

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

№ 00 -

Панкратова Екатерина Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕОДНОРОДНЫХ  
БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СМО

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация  
на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
доцент Моисеева Светлана Петровна

Томск – 2016

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1 Исследование неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания вида <math>MAR M^{(n)} \infty</math></b>	<b>17</b>
1.1 Исследование вероятностных характеристик $MAR$ -потока разнотипных заявок . . . . .	17
1.2 Исследование неоднородной бесконечнолинейной СМО с входящим $MAR$ -потоком и $n$ типами обслуживающих приборов . . . . .	24
1.2.1 Математическая модель . . . . .	24
1.2.2 Вероятностные характеристики числа занятых приборов в системе $MAR M^{(n)} \infty$ . . . . .	27
1.2.3 Построение гауссовской аппроксимации числа занятых приборов методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания . . . . .	33
1.2.4 Модификация метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний управляющей входящим $MAR$ -потоком цепи Маркова . . . . .	43
1.3 Выводы по главе 1 . . . . .	48
<b>Глава 2 Исследование неоднородных систем массового обслуживания вида <math>GI M^{(n)} \infty</math></b>	<b>50</b>
2.1 Математическая модель рекуррентного потока разнотипных событий . . . . .	50
2.2 Исследование неоднородной бесконечнолинейной СМО с $n$ типами обслуживающих приборов и рекуррентным входящим потоком	53
2.2.1 Математическая модель . . . . .	53
2.2.2 Вероятностные характеристики числа занятых приборов в системе $GI M^{(n)} \infty$ . . . . .	55

2.2.3	Построение гауссовской аппроксимации числа занятых приборов методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания для СМО $GI M^{(n)} \infty$ . . . . .	61
2.2.4	Численная реализация . . . . .	68
2.3	Выводы по главе 2 . . . . .	69
<b>Глава 3 Исследование неоднородных немарковских бесконечнолинейных систем массового обслуживания вида <math>MMPP GI^{(n)} \infty</math> и <math>GI GI^{(n)} \infty</math> . . . . . 70</b>		
3.1	Модификация метода многомерного динамического просеивания . . . . .	70
3.2	Исследование неоднородных немарковских СМО . . . . .	72
3.2.1	Основное векторно-матричное дифференциальное уравнение для СМО $MMPP GI^{(n)} \infty$ . . . . .	72
3.2.2	Исследование системы $MMPP GI^{(n)} \infty$ методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах . . . . .	74
3.2.3	Система дифференциальных уравнений для характеристических функций неоднородных СМО $GI GI^{(n)} \infty$ . . . . .	82
3.2.4	Исследование системы $GI GI^{(n)} \infty$ методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах . . . . .	85
3.3	Выводы по главе 3 . . . . .	94
<b>Глава 4 Комплекс программ имитационного моделирования и численного анализа неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания . . . . . 95</b>		
4.1	Численная реализация нахождения допредельных характеристик и метода асимптотического анализа . . . . .	95

4.1.1	Программа вычисления допредельных значений вероятностных характеристик неоднородной системы $MAR M^{(n)} \infty$ . . . . .	96
4.1.2	Программа нахождения асимптотического распределения числа занятых приборов неоднородной системы $MAR M^{(n)} \infty$ . . . . .	99
4.1.3	Программа вычисления допредельных характеристик числа занятых приборов неоднородной системы $GI M^{(n)} \infty$ . . . . .	100
4.1.4	Программа нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов неоднородной системы $GI M^{(n)} \infty$ . . . . .	102
4.1.5	Программа нахождения асимптотического распределения числа занятых приборов неоднородной системы $MAR GI^{(n)} \infty$ . . . . .	102
4.1.6	Программа нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов неоднородной системы $GI GI^{(n)} \infty$	105
4.2	Имитационное моделирование систем массового обслуживания разнотипных заявок с произвольным временем обслуживания . . . . .	107
4.2.1	Алгоритм имитационного моделирования . . . . .	107
4.2.2	Анализ результатов, полученных с помощью имитационного моделирования . . . . .	110
4.3	Выводы по главе 4 . . . . .	113
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>114</b>
	<b>Список использованной литературы . . . . .</b>	<b>116</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Телекоммуникации в современном мире являются составной частью практически всех общественных процессов. Например, очевидна огромная роль телекоммуникаций в развитии мировой экономики и экономики России. В условиях постоянного роста требований к эффективности устройств, применяемых в системах передачи и обработки информации, к сокращению сроков исследования и разработки новых телекоммуникационных систем и сетей [12] актуально их исследование с помощью построения математических моделей. Случайный характер процессов формирования, обработки и передачи данных обуславливает необходимость применения стохастических моделей, в качестве которых широко используются модели массового обслуживания, представляющие собой системы и сети массового обслуживания различной конфигурации.

Многие актуальные проблемы, связанные с построением математических моделей реальных процессов информационных сетей и обеспечением их надежности и качества функционирования, формулируются в терминах теории массового обслуживания. Методы решения, развиваемые в рамках этой теории, оказываются вполне пригодными для использования в практических приложениях.

В классической теории массового обслуживания существует не так много моделей, исследование которых удастся выполнить аналитическими методами и получить окончательные результаты в виде формул для вероятностно-временных характеристик исследуемых систем массового обслуживания. К таким системам относятся, прежде всего, марковские системы, процесс изменения состояний которых определяется цепями Маркова, то есть дискретными марковскими процессами. Это также однолинейные полумарковские системы, исследование которых реализуется методом вложенных цепей Маркова, в частности, с использованием формулы Поллачека-Хинчина. Также известны формулы Эрланга для  $N$ -линейных систем с произвольным временем обслуживания, процесс изменения состояний которых является немарковским. В этих моделях входящие потоки определены классом стационарных пуассоновских либо рекуррентных потоков.

В середине XX века на фоне повышенного интереса к теории массового обслуживания в свет выходит множество публикаций и монографий, посвященных исследованию систем массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком [4, 9, 79, 81]. В это время ежегодно публиковалось большое количество статей, появились многочисленные монографии по различным проблемам ТМО. В этой области следует отметить работы Г. П. Башарина [3, 6], П. П. Бочарова и А. В. Печинкина [8, 10, 74], А. Н. Дудина [21, 22], В. А. Ивницкого [29, 30], Ю. В. Малинковского [34], М. А. Матальцкого [41, 42], Г. И. Фалина, J. R. Artalejo, J. G. Tempelton [96, 112, 113], L. Kleinrock [121], T. Yang [142] и многих других.

Затем интерес к ТМО несколько ослабел. Это было связано с несколькими причинами. С одной стороны, характерной особенностью задач ТМО является необходимость почти для каждой СМО искать собственные методы исследования, а с другой — большой интерес исследователей к ТМО привел к тому, что задачи, допускающие простые решения, особенно в вычислительном плане, уже были решены. Кроме того, у аналитических методов исследования СМО появился серьезный конкурент — имитационное моделирование, основы которого были заложены американскими учеными и изобретателями Джеффри Гордоном и Джемом Форрестером в 1960-х годах [91], основателем же имитационного моделирования в России считается Н. П. Бусленко [11].

К началу семидесятых годов прошлого века в основном были решены наиболее интересные математические задачи теории массового обслуживания, связанные с анализом систем, на вход которых поступают пуассоновские потоки заявок. В это же время появляются первые сети ЭВМ. Статистический анализ телекоммуникационных потоков в таких сетях показал существенную неадекватность модели пуассоновского потока реальному трафику [39, 122, 135]. Возникшая проблема построения более адекватных моделей потоков привела к созданию математических моделей дважды стохастических потоков Кокса [4, 33, 126] специальных или коррелированных потоков [23, 60] и методов оценки параметров таких потоков [20, 36].

В те же семидесятые годы в ТМО предлагаются и начинают интенсивно рассматриваться системы обслуживания, принципиально отличающиеся от систем с ожиданием и систем с отказами, которые получили название

RQ-систем (Retrial Queueing Systems) [96,97] или систем с повторными вызовами.

Особенностью протоколов множественного доступа является то, что на множестве станций не вводится изначальной строгой очередности. Каждая станция после появления у нее готового пакета вправе его передавать сразу же, как только обнаружит канал свободным. При этом не исключена возможность, что она попадет в конфликт, то есть ее пакет столкнется с пакетом другой станции. В подобных случаях станция прекращает передачу и генерирует случайную задержку, после которой вновь пытается занять канал. Модели, учитывающие интервалы недоступности прибора (моноканала), когда реализуется этап оповещения о конфликте и проводится комплексное исследование процессов функционирования прибора и источника повторных вызовов, были рассмотрены А. Н. Дудиным [106,107], А. А. Назаровым [35, 58, 59, 61], И. И. Хомичковым [92] и др.

Математические методы исследования и моделирования информационных систем, основанные на теории массового обслуживания и теории телетрафика, вызывают интерес научного сообщества и в наши дни [1, 2, 13, 43, 85].

В отличие от вышеперечисленных систем, в системах с неограниченным числом обслуживающих приборов нет очередей и отказов в обслуживании. Такие системы тоже вызывают большой интерес у исследователей и встречаются во многих научных трудах. Например, в статьях П. П. Бочарова и А. В. Печинкина [72, 75], Р. Abaev [94], В. D. Auria [98], D. Baum и L. Breuer [100, 101], J. Vojarovich и L. Marchenko [102], E. A. van Doorn и A. A. Jagers [104], N. G. Duffield [109], C. Fricker и M. R. Jaibi [114], E. Girlich [115], A. K. Jayawardene и O. Kella [119], M. Parulekar [134] и многих других. Также можно отметить работы И. Р. Гарайшиной [16], А. В. Зорина [27], К. И. Лившиц [19, 37, 125], М. Г. Носовой [62], М. А. Федоткина [90], M. Schwarz [137], посвященные математическому моделированию транспортных потоков, демографических процессов и процессов изменения численности клиентов пенсионных и некоммерческих фондов, торговых и страховых компаний.

