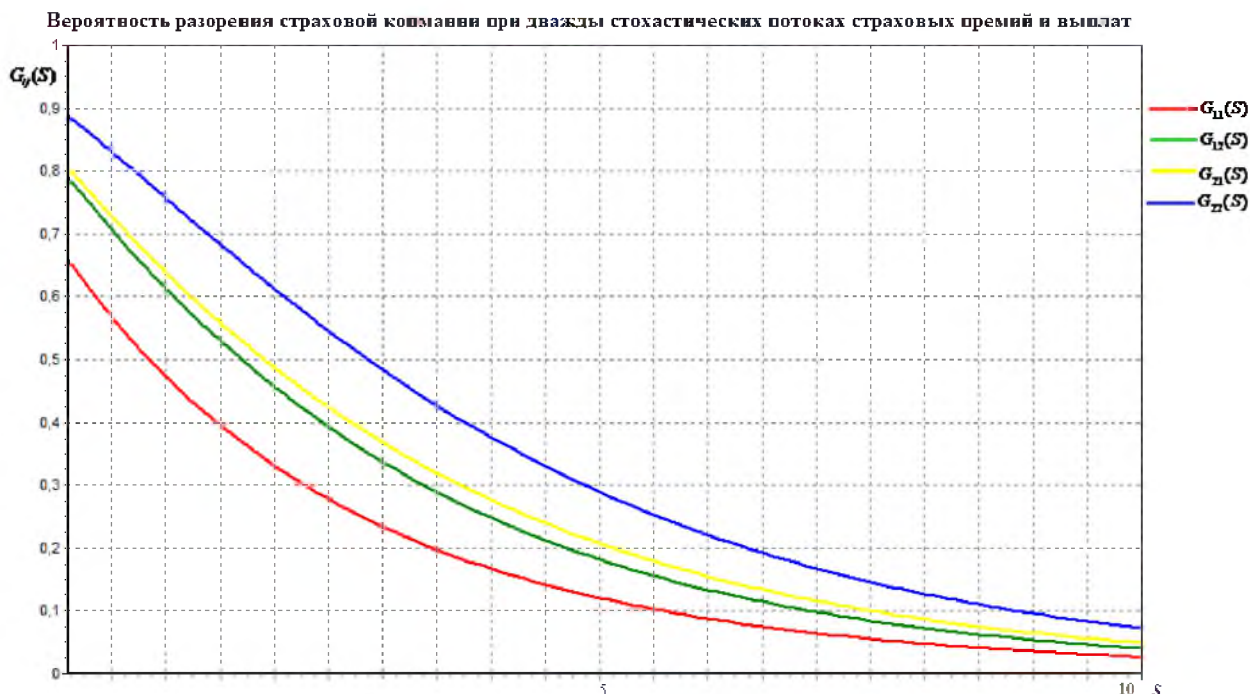


Рис. 4.7. Вероятности разорения при дважды стохастических потоках премий и выплат

Численные расчеты вероятностей разорения использовались для определения границ применимости полученных выше в гл. 1 и 2 асимптотических формул (1.54) и (2.44) для вероятностей разорения (см., например, пример 3 п. 1.4 в гл. 1 и пример 3 в гл. 2).

4.2. Имитационное моделирование моделей страховых компаний

Полезным методом изучения сложных систем, в том числе моделей страховых компаний, является метод имитационного моделирования, который заключается в построении модели, имитирующей изменение капитала страховой компании во времени. Имитационная модель разрабатывается на основе дискретно-событийного подхода к моделированию, предполагающего

отход от непрерывной природы протекающих процессов и рассмотрение основных событий моделируемого процесса. Результаты, полученные путем имитационного моделирования, в частности могут помочь определить границы применимости предлагаемых способов оценки характеристик страховых компаний.

Пусть требуется провести имитационное моделирование модели страховой компании. Если рассматривается модель, в которой поступление капитала в компанию за счет страховых взносов детерминировано и имеет постоянную скорость C , то для этого нужно:

1. Сымитировать (сгенерировать) поток страховых выплат, то есть построить последовательность моментов наступления страховых случаев t_i . Так как поток выплат является дважды стохастическим потоком (ММР-потоком), который определяется числом состояний интенсивности, набором значений интенсивности и матрицей инфинитезимальных характеристик, определяющей интенсивности переходов из одного состояния в другое, то для этого нужно сначала сгенерировать (или выбрать) начальное состояние потока, затем время пребывания T в этом состоянии. На этом интервале генерируются случайные моменты t_i – моменты наступления страховых выплат до завершения интервала T . Затем моделируется переход цепи Маркова, задающей поток, в следующее состояние в соответствии с матрицей инфинитезимальных характеристик.

2. Сымитировать для каждого страхового случая величину страховой выплаты x_i .

В результате можно построить реализацию случайного процесса $S(t)$ – величины капитала компании в момент времени t . Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина капитала компании была равна S_0 . Тогда в момент времени t капитал компании

$$S(t) = S_0 + Ct - \sum_{i=1}^{k(t)} x_i,$$

где $k(t)$ – число выплат к моменту времени t .