В работах А. В. Печинкина, В. В. Рыкова и Д. В. Ефросинина рассматривается важная для приложений задача анализа многолинейной си-

системы массового обслуживания с ненадежными и неоднородными приборами [24, 73]. Предложены методы расчета стационарного распределения числа заявок в системе при различных вариантах функционирования системы.

Статья А. И. Зейфмана [143] посвящена изучению предельных характеристик системы обслуживания с катастрофами в предположении, что интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе. Получены достаточные условия слабой эргодичности процесса, описывающего число требований в системе, и соответствующие оценки. В работах Е. В. Морозова [53, 54] развивается метод регенерации для исследования условия существования стационарности в СМО различной конфигурации. В работах О. М. Тихоненко [86, 87] рассматриваются актуальные задачи проектирования информационных систем, учитывающих зависимость между объемом заявки и временем ее обслуживания.

Помимо решения задач, связанных с конкретной практической проблемой, продолжается разработка методов решения задач в некотором классе моделей. Как уже было отмечено, ТМО предлагает достаточно много различных подходов к решению задач, связанных с марковскими моделями, когда время обслуживания имеет экспоненциальное распределение. К таким методам относятся метод производящих функций, метод начальных моментов, метод предельной декомпозиции [25, 49]. Для исследования немарковских СМО, то есть систем с непуассоновским входящим потоком и неэкспоненциальным временем обслуживания, в настоящее время предлагается использовать метод динамического просеивания (метод просеянного потока) и метод выделения первого скачка [44]. В частности, в работе [130] показано, что для СМО с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом обслуживающих приборов и произвольным временем обслуживания в асимптотическом условии высокой интенсивности входящего потока оба подхода дают одинаковые результаты. Это в некотором смысле подтверждает правомерность применения любого из этих методов для анализа таких систем. В итоге, исследователи получают в свое распоряжение два эквивалентных (в смысле получаемых результатов) инструмента для работы с немарковскими моделями массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Выбор конкретного метода исследования может

зависеть от предпочтений исследователя, либо ограничиваться возможностью его применения. В частности, пока не удалось успешно применить метод выделения первого скачка к исследованию систем с входящим МАР или полумарковским потоком, в то время как метод динамического просеивания позволяет получить необходимые результаты.

Также достаточно широко используется метод, заключающийся в расширении фазового пространства состояний системы таким образом, что соответствующий многомерный случайный процесс их изменения во времени оказывается марковским (метод марковизации) [57, 78, 82, 84]. В тех случаях, когда не удастся провести исследование аналитически, используются асимптотические методы [7, 55, 60, 116]. В настоящее время можно выделить несколько классов предельных условий. Наиболее часто применяемыми являются условие высокой интенсивности входящего потока и предельное условие большой загрузки систем с ожиданием, реже встречаются предельное условие растущего времени обслуживания, условие большой задержки заявок в RQ-системах, условие предельно-редких изменений состояний специальных потоков (ММРР, МАР, SM) [17, 56].

Одной из модификаций СМО являются системы с неоднородными приборами [110, 111, 136], которые применяются для описания процессов в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах. Как правило, в качестве математических моделей таких процессов используются системы с непуассоновскими входящими потоками [38, 139, 140]. Впервые системы с неординарными пуассоновскими входящими потоками и экспоненциальным временем обслуживания описаны в работах украинских ученых Е. А. Лебедева, А. А. Чечельницкого [93, 123, 124]. СМО с параллельно функционирующими блоками можно встретить в статьях Movaghar [129], Kargahi M. [120], D. G. Down [105], N. Vambos [95], G. Michailidis [99], И. А. Синяковой [28, 48, 50, 52, 83, 118, 127, 128] и многих других [103, 117, 138]. В этих работах рассматриваются системы параллельного обслуживания различной конфигурации: однолинейные СМО с конечным и бесконечным буфером, приоритетным обслуживанием, нетерпеливыми заявками и общим ординарным входящим потоком; СМО с двумя и более блоками обслуживания с конечным числом приборов и общей конечной очередью.

В работах Г. П. Башарина, К. Е. Самуйлова, Ю. В. Гайдамака [5, 14, 15, 80] рассматриваются однолинейные модели массового обслуживания, в том числе и с параллельно функционирующими блоками, для расчета качества обслуживания в сетях сотовой подвижной связи (ССПС) с приоритетной передачей вызовов, для оценки производительности транзитного пункта сигнализации, описания процесса «фотонизации» транспортных сетей и функционирования SIP-сервера в нормальном и перегруженном режимах. Но, как правило, в данных работах все заявки в группе являются однотипными и время их обслуживания одинаково распределено, что не всегда применимо для описания реальных вычислительных процессов.

Еще одна особенность наиболее часто встречающихся в практике задач заключается в том, что сигналы приходят поодиночке, но они имеют абсолютно разную природу и соответственно требуют совершенно разного обслуживания. Такие ситуации моделируются с помощью неоднородных (гетерогенных) СМО с ординарными входящими потоками разнотипных заявок. К СМО с разнотипным обслуживанием обращаются в своих работах У. Dudovskaya и О. Yakubovich [108], Wüchner P. [141] и Zeifman A. [143]. Статья P. Wüchner посвящена исследованию СМО с конечным числом разнотипных обслуживающих приборов, которые подвержены случайным поломкам и восстановлению. Отличием таких моделей является введение различных параметров обслуживания и различных законов обслуживания наряду с ненадежностью серверов, которые оказывают существенное влияние на функционирование системы и, таким образом, это играет важную роль в практическом моделировании компьютерных и коммуникационных систем. Можно отметить работу А. Zeifman, в которой введена и рассмотрена разновидность Эрланговской системы с потерями и групповым обслуживанием. Исследования СМО с разнотипными заявками и разнородным обслуживанием наиболее актуальны в наше время применительно к телекоммуникационным системам и вычислительным сетям.

В настоящей диссертационной работе проводится исследование систем массового обслуживания с разнородным обслуживанием, на вход которых поступают ординарные специальные потоки разнотипных заявок, а именно МАР-поток и рекуррентный.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертации является построение и исследование математических моделей неоднородных немарковских бесконечнолинейных СМО со специальными входящими потоками разнотипных заявок.

Задачи:

1. Построение математических моделей неоднородных бесконечнолинейных (гетерогенных) СМО с входящими МАР- и рекуррентным потоками разнотипных заявок.

2. Нахождение основных вероятностных характеристик числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемых системах методом моментов.

3. Разработка асимптотических методов исследования систем в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах различного типа и предельно редких изменений состояний управляющей МАР-поток цепи Маркова.

4. Разработка проблемно-ориентированных программ имитационного моделирования и численного анализа для оценки области применимости полученных асимптотических результатов.

**Научная новизна результатов, представленных в диссертации,** состоит в следующем:

1. Предложены новые математические модели неоднородных (гетерогенных) бесконечнолинейных СМО с различными типами обслуживающих приборов, позволяющие учитывать неоднородность поступающих заявок, требующих различного времени обслуживания, что более адекватно описывает реальные информационные системы.

2. Получены аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов каждого типа в системах с входящими МАР- и рекуррентным потоками,  $n$  типами обслуживающих приборов и экспоненциальным временем обслуживания. Выявлены корреляционная связь между компонентами многомерного случайного вектора — числа занятых приборов каждого типа и факторы, влияющие на ее усиление.

3. Предложено новое асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах различного типа, применение которого для исследования систем типа  $МАР|M^{(n)}|\infty$  и  $GI|M^{(n)}|\infty$  позволило дока-

зять, что распределение числа занятых приборов в них можно аппроксимировать многомерным гауссовским.

4. Впервые показано, что при условии предельно редких изменений состояний управляющей МАР-потокот цепи Маркова асимптотическая характеристическая функция числа занятых приборов в системе  $МАР|M^{(n)}|\infty$  имеет вид взвешенной суммы пуассоновских распределений.

5. Предложена модификация метода просеянного потока, позволяющая, в отличие от существующих подходов, выполнять анализ многомерных процессов в гетерогенных СМО вида  $ММРР|GI^{(n)}|\infty, GI|GI^{(n)}|\infty$ . Применение метода позволяет проблему исследования немарковских СМО с разнотипным обслуживанием (с произвольными функциями распределения времени обслуживания) свести к задаче анализа многомерного просеянного нестационарного потока, решение которой проводится методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах.

**Методы исследования.** Для исследования рассмотренных моделей используется метод математического моделирования, аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений и информационные технологии.

В качестве методов исследования СМО применяются метод начальных моментов и модификация метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания требований на приборах. А также модификация метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний управляющей цепи Маркова.

Оригинальным авторским методом исследования систем с произвольной функцией распределения времени обслуживания является модификация многомерного метода просеянного потока.

Обработка результатов имитационного моделирования проводится методами математической статистики. Результаты, полученные в работе, имеют как теоретическое, так и практическое значения.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Модели гетерогенных СМО позволяют существенно расширить круг решаемых задач в теории массового обслуживания. Предложенные асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах разного типа и

модификация метода многомерного динамического просеивания являются вкладом в развитие методов, используемых для анализа систем массового обслуживания.

Системы массового обслуживания с неоднородными приборами актуально использовать в качестве математической модели работы гибридного канала, с помощью которой можно рассчитать его характеристики производительности и надежности в работе.

Кроме того, разработан комплекс проблемно-ориентированных программ имитационного моделирования и численного анализа распределений для оценки области применимости полученных асимптотических результатов, позволяющий решать ряд практически значимых задач при проектировании реальных телекоммуникационных систем.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается математически корректными выводами и доказательствами теорем, представленными в работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей, как между собой, так и с известными в теории массового обслуживания результатами, а также многочисленными экспериментами с применением имитационного моделирования и численного анализа.

**Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.** Автор лично участвовал в получении всех результатов, изложенных в работе, а именно в разработке и применении методов исследования рассматриваемых моделей, выводе всех формул, доказательстве всех представленных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания, выполнении численного анализа полученных результатов.

**Связь работы с крупным научным проектом.** Результаты диссертационной работы были получены в рамках выполнения следующих научных проектов:

– госзадание минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2013 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем

обработки, хранения, передачи и защиты информации» № 8.4055.2011, номер государственной регистрации 01201261193;

– научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (2014-2016г.).

**Публикации.** По тематике диссертации опубликовано 16 работ, из них 2 статьи в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий и рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций:

1. Убонова, Е. Г. Гауссовская аппроксимация для системы массового обслуживания ММРР/М/∞ с разнотипным обслуживанием / Е. Г. Убонова, Е. В. Панкратова // Известия вузов. Физика. 2015. — Т. 58, № 11/2. — С. 225–229.

2. Моисеева, С. П. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления / С. П. Моисеева, Е. В. Панкратова, Е. Г. Убонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. — № 2 (35). — С. 46–53.

3 статьи в сборниках материалов конференций, индексируемых Web of Science и Scopus:

1. Pankratova, E. Queueing System MAP|M|∞ with  $n$  Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Information Technologies and Mathematical Modelling; A. Dudin et al (Eds.). — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — Communications in Computer and Information Science, vol. 487. — P. 356–366.

2. Pankratova, E. Queueing System with Renewal Arrival Process and Two Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Proc. of the IEEE Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems, ICUMT 2014 (St. Petersburg, October 6–8, 2014). — St. Petersburg: IEEE, 2015. — P. 514–517.

3. Pankratova, E. Queueing System  $GI|GI|_{\infty}$  with  $n$  Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications; A. Dudin et al (Eds.). — Springer International Publishing Switzerland, 2015. — Communications in Computer and Information Science, vol. 564. — P. 216–225.

Получены 2 свидетельства о регистрации электронного ресурса:

1. Панкратов, И. В. Программное обеспечение «МАР-модель» [Электронный ресурс] / И. В. Панкратов, Е. В. Панкратова. — Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». — Свид. о рег. № 21261, дата рег.: 20.10.2015 г.

2. Панкратов, И. В. GI-модель [Электронный ресурс] / И. В. Панкратов, Е. В. Панкратова. — Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». — Свид. о рег. № 21262, дата рег.: 20.10.2015 г.

А также 9 работ опубликованы в материалах Международных и Всероссийских конференций [47, 65–71, 89].

**Апробация работы.** Основные положения работы и отдельные ее вопросы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. XI Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2012.

2. Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Москва, 2013.

3. 17-ая Международная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2013)». Москва, 2013.

4. XII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2013)». Анжеро-Судженск, 2013.

5. X Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Пос.Катунь Алтайского края, 2014.

6. 6th International Congress «Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)». Санкт-Петербург, 2014.

7. XIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014)». Анжеро-Судженск, 2014.

8. Международная научная конференция, посвященная 80-летию проф. Г. А. Медведева «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения». Минск, 2015.

9. XIX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2015.

10. 18-ая Международная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015)». Москва, 2015.

11. Международная научная конференция «Information Technologies for Complex System Analysis and Synthesis. The Second International Summer School». Анапа, 2015.

12. XIV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2015)». Анжеро-Судженск, 2015.

13. Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Москва, 2016.

# Глава 1 Исследование неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания вида $\text{MAP}|\text{M}^{(n)}|\infty$

В системах с неограниченным числом обслуживающих приборов нет очередей и отказов в обслуживании. Такие системы рассматриваются в научных статьях П. П. Бочарова и А. В. Печинкина [10], В. D. Auria [98], D. Baum и L. Breuer [100, 101], E. A. van Doorn и A. A. Jagers [104], N. G. Duffield [109], C. Fricker и M. R. Jaibi [114], A. K. Jayawardene и O. Kella [119], M. Parulekar и A. M. Makowski [134] и многих других.

В данной главе исследуются математические модели неоднородных (гетерогенных) бесконечнолинейных СМО с входящим MAP-потокom разнотипных заявок.

Решается задача исследования многомерного случайного процесса, описывающего число занятых приборов каждого типа в рассматриваемых СМО. А именно, получены выражения, определяющие начальные моменты исследуемого процесса, а также проведено исследование систем методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах. Доказано, что распределение числа занятых приборов рассматриваемой системы при заданных асимптотических условиях можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением.

Кроме того, для СМО  $\text{MAP}|\text{M}^{(n)}|\infty$  предложена модификация метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего MAP-потока, результатом применения которой является аппроксимация характеристической функции числа занятых приборов системы в виде суммы пуассоновских распределений.

## 1.1 Исследование вероятностных характеристик MAP-потока разнотипных заявок

Рассмотрим MAP-поток разнотипных заявок (Рисунок 1.1), заданный управляющей цепью Маркова  $k(t)$  с конечным числом состояний  $K$  и опре-

деляемый матрицей инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q}$  и набором неотрицательных чисел  $\lambda_k, d_{\nu k}, \nu, k = 1, \dots, K$ . Заявка потока с вероятностью  $p_i$  относится к  $i$ -му типу и образует поток заявок  $i$ -ого типа. Поставим задачу нахождения основных вероятностно-временных характеристик  $n$ -мерного немарковского случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$ , описывающего число заявок потока каждого типа. Рассмотрим  $(n + 1)$ -мерный случайный марковский процесс  $\{k(t), l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$ , где  $k(t)$  — управляющая цепь Маркова.

Обозначим

$P(k, l_1, l_2, \dots, l_n, t) = P\{k(t) = k, l_1(t) = l_1, l_2(t) = l_2, \dots, l_n(t) = l_n\}$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  управляющая цепь Маркова находится в состоянии  $k$ , в потоке  $i$ -ого типа заявок  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

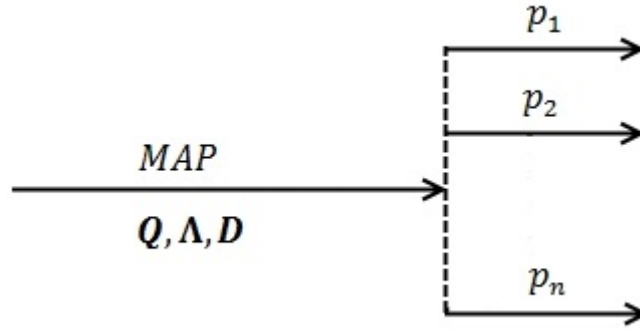


Рисунок 1.1 — МАР-поток разнотипных заявок

Для распределения вероятностей  $P(k, l_1, l_2, \dots, l_n, t)$  запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial t} = & \lambda_k \{p_1 P(k, l_1 - 1, \dots, l_n, t) + \dots + p_n P(k, l_1, \dots, l_n - 1, t) - \\ & - P(k, l_1, \dots, l_n, t)\} + \sum_{\nu=1}^K \{(1 - d_{\nu k}) P(\nu, l_1, \dots, l_n, t) + \\ & + d_{\nu k} (p_1 P(\nu, l_1 - 1, \dots, l_n, t) + \dots + \\ & + p_n P(\nu, l_1, \dots, l_n - 1, t))\} q_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Начальные условия определим в виде  $P(k, l_1, \dots, l_n, 0) = P(k, 0, \dots, 0, t) = R(k)$  ( $k = 1, \dots, K$ ), где  $R(k)$  — стационарное распределение вероятностей цепи Маркова  $k(t)$ .

Введем характеристические функции следующего вида:

$$H(k, u_1, \dots, u_n, t) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} e^{ju_1 l_1} \times \dots \times e^{ju_n l_n} P(k, l_1, \dots, l_n, t),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Из (1.1) получаем систему дифференциальных уравнений для характеристических функций  $H(k, u_1, \dots, u_n, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} &= \lambda_k \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} H(k, u_1, \dots, u_n, t) - H(k, u_1, \dots, u_n, t) \right) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^K H(\nu, u_1, \dots, u_n, t) \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) d_{\nu k} \right] q_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Начальные условия:

$$H(k, 0, \dots, 0, t) = R(k), \quad k = 1, \dots, K,$$

где  $R(k)$  — стационарное распределение вероятностей цепи Маркова  $k(t)$ .

Обозначим

- $\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t) = [H(1, u_1, \dots, u_n, t), \dots, H(K, u_1, \dots, u_n, t)]$  — вектор-строка, компонентами которой являются характеристические функции случайного процесса  $\{k(t), l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  для каждого состояния управляющей цепи Маркова  $k(t)$ ;

- $\mathbf{Q}$  — матрица инфинитезимальных характеристик с элементами  $q_{\nu k}$ ,  $\nu = 1, \dots, K$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;

- $\mathbf{\Lambda}$  — диагональная матрица с элементами  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) на главной диагонали;

- $\mathbf{A}$  — произведение Адамара матриц  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{Q}$ , то есть матрица из элементов  $d_{\nu k} q_{\nu k}$ ,  $\nu = 1, \dots, K$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;

- $\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{A}$ .

Учитывая введенные обозначения и (1.2), запишем векторно-матричное уравнение для векторной характеристической функции  $\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t) \left[ \mathbf{Q} + \mathbf{B} \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) \right], \quad (1.3)$$

$$\mathbf{H}(0, \dots, 0, t) = \mathbf{r} = [R(1), R(2), \dots, R(K)].$$

Обозначим  $\mathbf{fm}_i(t) = [fm_i(1, t), fm_i(2, t), \dots, fm_i(K, t)]$ ,  $i = 1, \dots, n$  — вектор-строка первых моментов (first moment) для заявок потока  $i$ -ого типа.

По свойствам характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j \mathbf{fm}_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда, продифференцировав (1.3) по  $u_i$  при  $u_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (СЛНДУ)

$$\frac{\partial \mathbf{fm}_i(t)}{\partial t} = \mathbf{fm}_i(t) \mathbf{Q} + p_i \mathbf{r} \mathbf{B} \quad (1.4)$$

для нахождения вектор-строки первых моментов числа заявок  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ).

Нетрудно показать, что среднее число заявок  $i$ -ого типа определяется как

$$\mathbf{fm}_i(t) = p_i \mathbf{k} t, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{r} \mathbf{B} \mathbf{e}$  — интенсивность входящего МАР-потока, а  $\mathbf{e}$  — единичный вектор-столбец.