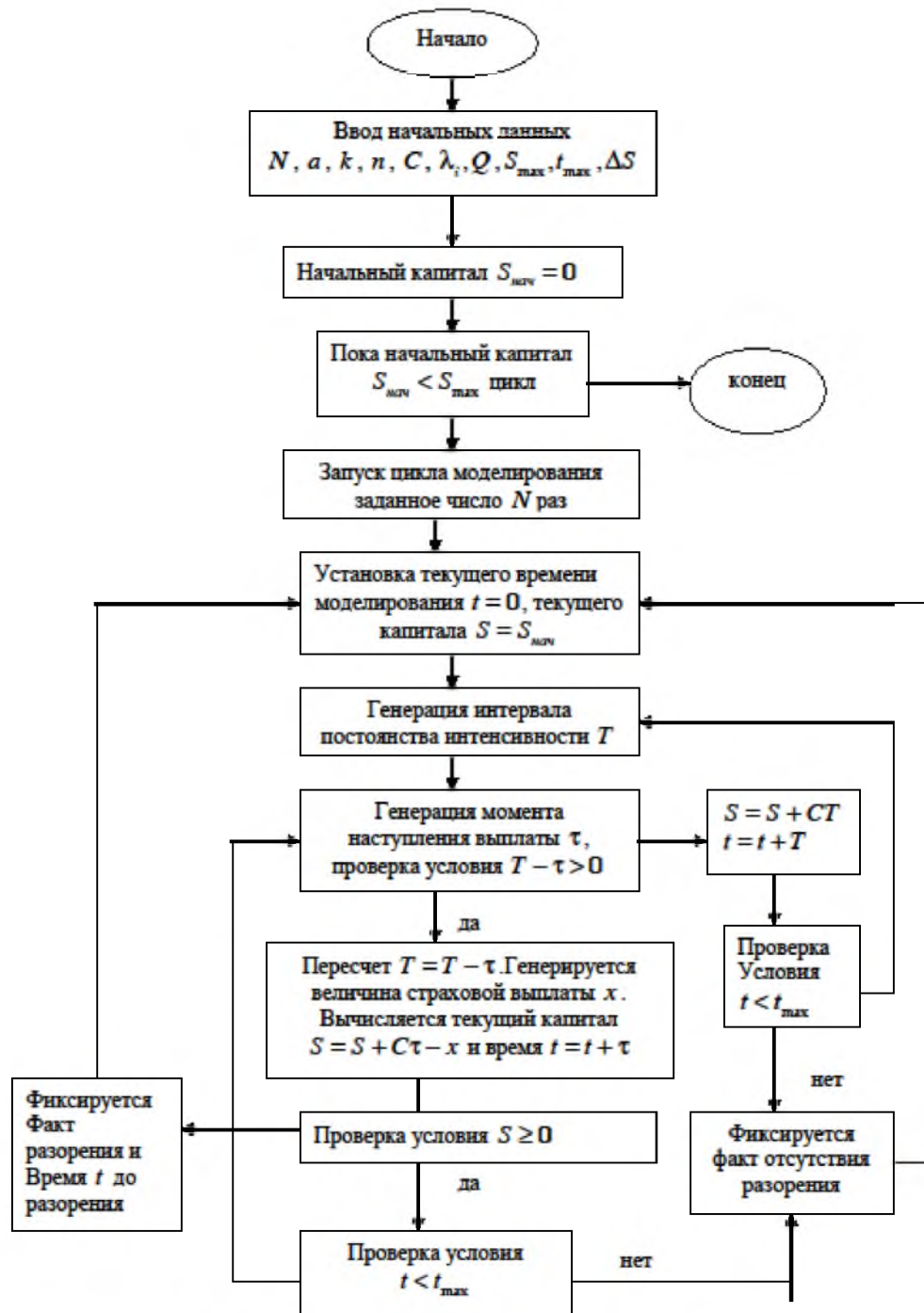


Рис 4.8. Блок-схема алгоритма имитационного моделирования

Блок-схема алгоритма имитационного моделирования представлена на рис. 4.8. В алгоритме моделирования предполагается, что страховые выплаты имеют гамма-распределение

$$\psi(x) = \frac{(k+1)^{k+1} x^k}{a^{k+1} k!} e^{-\frac{(k+1)x}{a}}.$$

Для выполнения алгоритма задаются следующие входные данные: число состояний n , значения интенсивностей λ_i потока страховых выплат, среднее значение страховой выплаты a , плотность распределения страховых выплат $\psi(x)$, матрица инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} , параметр C , параметр распределения $\psi(x)$ k , объем выборки N , максимальное значение начального капитала S_{\max} , шаг изменения начального капитала ΔS , максимальное время моделирование t_{\max} , по достижении которого считается, что на данной реализации разорение не происходит.

Пусть моделирование проводится на промежутке времени $[0, t_{\max}]$, где $t_{\max} \gg 0$. Если $S(t) \geq 0$ на всем промежутке $[0, t_{\max}]$, то разорение компании не наступает. Разорение наступает, если в момент наступления очередного страхового случая капитал компании меньше величины страховой выплаты. Выполняя имитационное моделирование достаточно много раз, получим выборку для оценки вероятности разорения и характеристик условного времени разорения компании при заданном значении начального капитала. Для построения графиков использовался стандартный пакет Excel.

Пример 3. Пусть $n=2$, $\lambda_1=10, \lambda_2=0$, $i=1,2$ матрица инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $\psi(x) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$, где $a=1$. Вероятности разорения $P_1(S)$, $P_2(S)$, определяемые соотношениями (1.59) и (1.60) и их выборочные оценки, полученные в результате имитационного моделирования, представлены на рисунке 4.10. и 4.11 соответственно.