Из свойств характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t)}{\partial u_i^2} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j^2 \mathbf{sm}_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\mathbf{sm}_i(t) = [sm_i(1, t), sm_i(2, t), \dots, sm_i(K, t)]$  — вектор-строка вторых моментов (second moment) для потока заявок  $i$ -ого типа.

Продифференцировав (1.3) дважды по  $u_i$  при  $u_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , получим следующую СЛНДУ:

$$\frac{\partial \mathbf{sm}_i(t)}{\partial t} = \mathbf{sm}_i(t)\mathbf{Q} + 2p_i \mathbf{fm}_i(t)\mathbf{B} + p_i \mathbf{rB}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{fm}_i(t)$  — решение системы (1.4).

Общее решение системы (1.4) есть сумма общего решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений (СЛОДУ)

$$\frac{\partial \mathbf{fm}_i(t)}{\partial t} = \mathbf{fm}_i(t)\mathbf{Q}$$

и частного решения СЛНДУ (1.4). Общее решение СЛОДУ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{fm}_i(t) = \mathbf{c} \exp(t\mathbf{Q}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{c} = (C_1, \dots, C_K)$  — произвольная  $K$ -мерная вектор-строка.

Рассмотрим частный случай, когда управляющая цепь Маркова  $k(t)$  имеет только два состояния, то есть  $K = 2$  в потоке заявки только двух типов ( $n = 2$ ).

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.1** *Среднее число заявок  $i$ -ого типа  $fm_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) МАР-потока разнотипных заявок имеет вид*

$$fm_i = p_i \mathbf{rB} \int_0^t \exp((t-x)\mathbf{Q}) dx \mathbf{e}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{e}$  - единичный вектор-столбец.

*Доказательство.* Воспользуемся следующим алгоритмом нахождения вида матричной экспоненты:

- находим собственные значения  $\delta_i$ , ( $i = 1, 2$ ) матрицы  $\mathbf{Q}$ . Для этого запишем характеристическое уравнение для СЛОДУ:

$$\begin{vmatrix} -q_{12} - \delta & q_{12} \\ q_{21} & -q_{21} - \delta \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = -(q_{12} + q_{21})$ ;

- вычисляем собственные вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{12}t \\ -q_{21}t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} q_{12} \\ -q_{21} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

- из векторов  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  составляем невырожденную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} \\ 1 & -q_{21} \end{bmatrix};$$

- находим нормальную жорданову форму для матрицы  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(q_{12} + q_{21}) \end{bmatrix};$$

- составляем матрицу  $\exp(t\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-(q_{12}+q_{21})t} \end{bmatrix}$ ;

- вычисляем  $\exp(t\mathbf{Q}) = \mathbf{H}\exp(t\mathbf{J})\mathbf{H}^{-1}$

$$\exp(t\mathbf{Q}) = \frac{1}{q_{12} + q_{21}} \begin{bmatrix} q_{21} + q_{12}e^{-(q_{12}+q_{21})t} & q_{12} - q_{12}e^{-(q_{12}+q_{21})t} \\ q_{21} - q_{21}e^{-(q_{12}+q_{21})t} & q_{12} + q_{21}e^{-(q_{12}+q_{21})t} \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$

Таким образом, общее решение СЛЮДУ имеет вид  $\mathbf{f}\mathbf{m}_i(t) = \mathbf{c} \exp(t\mathbf{Q})$ , ( $i = 1, 2$ ), где  $\exp(t\mathbf{Q})$  имеет вид (1.10). Для того чтобы найти частное решение СЛНДУ, положим  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) = (C_1(t), C_2(t))$ . Тогда, учитывая, что  $d\mathbf{f}\mathbf{m}_i(t) = d\mathbf{c}(t)\exp(t\mathbf{Q}) + \mathbf{c}(t)\exp(t\mathbf{Q})\mathbf{Q}$ , ( $i = 1, 2$ ), система (1.4) примет вид

$$d\mathbf{c}(t) = p_i \mathbf{r}\mathbf{B}(\exp(t\mathbf{Q}))^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Несложно показать, что  $(\mathbf{exp}(t\mathbf{Q}))^{-1} = \mathbf{exp}(-t\mathbf{Q})$ . Тогда имеем выражение для вычисления  $\mathbf{c}(t)$  следующего вида:

$$\mathbf{c}(t) = p_i \mathbf{rB} \int_0^t \mathbf{exp}(-x\mathbf{Q}) dx, \quad i = 1, 2.$$

Тогда общее решение СЛНДУ (1.4) имеет вид

$$\mathbf{fm}_i(t) = p_i \mathbf{rB} \int_0^t \mathbf{exp}(t-x)\mathbf{Q} dx + \mathbf{c} \mathbf{exp}(t\mathbf{Q}), \quad i = 1, 2,$$

где  $\mathbf{c} = (C_1, C_2)$  определяется из начальных условий  $\mathbf{fm}_i(0) = (0, 0)$ , откуда очевидно, что  $\mathbf{c} = (0, 0)$ .

Таким образом,

$$\mathbf{fm}_i(t) = p_i \mathbf{rB} \int_0^t \mathbf{exp}((t-x)\mathbf{Q}) dx, \quad i = 1, 2, \quad (1.11)$$

где вид  $\mathbf{exp}((t-x)\mathbf{Q})$  определяется выражением (1.10).

Просуммируем все уравнения системы (1.11) и получим выражение (1.8) для нахождения среднего числа заявок  $i$ -ого ( $i = 1, 2$ ) типа МАР-потока разнотипных заявок.

*Теорема доказана.*

### **Моменты второго порядка.**

Подставив (1.11) в (1.6), можно записать СЛНДУ для начальных моментов второго порядка для потока заявок  $i$ -ого типа ( $i = 1, 2$ ) МАР-потока разнотипных заявок:

$$\frac{\partial \mathbf{sm}_i(t)}{\partial t} = \mathbf{sm}_i(t)\mathbf{Q} + 2p_i^2 \mathbf{rB} \int_0^t \mathbf{exp}((t-x)\mathbf{Q}) dx \mathbf{B} + p_i \mathbf{rB}. \quad (1.12)$$

По свойствам характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t)}{\partial u_i \partial u_g} \right|_{u_1 = 0, \dots, u_n = 0} = j^2 \mathbf{cm}_{ig}(t), \quad i, g = 1, \dots, n,$$

где  $\mathbf{cm}_{ig}(t) = [cm_{ig}(1, t), cm_{ig}(2, t), \dots, cm_{ig}(K, t)]$  — вектор-строка корреляционных моментов (correlation moment) для потоков заявок  $i$ -ого и  $g$ -ого типа.

Тогда, продифференцировав (1.3) по  $u_i$  и по  $u_g$  и положив  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ , имеем

$$\frac{\partial \mathbf{cm}_{ig}(t)}{\partial t} = \mathbf{cm}_{ig}(t)\mathbf{Q} + p_g \mathbf{fm}_i(t)\mathbf{B} + p_i \mathbf{fm}_g(t)\mathbf{B}, \quad i, g = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

Учитывая выражение (1.11), получим следующее дифференциальное уравнение для корреляционного момента  $cm_{ig}(t) = \mathbf{cm}_{ig}(t)\mathbf{e}$  в частном случае, когда в потоке всего два типа заявок:

$$\frac{\partial cm_{ig}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{cm}_{ig}(t)}{\partial t} \mathbf{e} = 2p_i p_g \mathbf{rB} \int_0^t \exp((t-x)\mathbf{Q}) dx \mathbf{rB} \mathbf{e}, \quad i, g = 1, 2,$$

где  $\mathbf{e}$  - единичный вектор-столбец.

Таким образом, полученные формулы позволяют найти допредельные характеристики двумерного немарковского случайного процесса, характеризующего число заявок первого и второго типа в МАР-потоке с разнотипными заявками.

## 1.2 Исследование неоднородной бесконечнолинейной СМО с входящим МАР-потокком и $n$ типами обслуживающих приборов

### 1.2.1 Математическая модель

Рассмотрим СМО  $\text{МАР}|M^{(n)}|_{\infty}$  с  $n$  типами неоднородных (в смысле скорости обслуживания) [24] обслуживающих приборов (Рисунок 1.2), на вход которой поступает МАР-поток разнотипных заявок.

Дисциплину обслуживания определим следующим образом. Заявки, поступившие в систему, с вероятностью  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) обслуживаются в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), соответствующим типу заявки. Вероятности  $p_i$  удовлетворяют условию нормировки  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

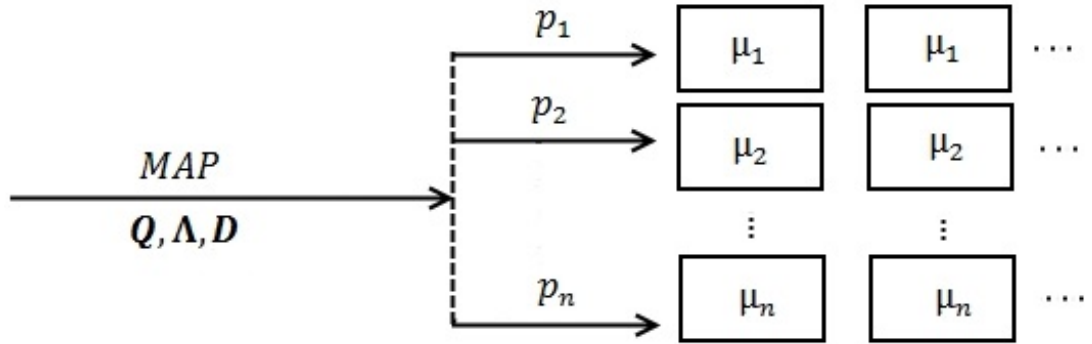


Рисунок 1.2 — СМО  $\text{MAP} | M^{(n)} | \infty$  с разнотипным обслуживанием

Поставим задачу исследования  $n$ -мерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$ , где  $l_i(t)$  — число занятых приборов  $i$ -ого типа в системе в момент времени  $t$ . Очевидно, что исследуемый случайный процесс не является марковским.

Воспользуемся методом "внешнего" марковизирования [16, 22, 32, 44, 78], который заключается во введении дополнительных переменных таким образом, чтобы исследуемый многомерный случайный процесс стал марковским.

Для систем с входящим MAP-потокм будем рассматривать  $(n + 1)$ -мерный марковский случайный процесс  $\{k(t), l_1(t), \dots, l_n(t)\}$ , где  $k(t) = 1, \dots, K$  — состояния управляющей потоком цепи Маркова.

Определим совместное распределение вероятностей  $P(k, l_1, \dots, l_n, t) = P\{k(t) = k, l_1(t) = l_1, \dots, l_n(t) = l_n\}$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $l_i = 0, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, n$  и запишем для него систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial t} = & \left( -\lambda_k - \sum_{i=1}^n l_i \mu_i \right) P(k, l_1, \dots, l_n, t) + \\ & + P(k, l_1 - 1, \dots, l_n, t) \lambda_k p_1 + \dots + P(k, l_1, \dots, l_n - 1, t) \lambda_k p_n + \\ & + P(k, l_1 + 1, \dots, l_n, t) (l_1 + 1) \mu_1 + \dots + P(k, l_1, \dots, l_n + 1, t) (l_n + 1) \mu_n + \\ & + \sum_{\nu=1}^K \left\{ (1 - d_{\nu k}) P(\nu, l_1, \dots, l_n, t) + d_{\nu k} (p_1 P(\nu, l_1 - 1, \dots, l_n, t) + \dots \right. \\ & \left. + p_n P(\nu, l_1, \dots, l_n - 1, t)) \right\} q_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, K, l_i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Начальные условия определим в виде

$$P(k, l_1, \dots, l_n, 0) = r(k), \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.15)$$

Решение системы (1.14) будем искать при стационарном режиме функционирования рассматриваемой системы. Обозначим  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(k, l_1, \dots, l_n, t) = \Pi(k, l_1, \dots, l_n)$ ,  $k = 1, \dots, K$ .

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k, u_1, \dots, u_n) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} e^{ju_1 l_1} \times \dots \times e^{ju_n l_n} \Pi(k, l_1, \dots, l_n), \quad (1.16)$$

$$k = 1, \dots, K, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Тогда система (1.14) для характеристической функции будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n \mu_i j (e^{-ju_i} - 1) \frac{\partial H(k, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \lambda_k \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) H(k, u_1, \dots, u_n) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^K H(\nu, u_1, \dots, u_n) \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) d_{\nu k} \right] q_{\nu k}. \quad (1.17)$$

Начальные условия (1.15) примут вид

$$H(k, 0, \dots, 0) = r(k), \quad k = 1, \dots, K.$$

Обозначим

•  $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$  — вектор стационарного распределения вероятностей управляющей цепи Маркова, определяемый системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор-столбец;

•  $\mathbf{D}$  — матрица с элементами  $d_{\nu k}$ , где  $d_{\nu k}$  ( $\nu \neq k$ ) — вероятности наступления событий в момент изменения состояния управляющей цепи Маркова,  $d_{kk} = 0$ ,  $\nu, k = 1, \dots, K$ ;

- $\Lambda$  — диагональная матрица с элементами  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) на главной диагонали;
- $\mathbf{A}$  — произведение Адамара матриц  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{Q}$ , то есть матрица из элементов  $d_{\nu k} q_{\nu k}$ ,  $\nu = 1, \dots, K$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;
- $\mathbf{B} = \Lambda + \mathbf{A}$ ;
- $\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) = [H(1, u_1, \dots, u_n), \dots, H(K, u_1, \dots, u_n)]$  — вектор-строка, компонентами которой являются частичные характеристические функции вида (1.16).

Тогда векторно-матричное уравнение для  $\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n)$  примет вид

$$\sum_{i=1}^n \mu_i j (e^{-j u_i} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) \left[ \mathbf{Q} + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j u_i} - 1 \right) \mathbf{B} \right],$$

$$\mathbf{H}(0, \dots, 0) = \mathbf{r}. \quad (1.19)$$

Векторно-матричное уравнение (1.19) является основным для дальнейших исследований.

### 1.2.2 Вероятностные характеристики числа занятых приборов в системе $\text{МАР} | M^{(n)} | \infty$

Поставим задачу нахождения точных вероятностных характеристик числа занятых приборов в рассматриваемой системе.

**Теорема 1. 2** *Для начальных моментов числа занятых приборов каждого типа при стационарном функционировании неоднородной системы  $\text{МАР} | M^{(n)} | \infty$  верны следующие утверждения:*

**Утверждение 1.**

*Среднее значение числа занятых приборов  $i$ -ого типа  $f m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в неоднородной системе  $\text{МАР} | M^{(n)} | \infty$  имеет вид*

$$f m_i = \frac{p_i}{\mu_i} \mathbf{r} \mathbf{B} \mathbf{e}, \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор-столбец.

**Утверждение 2.**

Начальный момент второго порядка числа занятых приборов  $i$ -ого типа  $sm_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в неоднородной системе  $MAP|M^{(n)}|\infty$  имеет вид

$$sm_i = p_i \mathbf{rB} \left\{ \mathbf{I} + [\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} [\mu_i \mathbf{I} + 2p_i \mathbf{B}] \right\} \{2\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q}\}^{-1} \mathbf{e}, \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

**Утверждение 3.**

Корреляционный момент  $sm_{ig}$  числа занятых приборов типа  $i$  и  $g$  ( $i = 1, \dots, n, g = 1, \dots, n, i \neq g$ ) в неоднородной системе  $MAP|M^{(n)}|\infty$  имеет вид

$$sm_{ig} = (p_g \mathbf{f}m_i + p_i \mathbf{f}m_g) \mathbf{B} [(\mu_i + \mu_g) \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{e}, \quad (1.22)$$

где  $\mathbf{f}m_i = p_i \mathbf{rB} [\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}$ .

*Доказательство.*

**Начальные моменты первого порядка**

Из свойств характеристической функции

$$\left. \frac{\partial H(k, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j f m_i(k), \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K.$$

Обозначим  $\mathbf{f}m_i = [f m_i(1), \dots, f m_i(K)]$  — вектор-строка условных математических ожиданий числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ).

Тогда среднее число занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяется следующим образом:

$$f m_i = \sum_{k=1}^K f m_i(k) = \mathbf{f}m_i \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.23)$$

Продифференцируем уравнение (1.19) по переменной  $u_i$ , положим  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$  и получим систему линейных уравнений для нахождения вектор-строки  $\mathbf{f}m_i$

$$\mu_i \mathbf{f}m_i = \mathbf{f}m_i \mathbf{Q} + p_i \mathbf{rB},$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{f}m_i = p_i \mathbf{rB} [\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}, \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерности  $K \times K$ .

Просуммируем все уравнения (1.24) и получим выражение для среднего числа занятых приборов каждого типа  $f m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в гетерогенной системе  $\text{МАР} | M^{(n)} |_{\infty}$ , которое совпадает с (1.20).

### Начальный момент второго порядка

Из свойств характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial^2 H(k, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i^2} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j^2 s m_i(k), \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K.$$

Обозначим  $\mathbf{s}m_i = [s m_i(1), \dots, s m_i(K)]$  — вектор-строка условных начальных моментов второго порядка занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ).

Тогда начальный момент второго порядка занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяется следующим образом:

$$s m_i = \sum_{k=1}^K s m_i(k) = \mathbf{s}m_i \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Дважды продифференцируем уравнение (1.19) по переменной  $u_i$ , положим  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$  и получим систему линейных уравнений для нахождения вектор-строки  $\mathbf{s}m_i$

$$\mathbf{s}m_i (2\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \mathbf{f}m_i (\mu_i \mathbf{I} + 2p_i \mathbf{B}) + p_i \mathbf{rB}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая (1.24), запишем выражение для нахождения вектор-строки  $\mathbf{s}m_i$

$$\mathbf{s}m_i = p_i \mathbf{rB} \{ \mathbf{I} + [\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} [\mu_i \mathbf{I} + 2p_i \mathbf{B}] \} (2\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.$$

Просуммировав все уравнения системы, получим выражение (1.21).

### Корреляционный момент

Из свойств характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial^2 H(k, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i \partial u_g} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j^2 M\{l_i l_g\} = j^2 cm_{ig}(k),$$

$$i = 1, \dots, n, g = 1, \dots, n, i \neq g, k = 1, \dots, K.$$

Обозначим  $\mathbf{cm}_{ig} = [cm_{ig}(1), \dots, cm_{ig}(K)]$  — вектор-строка корреляционных моментов числа занятых приборов  $i$ -ого и  $g$ -ого типа, тогда

$$cm_{ig} = \mathbf{cm}_{ig} \mathbf{e} = \sum_{k=1}^K cm_{ig}(k),$$

$$i = 1, \dots, n, g = 1, \dots, n, i \neq g.$$

Продифференцировав (1.17) по переменной  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а затем по  $u_g$ ,  $g = 1, \dots, n$ ,  $g \neq i$  и положив  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ , получим следующее выражение для вектор-строки корреляционных моментов  $\mathbf{cm}_{ig}$ :

$$\mathbf{cm}_{ig} = (p_g \mathbf{fm}_i + p_i \mathbf{fm}_g) \mathbf{B} [(\mu_i + \mu_g) \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}. \quad (1.26)$$

Тогда

$$cm_{ig} = (p_g \mathbf{fm}_i + p_i \mathbf{fm}_g) \mathbf{B} [(\mu_i + \mu_g) \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{e}.$$

*Теорема доказана.*

Для анализа зависимости между компонентами вектора  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  запишем выражение для коэффициента корреляции

$$r_{ig} = \frac{cov_{ig}}{\sqrt{Var_i Var_g}} = \frac{cm_{ig} - fm_i fm_g}{\sqrt{Var_i Var_g}},$$

$$i = 1, \dots, n, g = 1, \dots, n, i \neq g,$$

где  $Var_i$  — дисперсия числа занятых приборов типа  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

На численных примерах продемонстрируем влияние исходных параметров системы на значение коэффициента корреляции  $r_{ig}$ .