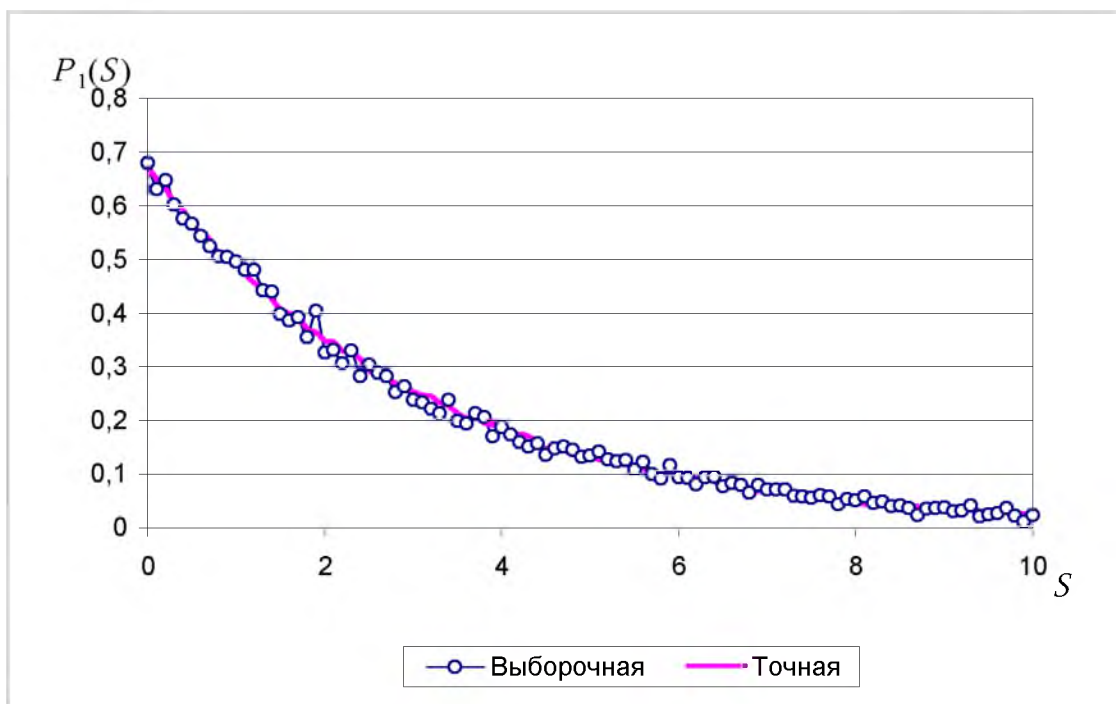


Рис. 4.10. – Вероятность разорения в зависимости от величины капитала

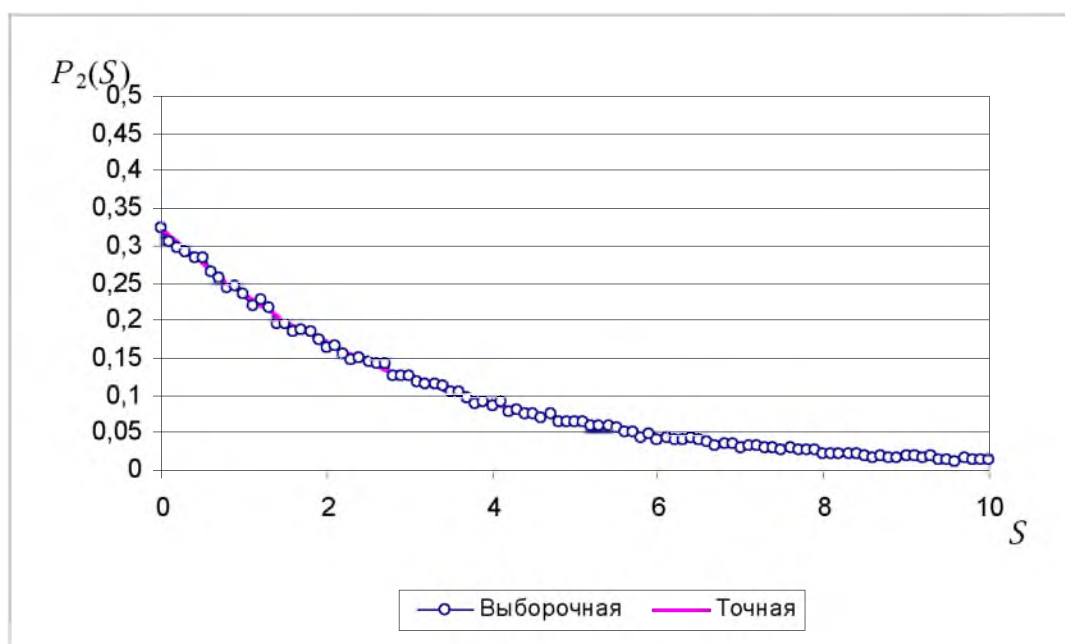


Рис. 4.11. – Вероятность разорения в зависимости от величины капитала

Полученные с помощью имитационного моделирования зависимости среднего условного времени до разорения $t_1^1(S)$, $t_2^1(S)$ и дисперсии $D_1(S)$, $D_2(S)$ от начального капитала представлены на рисунках 4.12, 4.13. Объем выборки $N=10000$, параметр $\theta=0.4$.