### Пример 1.1

Рассмотрим СМО вида  $\text{MAP}|\text{M}^{(2)}|\infty$  с двумя типами обслуживающих приборов.

Зададим следующие значения параметров, определяющие входящий МАР-поток:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,3 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Положим  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 0,6$  — вероятности, определяющие тип заявки входящего МАР-потока.

$\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 2$  — параметры экспоненциального времени обслуживания на приборах первого и второго типа соответственно.

Используя результаты теоремы 1.2, находим основные вероятностные характеристики исследуемого процесса (Таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Основные вероятностные характеристики случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t)\}$  числа занятых приборов в системе  $\text{МАР}|\text{M}^{(2)}|\infty$

$fm_1$	$fm_2$	$sm_1$	$sm_2$	$Dl_1$	$Dl_2$	$cm_{12}$	$r_{12}$
1,772	2,659	6,613	13,55	3,471	6,481	7,261	0,537

Многочисленные численные эксперименты выявили, что на зависимость между компонентами двумерного случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t)\}$  влияют следующие параметры системы:

- 1) изменение условных интенсивностей входящего МАР-потока (Таблица 1.2);
- 2) изменение соотношения между параметрами обслуживания (Таблица 1.3);
- 3) изменение соотношения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  (Таблица 1.4).

Таблица 1.2 – Зависимость коэффициента корреляции  $r_{12}$  системы  $\text{МАР}|\text{M}^{(2)}|\infty$  от разности интенсивностей входящего потока

<b>rBe</b>	1,431	4,431	38,181	375,681
$r_{12}$	0,045	0,537	0,941	0,994

Таблица 1.3 – Зависимость коэффициента корреляции  $r_{12}$  системы  $MAP|M^{(2)}|\infty$  от отношения параметров обслуживания

$\mu_2/\mu_1$	1	0,1	0,01	0,001
$r_{12}$	0,537	0,367	0,131	0,042

Таблица 1.4 – Зависимость коэффициента корреляции  $r_{12}$  системы  $MAP|M^{(2)}|\infty$  от соотношения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$

$p_2/p_1$	1	9	99	999
$r_{12}$	0,545	0,363	0,128	0,041

Исходя из приведенных таблиц, можно сделать следующие выводы.

Вывод 1: чем выше интенсивность входящего потока, тем больше зависимость между компонентами двумерного процесса  $\{l_1(t), l_2(t)\}$ ;

Вывод 2: зависимость между числом занятых приборов каждого типа в системе обратно пропорциональна соотношению между параметрами обслуживания на приборах;

Вывод 3: с увеличением соотношения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  коэффициент корреляции  $r_{12}$  уменьшается.

Имитационное моделирование рассматриваемой системы [63, 64] позволило сделать предположение о том, что при  $\mu_i \rightarrow 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) или при  $\lambda_k \rightarrow \infty$ , ( $k = 1, \dots, K$ ) распределение вероятностей числа занятых приборов каждого типа будет иметь вид гауссовского распределения (Рисунок 1.3). Поэтому дальнейшее исследование будем проводить методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах каждого типа ( $\mu_i \rightarrow 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ).

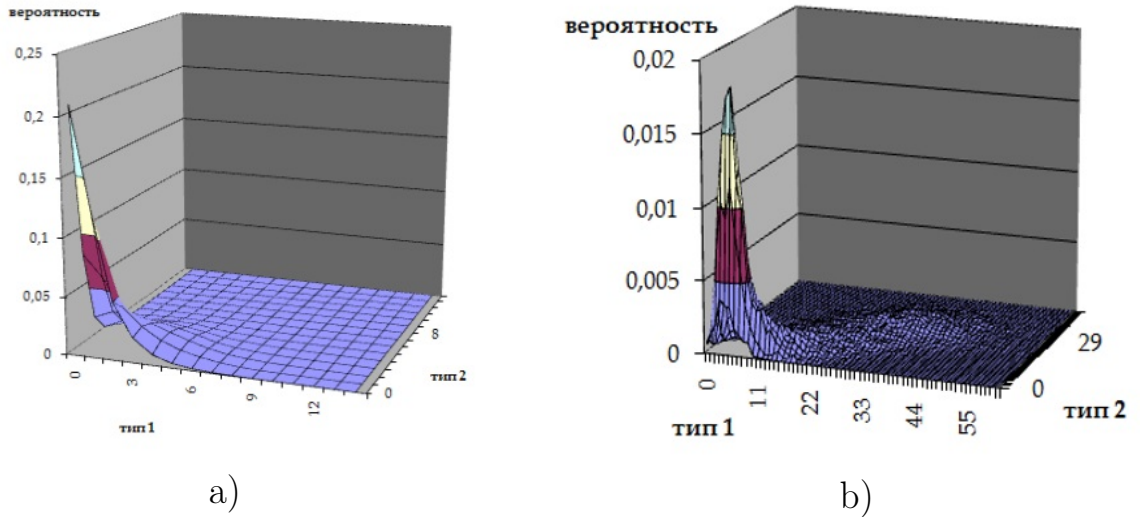


Рисунок 1.3 — Распределение вероятностей числа занятых приборов системы  $MAP|M^{(2)}|\infty$ , полученное с помощью имитационного моделирования

### 1.2.3 Построение гауссовской аппроксимации числа занятых приборов методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания

Асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах разного типа гетерогенной СМО определим в следующем виде:

$$\mu_i = q_i \mu, \quad \mu \rightarrow 0, \quad \left( \frac{1}{\mu_i} \rightarrow \infty \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.28)$$

**Теорема 1.3** *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в неоднородной системе  $MAP|M^{(n)}|\infty$  при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\kappa \frac{p_1}{\mu_1}, \dots, \kappa \frac{p_n}{\mu_n}]$  — вектор математических ожиданий числа занятых приборов,

$\mathbf{K} = [K_{is}]$ ,  $i, s = 1, \dots, n$ , где  $K_{ii} = \frac{\kappa p_i + \kappa_2 p_i^2}{\mu_i}$  — дисперсия числа занятых приборов  $i$ -ого типа,  $K_{is} = \frac{\kappa_2 p_i p_s}{\mu_i + \mu_s}$ ,  $i \neq s$  — ковариационные моменты числа занятых приборов, где  $\kappa_2 = \mathbf{f} \mathbf{B} \mathbf{e}$ , вектор  $\mathbf{f}$  является решением урав-

нения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\mathbf{Q} + \mathbf{r} [\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}] &= 0, \\ \mathbf{f}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.1** *Асимптотическая характеристическая функция первого порядка числа занятых приборов неоднородной системы  $MAR/M^{(n)}|_{\infty}$  при условии эквивалентного роста времени обслуживания имеет вид*

$$h_1(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ j\kappa \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} u_i \right\}. \quad (1.30)$$

*Доказательство.*

Обозначим

$$\mu_i = q_i \varepsilon, \quad u_i = \varepsilon q_i x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{F}_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon). \quad (1.31)$$

Учитывая (1.31), (1.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n j q_i (e^{-j q_i x_i \varepsilon} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon)}{\partial x_i} &= \\ = \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \left[ \mathbf{Q} + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j q_i x_i \varepsilon} - 1 \right) \mathbf{B} \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Если устремить  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (1.32), то получим, что

$$\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n) \mathbf{Q} = 0, \quad (1.33)$$

где

$$\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon).$$

Так как  $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0$ , то будем искать функцию  $\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n)$  в виде

$$\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{r}\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \quad (1.34)$$

где  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n)$  — искомая скалярная функция.

Просуммируем все уравнения (1.32), домножив обе части на единственный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n j (e^{-jq_i x_i \varepsilon} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon)}{\partial x_i} \mathbf{e} = \\ & = \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{jq_i x_i \varepsilon} - 1 \right) \mathbf{B} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Разложим в уравнении (1.35) экспоненты в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n q_i x_i \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon)}{\partial x_i} \mathbf{e} = \\ & = \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \sum_{i=1}^n p_i j q_i x_i \varepsilon \mathbf{B} \mathbf{e} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

тогда, подставив в полученное уравнение вектор-функцию  $\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n)$  в виде (1.34) и устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \Phi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \mathbf{r} \mathbf{B} \mathbf{e} j \sum_{i=1}^n p_i x_i. \quad (1.36)$$

Обозначим  $\mathbf{k} = \mathbf{r} \mathbf{B} \mathbf{e}$  и получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \Phi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \Phi_1(x_1, \dots, x_n) j \mathbf{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Учитывая начальные условия  $\Phi_1(0, \dots, 0) = 1$ , получим выражение:

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ j \mathbf{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\}. \quad (1.37)$$

Таким образом,

$$\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \mathbf{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\}. \quad (1.38)$$

Учитывая (1.34), (1.38) и замены (1.31) можно записать асимптотическое равенство

$$\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ j\kappa \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\}, \quad (1.39)$$

откуда, обозначив

$$h_1(u_1, \dots, u_n) = M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) \mathbf{e},$$

получим утверждение леммы 1.1.

*Лемма доказана.*

**Замечание 1** Асимптотическая характеристическая функция первого порядка числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ) для системы  $МАР|M^{(n)}|\infty$  с  $n$  типами обслуживающих приборов при условии эквивалентного роста времени обслуживания имеет вид

$$h_1^{(i)}(u_i) = M e^{j u_i l_i(t)} = h_1(0, \dots, u_i, \dots, 0) = \exp \left\{ j\kappa p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\}. \quad (1.40)$$

Перейдем к построению гауссовской аппроксимации числа занятых приборов.