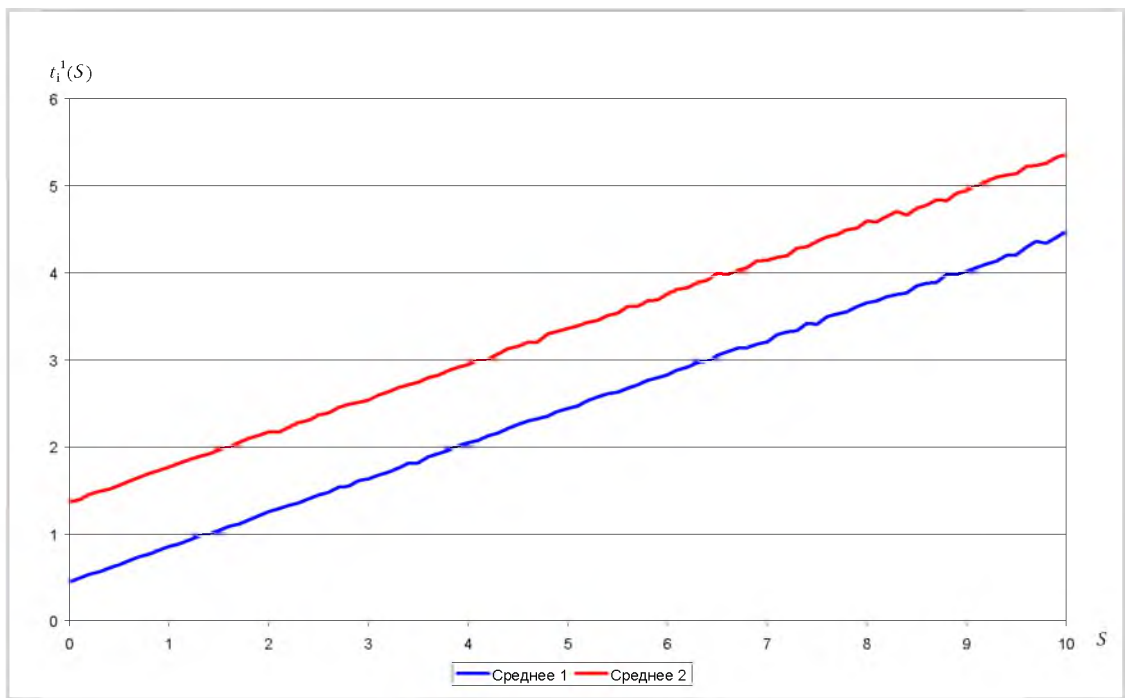


Рис. 4.12. – Среднее условное время до разорения $t_1^1(S)$, $t_2^1(S)$ в зависимости от начального капитала

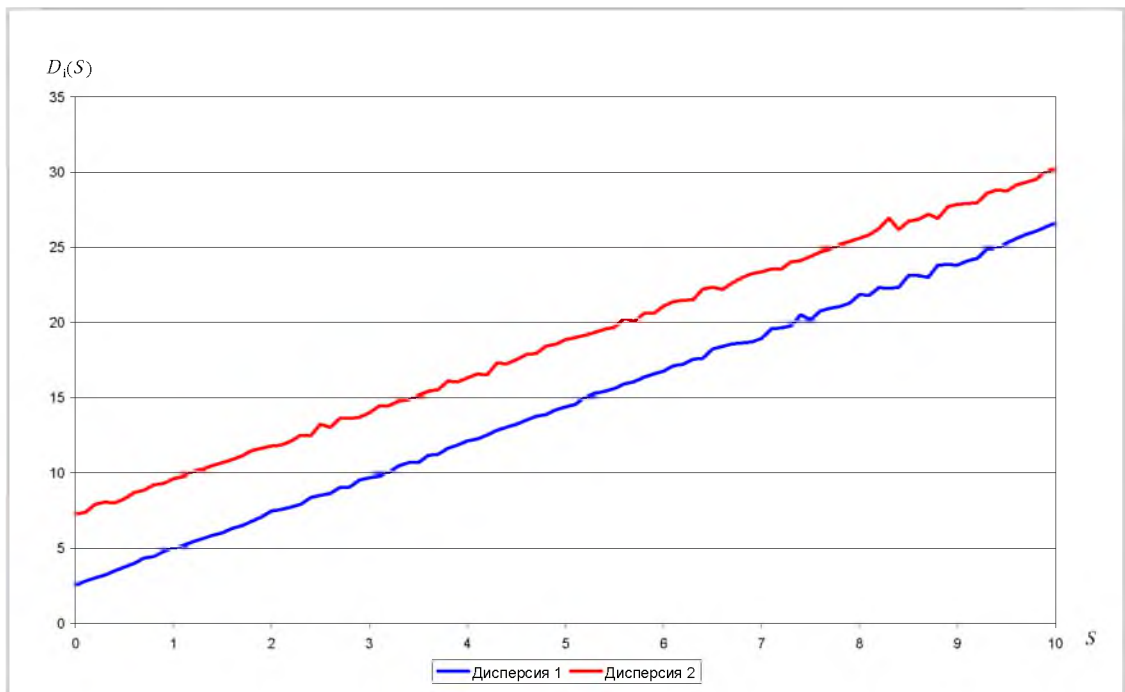


Рис. 4.13. – Дисперсия условного времени до разорения $D_1(S)$, $D_2(S)$ в зависимости от начального капитала

При имитировании модели со случайным поступлением страховых взносов нужно:

1. Сымитировать поток страховых взносов, то есть построить последовательность моментов поступления страховых взносов .