### Асимптотика второго порядка

Представим функцию  $\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n)$  в виде

$$\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n) \exp \left\{ j\kappa \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\}, \quad (1.41)$$

подставив который в (1.19), получим матричное уравнение для  $\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n)$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mu_i j (e^{-j u_i} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \\ & = \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n) \left[ \mathbf{Q} + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j u_i} - 1 \right) \mathbf{B} + \kappa \sum_{i=1}^n p_i (e^{-j u_i} - 1) \mathbf{I} \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Выполним в (1.42) следующие замены:

$$\mu_i = q_i \varepsilon^2, \quad u_i = \varepsilon q_i x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon),$$

в результате которых получим выражение

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n j \varepsilon q_i (e^{-j \varepsilon q_i x_i} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon)}{\partial x_i} = \quad (1.44) \\ & = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \left[ \mathbf{Q} + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j \varepsilon q_i x_i} - 1 \right) \mathbf{B} + \kappa \sum_{i=1}^n p_i (e^{-j \varepsilon q_i x_i} - 1) \mathbf{I} \right]. \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (1.44) в виде

$$\mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \left\{ \mathbf{r} + j \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i \mathbf{f} \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (1.45)$$

Подставив (1.45) в (1.44), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n j \varepsilon q_i (e^{-j \varepsilon q_i x_i} - 1) \left[ \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \left( \mathbf{r} + j \varepsilon \sum_{s=1}^n p_s q_s x_s \mathbf{f} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \Phi_2(x_1, \dots, x_n) j \varepsilon \right] = \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \left[ \mathbf{r} + j \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i \mathbf{f} \right] \times \\ & \quad \times \left[ \mathbf{Q} + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j \varepsilon q_i x_i} - 1 \right) \mathbf{B} + \kappa \sum_{i=1}^n p_i (e^{-j \varepsilon q_i x_i} - 1) \mathbf{I} \right] + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

тогда, принимая во внимание, что  $\mathbf{rQ} = 0$ , можно получить следующую систему уравнений для векторов  $\mathbf{f}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{fQ} + \mathbf{r} [\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}] &= 0, \\ \mathbf{fe} &= 0, \end{aligned}$$

совпадающую с системой (1.29).

Для нахождения вида функции  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n)$  просуммируем все уравнения системы (1.44) и разложим все входящие в него экспоненты в ряд

Тейлора. Тогда получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon)}{\partial x_i} \mathbf{e} = \\ & = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i [\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}] \mathbf{e} + \right. \\ & \left. + (j\varepsilon^2) \sum_{i=1}^n p_i \frac{(q_i x_i)^2}{2} [\mathbf{B} + \kappa \mathbf{I}] \mathbf{e} \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставим разложение (1.45) в полученное выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \mathbf{r} \mathbf{e} &= \Phi_2(x_1, \dots, x_n) j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i \mathbf{r} [\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}] \mathbf{e} + \\ &+ \Phi_2(x_1, \dots, x_n) (j\varepsilon)^2 \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \frac{(q_i x_i)^2}{2} \mathbf{r} [\mathbf{B} + \kappa \mathbf{I}] \mathbf{e} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i q_i x_i p_s q_s x_s \mathbf{f} \mathbf{B} \mathbf{e} \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Так как  $\mathbf{r} \mathbf{B} \mathbf{e} = \kappa$ , то  $\mathbf{r} [\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}] \mathbf{e} = 0$ , а  $\mathbf{r} [\mathbf{B} + \kappa \mathbf{I}] \mathbf{e} = 2\kappa$ .

Разделим обе части уравнения (1.46) на  $\varepsilon^2$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В результате, учитывая, что  $\mathbf{r} \mathbf{e} = 1$ , получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \\ & = \Phi_2(x_1, \dots, x_n) j^2 \left\{ \kappa \sum_{i=1}^n p_i (q_i x_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i q_i x_i p_s q_s x_s \mathbf{f} \mathbf{B} \mathbf{e} \right\}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Решением дифференциального уравнения (1.47), удовлетворяющим начальному условию  $\Phi_2(0, \dots, 0) = 1$ , является функция  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n)$  вида

$$\Phi_2(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ \kappa \sum_{i=1}^n p_i q_i \frac{(j x_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \frac{j x_i j x_s}{q_i + q_s} \mathbf{f} \mathbf{B} \mathbf{e} \right\}. \quad (1.48)$$

Так как имеет место следующее приближенное равенство  $\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{r}\Phi_2(x_1, \dots, x_n)$  то, учитывая замены (1.43), можно записать выражение для вектор-функции  $\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n)$

$$\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{r} \exp \left\{ \kappa \sum_{i=1}^n p_i \frac{(ju_i)^2}{2\mu_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \frac{ju_i ju_s}{\mu_i + \mu_s} \mathbf{fBe} \right\}.$$

Откуда, учитывая вид функции  $\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n)$  (1.41), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{r} \exp \left\{ j\kappa \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} + \kappa \sum_{i=1}^n p_i \frac{(ju_i)^2}{2\mu_i} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \frac{ju_i ju_s}{\mu_i + \mu_s} \mathbf{fBe} \right\}. \end{aligned}$$

Домножив обе части полученного выражения на вектор-столбец  $\mathbf{e}$ , получим вид асимптотической характеристической функции второго порядка числа занятых приборов в системе  $\text{MAP}|M^{(n)}|\infty$

$$h_2(u_1, \dots, u_n) = M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n) \mathbf{e} = \quad (1.49)$$

$$= \exp \left\{ j\kappa \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} + \kappa \sum_{i=1}^n p_i \frac{(ju_i)^2}{2\mu_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \frac{ju_i ju_s}{\mu_i + \mu_s} \mathbf{fBe} \right\},$$

из которого следует утверждение теоремы.

*Теорема доказана.*

### Пример 1.2

Воспользуемся уже заданными в параграфе 1.2.2 значениями параметров (4.2), определяющими входящий МАР-поток с двумя состояниями:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,3 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 0,6$  — вероятности, определяющие тип заявки входящего МАР-потока.

Таким образом, интенсивность входящего потока будет равна  $\kappa = \mathbf{rBe} = 4,431$ . Для определения области применимости гауссовской аппроксимации сравним характеристики числа занятых приборов каждого типа, полученные с помощью метода асимптотического анализа в условии эквивалентно растущего времени обслуживания на приборах, и допредельные характеристики, полученные в разделе 1.2.2.

Положим время обслуживания на приборах разного типа  $\mu_1 = \varepsilon$ ,  $\mu_2 = 2\varepsilon$ . Результаты сравнения асимптотических и допредельных значений дисперсий числа занятых приборов разного типа приведены в Таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Сравнение допредельных и асимптотических значений дисперсии для системы  $\text{МАР}|\text{M}^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием

$\varepsilon$	$Var_1$	$Var_1^{as} = K_{11}$	$Var_2$	$Var_2^{as} = K_{22}$
1	3,471	5,595	2,558	5,629
0,5	8,249	11,189	6,481	11,259
0,1	51,7	55,947	47,693	56,293
0,01	554,747	559,465	552,442	562,93

В качестве меры близости асимптотических результатов к допредельным определим величину относительной погрешности в следующем виде:

$$\Delta_i = \left| \frac{Var_i - Var_i^{as}}{Var_i} \right|, \quad (1.50)$$

где  $Var_i$  — точное значение дисперсии числа занятых приборов  $i$ -ого типа в системе  $\text{МАР}|\text{M}^{(n)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием, а  $Var_i^{as}$  — асимптотическое. Зависимость величины относительной погрешности от значений  $\varepsilon$  отображена в Таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Сравнение значений относительной погрешности для системы  $\text{MAP|M}^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием

$\varepsilon$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
1	0,612	1,201
0,5	0,356	0,737
0,1	0,082	0,18
0,01	<b>8,506 * 10<sup>-3</sup></b>	<b>0,019</b>

Можно сделать вывод о том, что при  $\varepsilon = 0,01$  погрешность составляет менее 3%, что является приемлемым для практического применения.

### Пример 1.3

Рассмотрим СМО  $\text{MAP|M}^{(2)}|\infty$ , на вход которой поступает MAP-поток заявок, управляемый цепью Маркова с тремя состояниями.

Зададим следующие параметры входящего потока:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 2,5 & 2,5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 0,6$  — вероятности, определяющие тип заявки входящего MAP-потока.

$\mu_1 = \varepsilon$ ,  $\mu_2 = 2\varepsilon$  — параметры экспоненциального времени обслуживания на приборах первого и второго типа соответственно.

В Таблице 1.7 приведены допредельные и асимптотические значения основных характеристик СМО  $\text{MAP|M}^{(2)}|\infty$  при различных значениях  $\varepsilon$ .

Таблица 1.7 – Сравнение допредельных и асимптотических значения основных характеристик СМО  $\text{MAP|M}^{(2)}|\infty$

$\varepsilon$	$\mathbf{a}^T$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{a}_{as}^T$	$\mathbf{K}_{as}$
1	[4, 143 3, 107]	$\begin{pmatrix} 4,6 & 0,457 \\ 0,457 & 3,621 \end{pmatrix}$	[4, 143 3, 107]	$\begin{pmatrix} 4,508 & 0,335 \\ 0,335 & 3,45 \end{pmatrix}$
0,5	[8, 285 6, 214]	$\begin{pmatrix} 9,199 & 0,914 \\ 0,914 & 7,242 \end{pmatrix}$	[8, 285 6, 214]	$\begin{pmatrix} 9,098 & 0,772 \\ 0,772 & 7,037 \end{pmatrix}$
0,1	[41, 426 31, 069]	$\begin{pmatrix} 45,995 & 4,569 \\ 4,569 & 36,21 \end{pmatrix}$	[41, 426 31, 069]	$\begin{pmatrix} 45,884 & 4,406 \\ 4,406 & 35,966 \end{pmatrix}$

Аналогично примеру 1.2 будем оценивать величину относительной погрешности в виде (1.50). Зависимость величины относительной погрешности от значений  $\varepsilon$  отображена в Таблице 1.8.

Таблица 1.8 – Сравнение значений относительной погрешности для системы  $\text{MAP|M}^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием при  $K = 3$

$\varepsilon$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
1	0,020	0,038
0,5	<b>0,011</b>	<b>0,023</b>
0,1	<b>0,002</b>	<b>0,005</b>

Из Таблицы 1.8 видно, что уже при  $\varepsilon = 0,5$  величина относительной погрешности не превосходит 3%, что мы считаем очень хорошим результатом с точки зрения эффективности применения метода асимптотического анализа.