2. Сымитировать для каждого момента поступления величину страхового взноса y_j ;

3. Сымитировать поток страховых выплат, то есть построить последовательность моментов наступления страховых случаев.

4. Сымитировать для каждого страхового случая величину страховой выплаты x_i .

Тогда

$$S(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{m(t)} y_j - \sum_{i=1}^{k(t)} x_i,$$

где $m(t)$ - число взносов на $[0, t]$, $k(t)$ - число выплат на $[0, t]$. Получающийся при этом алгоритм моделирования мало чем отличается от предыдущего и поэтому не описывается.

Резюме к главе 4

В настоящей главе описан комплекс алгоритмов и программ для численного нахождения вероятностей разорения и проведения имитационного моделирования математических моделей страховых компаний, а именно:

1. Комплекс алгоритмов и программ для расчета вероятностей разорения математических моделей страховых компаний при различных предположения о потоках страховых премий и страховых выплат.

2. Комплекс программ, реализующих имитационное моделирование деятельности страховых компаний.

Результаты данной главы опубликованы в работах [27,28,29]

Заключение

В диссертационной работе построены и исследованы математические модели страховых компаний с дважды стохастическими потоками страховых премий и страховых выплат. Построены и исследованы математические модели некоммерческих фондов при различных предположениях, о потоках поступающих в фонд платежей и выплат из фонда и различных предположениях о стратегии управления денежными средствами фонда. Разработан комплекс программ для вычисления вероятности разорения страховой компании и имитационного моделирования математической модели деятельности страховой компании.

Основные результаты, полученные автором, состоят в следующем:

1. Исследована математическая модель страховой компании в случае, когда моделью потока страховых выплат является дважды стохастический пуассоновский поток. Получены выражения для вероятности разорения на бесконечном временном интервале и для производящей функции условного времени до разорения при малой нагрузке страховой премии. Для исследуемой модели найдены такие статистические характеристики, как среднее значение условного времени до разорения, дисперсия условного времени до разорения. Доказано, что при неограниченно растущем начальном капитале и одновременном уменьшении нагрузки страховой премии распределение условного времени до разорения является асимптотически нормальным.

2. Исследована математическая модель изменения капитала страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат. Получены выражения для вероятности разорения на бесконечном временном интервале и для производящей функции условного времени до разорения при малой нагрузке страховой премии. Для исследуемой модели найдены такие статистические характеристики, как среднее значение условного времени до разорения и дисперсия условного времени до разорения. Доказано, что при неограниченно растущем начальном капитале и од-

новременном уменьшении нагрузки страховой премии распределение условного времени до разорения является асимптотически нормальным.

3. Построены и исследованы три математические модели деятельности некоммерческого фонда. Для модели с дважды стохастическим потоком поступающих платежей и релейным управлением выплатами найдены плотность распределения капитала фонда в при дополнительном предположении о том, что средняя выплата из фонда «почти совпадает» со средним поступлением в фонд, а также плотности распределения продолжительностей периода неплатёжеспособности фонда и периода повышенных выплат.

Для математической модели деятельности некоммерческого фонда при пуассоновском потоке поступающих платежей и релейно-гистерезисном управлении выплатами найдена плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме при условии, что поступающие платежи имеют экспоненциальное распределение, и в общем случае, когда средняя выплата из фонда «почти совпадает» со средним поступлением в фонд.

Для математической модели деятельности некоммерческого фонда с пуассоновскими потоками поступлений и выплат и релейно-гистерезисным управлением интенсивностью выплат найдены плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме при условии, что поступающие платежи и выплаты имеют экспоненциальное распределение, и в общем случае произвольных распределений платежей и выплат, когда средняя выплата из фонда «почти совпадает» со средним поступлением в фонд.

4. Разработан комплекс проблемно ориентированных программ, позволяющих вычислить вероятность разорения страховой компании для исследованных моделей, а также комплекс программ, реализующих имитационное моделирование деятельности страховых компаний. Комплексы программ использованы для оценки границ применимости полученных в диссертации приближенных соотношений для статистических характеристик рассмотренных моделей.

Список использованной литературы

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Д. Актуарная математика. – М.: Янус – К, 2001. – 656 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1 – М.: Наука, 1969. – 344 с.
3. Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В. Сингулярная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями // Журнал выч. математ. и математ. Физики. – 2012. – Т. 52. – № 10. – С. 1812–1846.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
5. Бенинг В.Е., Королёв В.Ю. Асимптотическое разложение для вероятности разорения в классическом процессе риска при малой нагрузке безопасности // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7 – Вып.1. – С. 177-179.
6. Бенинг В.Е., Королёв В.Ю. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 1998. – Т. 5. –Вып.1. – С. 116–133.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. 2. – М.: Наука, 1962. – 640 с.
8. Бойков А.В. Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и её применение. – 2002. – Т. 47. – Вып.3. – С. 549–553.
9. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Ч.1. Упорядочивание рисков. – М.: ЦПИ, 2001.
10. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. – М.: Мейлор, 2009.
11. Бублик Я.С. Плотность распределения капитала некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом / К.И. Лившиц Я.С. Бублик // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 174 – 177.

12. Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 1 (10). – С. 66–77.

13. Бублик Я.С. Плотность распределения капитала некоммерческого фонда для пуассоновской модели при гистерезисном управлении капиталом / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3 (12). – С. 12–20.

14. Бублик Я.С. Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 4 (13). – С.15–23.

15. Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С.64–74.

16. Бублик Я.С. Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 1 (18). – С. 82–91.

17. Бублик Я.С. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда / И.Ю. Шифердекер, Я.С. Бублик // Научное творчество молодежи : материалы XII Всероссийской научно-практической конференции : в 2 ч. 18 – 19 апреля 2008 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2008. – Ч. 1. – С. 4–7.

18. Бублик Я.С. Диффузионная аппроксимация пуассоновской модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 48–58.

19. Бублик Я.С. Математическая модель деятельности внебюджетного фонда при дважды стохастическом потоке страховых премий и экспоненциальных распределениях поступлений и выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2008) : материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием : в 2 ч. 14 – 15 ноября 2008 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2008. - Ч. 1. – С. 145–149.

20. Бублик Я.С. Диффузионная аппроксимация пуассоновской модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Седьмой Российской конференции с международным участием, 2 – 5 сентября 2008 г. – Томск : Изд-во НТЛ, 2008. – С. 91.

21. Бублик Я.С. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009) : материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием : в 2 ч. 13 – 14 ноября 2009 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2009. - Ч. 1. – С. 234–238.

22. Бублик Я.С. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда / Я.С. Бублик // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции : в 2 ч. 15– 16 апреля 2010 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 16–19.

23. Бублик Я.С. Условное время до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Восьмой Российской конференции с международным участием, 5 – 8 октября 2010 г. – Томск : Изд-во НТЛ, 2010. – С.29.

24. Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании в случае дважды стохастических потоков страховых премий и выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011) : материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием : в 2 ч. 25–26 ноября 2011 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2011. - Ч. 1. – С. 148–153.

25. Бублик Я.С. Производящая функция условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат [Электронный ресурс] / Я.С. Бублик // Научное творчество молодежи : материалы XVI Всероссийской научно-практической конференции : в 2 ч. 17 – 18 мая 2012 г. – Электрон. дан. – Анжеро-Судженск, 2012. - Ч. 1. – 1 электрон. опт. диск. - С. 5–8.

26. Бублик Я.С. Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Девятой Российской конференции с международным участием, 5 – 8 июня 2012 г. – Томск : Изд-во НТЛ, 2012. – С. 80.

27. Бублик Я.С. Электронный информационный образовательный ресурс: Вычисление вероятности разорения при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат [Электронный ресурс] / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование», № 8, – 2012. – Режим доступа: <http://ofermio.ru/portal/newspaper/ofernio/2012/8.doc>. – С. 9.

28. Бублик Я.С. Электронный информационный образовательный ресурс: Вычисление вероятности разорения страховой компании при пуассоновских потоках страховых премий и выплат [Электронный ресурс] / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование», № 8, – 2012. – Режим доступа: <http://ofermio.ru/portal/newspaper/ofernio/2012/8.doc>. – С. 10.

29. Бублик Я.С. Электронный информационный образовательный ресурс: Вычисление вероятности разорения при дважды стохастическом потоке страховых выплат [Электронный ресурс] / К.И. Лившиц, Я.С. Бублик

// Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование», № 8, – 2012. – Режим доступа: <http://ofermio.ru/portal/newspaper/ofernio/2012/8.doc>. – С. 10.

30. Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке разнораспределённых страховых выплат [Электронный ресурс] / Я.С. Бублик // Научное творчество молодежи : материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции : в 2 ч. 25–26 апреля 2013 г. – Электрон. дан. – Анжеро-Судженск, 2013. – Ч. 1. – 1 электрон. опт. диск. – С. 4-8.

31. Вальц О.В., Змеев О.А. Исследование модели фонда социального страхования // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11. Вып. 2. – С. 311-312.

32. Вальц О.В., Змеев О.А. Диффузионная аппроксимация модели фонда социального страхования с релейно-гистерезисным управлением капитала // Известия вузов. Физика. – 2004. – № 2. – С. 26-31.

33. Виноградов О.П. Вероятность разорения страховой компании, когда интервалы между выплатами имеют неодинаковые показательные распределения // Теория вероятностей и её применение. – 1998. – Т. 43. – Вып. 2.

34. Виноградов О.П. Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 1998. – Т.5. Вып. 1. – С. 134-149.

35. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 180 с.
36. Глухова Е.В., Капустин Е.В. Расчёт вероятности разорения страховой компании с учётом перестраховки // Известия вузов. Физика. – 2000. – № 4. – С. 3–9.
37. Голубин А.Ю. Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 8. – С. 133–143.
38. Госавтоинспекция МВД России [электронный ресурс] // официальный сайт : URL: [http:// www.gibdd.Ru/](http://www.gibdd.Ru/).
39. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
40. Григорьев Ю.Д., Хекало И. Ю. Что такое оптимальная франшиза? // Математические модели природы и общества. Труды конференции ММПЮ. – Красноярск, 2002. – С.51–55.
41. Григорьев Ю.Д., Куклин А.В. К вопросу о вычислении вероятности разорения страховой компании в классической модели риска // Труды первой всероссийской конференции по актуарной математике и смежным вопросам. Ч. 2. – Красноярск, 2002. – С. 99–105.
42. Григорьев Ю.Д., Куклин А.В. Вычисление нижних оценок вероятностей разорения в случае логнормального распределения размеров выплат // Математические модели природы и общества: Труды конференции ММПЮ - Красноярск, 2002. – С. 40–45.
43. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967.
44. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. –544 с.
45. Жилина Л.С. Оценка вероятности разорения страховой компании для некоторой модели страхования // Прикладная статистика, актуарна та фінасова математика (Донецк). – 2000. - №1. С .67–78.

46. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при конечном числе возможных клиентов // Известия вузов. Физика. –1999. –№ 4. – С. 34–39.

47. Змеев О.А. Математическая модель функционирования страховой компании с учётом банковского процента // Известия вузов. Физика. –2001. – №1. – С. 19–24.

48. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Известия вузов. Физика. –2003. –№3. – С. 83–87.

49. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования со случайными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Известия вузов. Физика. –2003. –№3. – С. 88–93.

50. Змеев О.А. Деятельность фонда социального страхования при релейно-гистерезисном управлении капиталом // Математическое моделирование. 2004. – Т.16. – №2. – С. 43–53.

51. Иголкин В.Н. О вычислении вероятности неразорения страховой компании // Вест. С. – Петербург. ун-та. – 2009. – Сер.10. – Вып.3. – С. 38–43.

52. Иголкин В.Н. Вычисление некоторых характеристик неразорения страховой компании с помощью модели Лундберга // Вестн. С. – Петербург. ун-та. – 2011. – Сер.10. – Вып.3. – С. 39–46.

53. Иголкин В.Н. Марковский вариант модели Лундберга – Крамера разорения страховой компании // Вест. С. – Петербург. ун-та. – 2012. – Сер.10. – Вып.1. – С. 27-32.

54. Калашников В., Константи́нидис А. Вероятность разорения // Фундаментальная и прикладная математика. – 1996. – Т.2. –№ 4. – С. 1005–1100.

55. Калашников В.В., Цициашвили Г.Ш. Асимптотически точные двухсторонние оценки вероятности разорения при наличии больших выплат. // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1998. – № 5. – Вып.1. – С. 66–82.

56. Капустин Е.В. Вычисление вероятности разорения страховой компании в случае выплат имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – №4 (21). – С. 47–52.

57. Карапетян Н.В. Оптимизация барьера выплаты дивидендов при гамма-распределении требований // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2009. – № 5. – С. 57–60.

58. Кац В.М., Лившиц К.И. О конкурентном взаимодействии двух страховых компаний на ограниченном страховом рынке // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т.9. - Вып. 2. – С. 389.

59. Кац В.М., Лившиц К.И., Назаров А.А. Исследование нестационарных бесконечно-линейных систем массового обслуживания и их применение к анализу экономико-математических моделей // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 275. – С. 189–192.

60. Кац В.М., Лившиц К.И. Характеристики страховой компании при малой нагрузке страховой премии // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2002. – № 1(1). – С. 159–163.

61. Кац В.М., Лившиц К.И. Влияние расходов на рекламу страховой компании // Известия вузов. Физика. – 2001. – Т.44. - № 1 – С. 28–33.

62. Кац В.М., Лившиц К.И. Условное время до разорения страховой компании // Известия вузов. Физика. – 2002. – № 2 – С. 64–70.

63. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциальном распределении страховых выплат и выплат по социальным программам // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 35–38.

64. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Управление капиталом фонда социального страхования // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 185–187.

65. Кокс Д., Смит В. Вероятность разорения. – М.: Советское радио, 1967. – 350 с.

66. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. – М.:Физматлит,2007. – 542 с.
67. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
68. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
69. Лившиц К.И. Вероятность разорения страховой компании для пуассоновской модели // Известия вузов. Физика. –1999. – Т.42. – № 4. – С. 28–33.
70. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 302–312.
71. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. – 2006. - № 293. – С. 38–44.
72. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – №18. – С. 302–308.
73. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
74. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. –232 с.
75. Медведев Г.А. Математические модели финансовых рисков. – Минск, БГУ. – 2001. – 291 с.
76. Министерство здравоохранения и социального развития РФ: [электронный ресурс] // официальный сайт : URL: [http:// www.minzdravsoc.Ru/](http://www.minzdravsoc.Ru/).
77. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 379 с.

78. Моисеев А.М. Математическая модель автомобильного страхования в виде СМО с повторным обращением // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. Томск: Издат. Дом. Том. ун-та. – 2013. – С. 188–190.
79. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
80. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
81. Налоговый кодекс РФ. Части I и II. – Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2006. – 650 с.
82. Наумов В.А. Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1978. – С. 67–73.
83. Ротарь В.И., Бенинг В.Е. Введение в математическую теорию страхования // Обзорение прикладной и промышленной математики 1994.- Г.Л. – Вып.5. – С. 699–779.
84. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2 т.т. – М.: Мир, 1967.- Т.1. – 498 с.
85. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования – Цюрих, 1988. – 147 с.
86. Эмбрехтс П., Клюппенберг К. Некоторые аспекты страховой математики // Теория вероятностей и её применение. – 1993.- Т. 38. – Вып.2. – С. 374–416.
87. Asmussen S. On the Ruin Problem for some Adapted Premium Rules. Probabilistic Analysis of Rare Events : Theory and Problems of Safety, Insurance and Ruin. – Riga, 1999. – P. 3–15.
88. Asmussen S. Risk theory in a Markovian environment // Scandinavian Actuarial Journal. – 2. – P. 69–100.
89. Bondarev B.V., Ragulina E.Yu. On the finite time survival probability of an insurance company with investments to the financial (B,S) market// Kibernetika i sistemny analiz. – 2012. – № 5. – P. 112–126.

90. Cai J., Yang H. Ruin in the perturbed compound Poisson risk process under interest force // *Advance in Applied probability*. – 2005. V. 37(3). – P. 819–835.
91. Chen Y., Ng K.W. The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negative dependent heavy – failed claims // *Insurance: Mathematics and Economics*. – 2007. – V. 40(3). – P. 415–423.
92. Gerber H.U. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. – Wharton School. University of Pennsylvania, 1979. – 164 p.
93. Gerber H.U., Shie E.S.W., Smith N/ Method for estimating the optimal dividend barrier and probability of ruin // *Insurance : Mathematics and Economics*. – 2007. – V. 42(2) – P. 243 – 254.
94. Golubin A.Y. Optimal insurance and reinsurance policies in the risk process // *ASTIN Bulletin*. – 2008. – V. 38(2). – P. 383–39–173.
96. Grandell J. Simple approximations of ruin probabilities. *Probabilistic Analysis of Rare events : Theory and problems of safety, Insurance and ruin*. – Riga, 1999. – P. 47–51.
97. Jasiniewicz H. Probability of ruin with variable premium rate in a Markovian environment // *Insurance : Mathematics and Economics*. – 2001. – V. 29 – P. 291 –296.
98. Karapetyan N.V. Optimization of a dividend strategy of an insurance company continuing its work after ruin // *Mosc. Univ. Math. Bull.* – 2012. – V. 2. – P. 86–88.
99. Kluppenberg C., Kyprianon A.E., Mallr R.A. Ruin probabilities and overshoots for general levy insurance risk processes // *The Annals of Applied Probability*. – 2004. V. 14(4) – P. 1766–1801.
100. Lih X.S., Pavlova K.P. The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy // *Insurance : Mathematics and Economics*. – 2006. – V. 38(1) – P. 57-80.

101. Li S., Lu Y. The decompositions of the discounted penalty functions and dividends – penalty identity in a Markov – Modulated risk model // *Astin Bulletin*, 2008, - V. 38(1) – P. 53–71.
102. Lu Y., Li S. On the Probability of Ruin in a Markov- modulated Risk Model Insurance : *Mathematics and Economics*. – 2005. – V. 37 (3) – P. 522–532.
103. Malinovskii V.K. Approximations and upper bounds an probabilities of large deviations in the problem of ruin within finite time // *Scand. Actuarial J.*, 1996. – P. 124–147.
104. Malinovskii V.K. Probabilities of ruin when the safety loading tends to zero. Laboratory of Actuarial Mathematics University of Copenhagen. Working Paper, 153, 1998. – 36 p.
105. Norberg R. Sensitivity Analysis in insurance and Finance // *Applied Stochastic Models and Inform. Processes*. Petrazovodsk. – 2002. – P. 121–124.
106. Panjer H.Y., Willmont G.E. *Insurance Risk Models*. – Society of Actuaries, 1992. – 442 p.
107. Reinhard J.M. On a class of semi – Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment // *ASTIN Bulletin*. – 1984. – V. 14(1) – P. 23–43.
108. Schmidli H. Estimation of the Lundberg coefficient for a Markov modulated risk model // *Scandinavian Actuarial Yournd*, 1997. – P. 48–57.
109. Schmidli H. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance // *The Annale of Applied Probability*. – 2002. – V. 12. – P. 890–907.
110. Snoussi M. The severity of ruin in Markov-modulated risk models// *Schweiz. Aktuarier. Mitt.* – 2002. – V. 1 – P. 31 – 43.
111. Tang Q., Tshitsiasvies G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete – time model with heavy – tailed insurance and financial risks // *Stochastic Processes and their Applications*. – 2003. – V. 108(2) – P. 299–325.

112. Wang G. A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion // Insurance : Mathematics and Economics. – 2001. – V. 28(1) – P. 49–59.

113. Wang G., Wu R. Distributions for the risk process with a stochastic return on investments // Stochastic processes and their application.- 2001. – V. 95(2) – P. 329–341.

114. Wu R., Wei L. The probability of ruin in a kind of Cox risk model with variable premium rate // Scandinavian Actuarial Journal. – 2004. – V. 2. – P. 121–132.

115. Wu Y. Bounds for the ruin probability under a Markovian modulated risk model // Commun. Statist. – Stochastic Models. – 1999. - V. 15(1). – P.125–136.

116. Zang Z., Yang H. On a risk model with stochastic premiums income and dependence between income and loss // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2010. – V. 234(1). – P. 44–57.