### 1.2.4 Модификация метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний управляющей входящим МАР-потокком цепи Маркова

Имитационное моделирование рассматриваемой системы  $\text{МАР}|M^{(n)}|_{\infty}$  позволило выявить многомодальность распределения вероятностей числа занятых приборов в случае, когда управляющая цепь Маркова редко меняет свои состояния (Рисунок 1.4.)

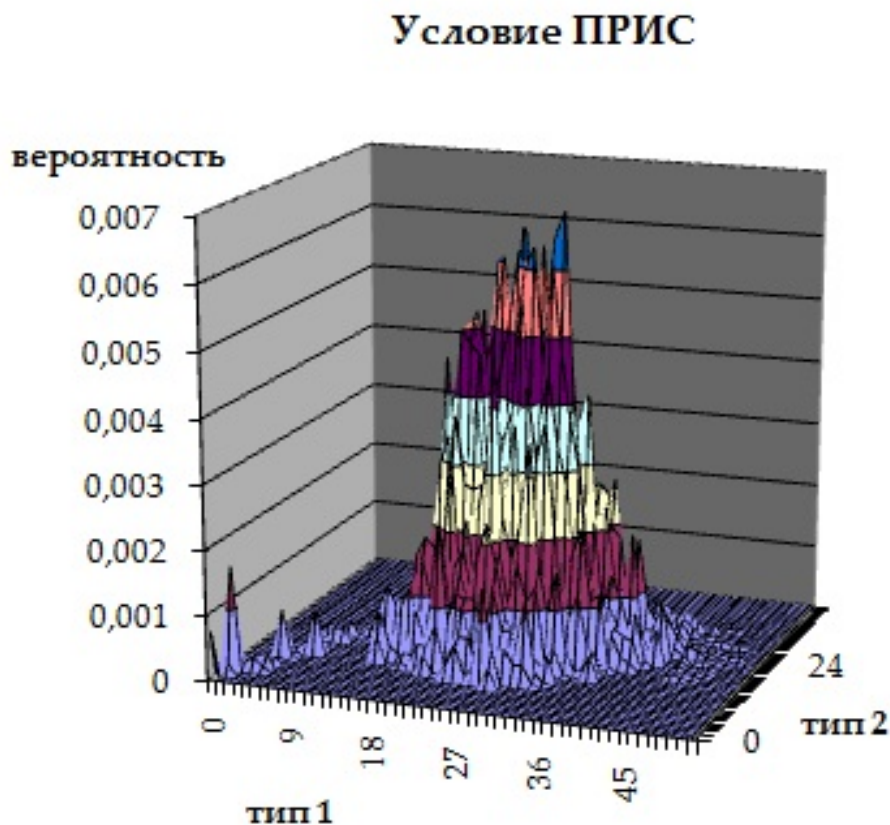


Рисунок 1.4 — Распределение вероятностей числа занятых приборов системы  $\text{МАР}|M^{(2)}|_{\infty}$  при редких изменениях состояний управляющей цепи Маркова

Поэтому в работе предлагается исследование СМО  $\text{МАР}|M^{(n)}|_{\infty}$  при асимптотическом условии предельно редких изменений состояний (ПРИС) управляющей МАР-потокком цепи Маркова.

Дадим математическое описание этого условия.

Значения инфинитезимальных характеристик  $q_{kk}$  определяют средние времена пребывания МАР-потока в  $k$ -х состояниях  $k = 1, \dots, K$ .

Пусть  $\varepsilon$  — некоторый малый положительный параметр.

Условием предельно редких изменений состояний входящего МАР-потока будем называть равенства

$$q_{\nu k}^{(1)} = \varepsilon q_{\nu k}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \nu = 1, \dots, K, \quad k = 1, \dots, K, \quad (1.51)$$

определяющие достаточно малые значения инфинитезимальных характеристик, что влечет достаточно редкие изменения состояний потока.

**Теорема 1.4** *Асимптотическая характеристическая функция многомерного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  — числа занятых приборов разного типа в системе  $МАР|M^{(n)}|\infty$  в условии предельно редких изменений состояний входящего МАР-потока имеет вид*

$$h_1(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^K r(k) \exp \left\{ \lambda_k \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} (e^{ju_i} - 1) \right\}. \quad (1.52)$$

*Доказательство.* Учитывая (1.51), систему (1.17) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i j (e^{-ju_i} - 1) \frac{\partial H(k, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} &= \lambda_k \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) H(k, u_1, \dots, u_n) + \\ &+ \varepsilon \sum_{\nu=1}^K H(\nu, u_1, \dots, u_n) \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) d_{\nu k} \right] q_{\nu k}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Решение этой системы  $H(k, u_1, \dots, u_n)$ , зависящее от параметра  $\varepsilon$  и удовлетворяющее начальному условию (1.15), обозначим

$$\begin{aligned} H(k, u_1, \dots, u_n) &= F(k, u_1, \dots, u_n, \varepsilon), \\ F(k, 0, \dots, 0, \varepsilon) &= r(k), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Подставив (1.54) в систему (1.53), выполним в ней предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и для  $F(k, u_1, \dots, u_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(k, u_1, \dots, u_n, \varepsilon)$  получим систему

дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{i=1}^n j\mu_i(e^{-ju_i} - 1) \frac{\partial F(k, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \lambda_k \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} - 1 \right) F(k, u_1, \dots, u_n),$$

$$k = 1, \dots, K. \quad (1.55)$$

Общее решение (1.55) имеет вид

$$C_1 \exp \left\{ \lambda_k \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} (e^{ju_i} - 1) \right\} = F(k, u_1, \dots, u_n).$$

Для того чтобы найти  $C_1$ , воспользуемся начальными условиями (1.54). Тогда получим выражение для  $F(k, u_1, \dots, u_n)$

$$F(k, u_1, \dots, u_n) = r(k) \exp \left\{ \lambda_k \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} (e^{ju_i} - 1) \right\}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Таким образом, для частичных характеристических функций можно записать асимптотическое равенство

$$H(k, u_1, \dots, u_n) = F(k, u_1, \dots, u_n, \varepsilon) \approx F(k, u_1, \dots, u_n),$$

откуда

$$\begin{aligned} h_1(u_1, \dots, u_n) &= M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \sum_{k=1}^K H(k, u_1, \dots, u_n) = \\ &= \sum_{k=1}^K r(k) \exp \left\{ \lambda_k \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} (e^{ju_i} - 1) \right\}. \end{aligned}$$

*Теорема доказана.*

**Замечание 1** *Функцию*

$$h(u) = M e^{ju \sum_{i=1}^n l_i} = \sum_{k=1}^K r(k) \exp \left\{ \lambda_k \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} \right\}$$

будем называть асимптотической характеристической функцией общего числа занятых приборов системы  $МАР|M^{(n)}|_{\infty}$  с разнотипным обслуживанием в условии предельно редких изменений состояний входящего  $МАР$ -потока.

### Замечание 2 Функции

$$\begin{aligned} h_1^{(i)}(u_i) &= M e^{j u_i l_i(t)} = h_1(0, \dots, u_i, \dots, 0) = \\ &= \sum_{k=1}^K r(k) \exp \left\{ \lambda_k \frac{p_i}{\mu_i} (e^{j u_i} - 1) \right\} \end{aligned} \quad (1.56)$$

будем называть асимптотической характеристической функцией числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ) в системе  $МАР|M^{(n)}|_{\infty}$  в условии предельно редких изменений состояний входящего  $МАР$ -потока.

### Пример 1.4

Теперь проведем сравнение допредельных значений основных вероятностных характеристик системы  $МАР|M^{(n)}|_{\infty}$  со значениями, полученными с помощью метода асимптотического анализа в условиях предельно редких изменений состояний входящего потока.

Определим входящий  $МАР$ -поток с тремя типами заявок следующими характеристиками:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 2,5 & 2,5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,5, \quad p_3 = 0,3,$$

$\mu_1 = 0,2$ ,  $\mu_2 = 0,1$ ,  $\mu_3 = 0,6$  — параметры экспоненциального времени обслуживания на приборах разного типа соответственно.

Для оценки точности метода асимптотического анализа в условиях ПРИС определим относительную погрешность вида

$$\Delta_i = \left| \frac{sm_i - sm_i^{as}}{sm_i} \right|, \quad i = \{1, 2, 3\}, \quad (1.57)$$

где  $sm_i$  — допредельное значение начального момента второго порядка числа занятых приборов типа  $i$ , а  $sm_i^{as}$  — значение начального момента второго порядка, полученное с помощью метода асимптотического анализа в условиях ПРИС.

В Таблице 1.9 приведены результаты сравнения асимптотических и допредельных значений начальных моментов первого и второго порядка для исследуемой системы.

Таблица 1.9 – Сравнение допредельных и асимптотических значений начальных моментов второго порядка

	$sm_1^{as} = 119.895$		$sm_2^{as} = 2.809 * 10^3$		$sm_3^{as} = 32.329$	
$\varepsilon$	$sm_1$	$\Delta_1$	$sm_2$	$\Delta_2$	$sm_3$	$\Delta_3$
0,1	106,765	0,123	$2,411 * 10^3$	0,165	30,429	0,062
0,01	116,213	0,032	$2,651 * 10^3$	0,06	31,992	0,011
0,001	119,449	<b>0,004</b>	$2,787 * 10^3$	<b>0,008</b>	32,293	<b>0,001</b>

Из полученных результатов очевидно, что с уменьшением параметра  $\varepsilon$  относительная погрешность вычисления начальных моментов второго порядка методом асимптотического анализа в условиях ПРИС убывает. Точность используемого метода достаточно велика, так как уже при  $\varepsilon = 0,001$  относительная погрешность для начальных моментов второго порядка не превосходит 1%.

Для большей наглядности в Таблице 1.10 отображена зависимость относительных погрешностей от разности интенсивностей исходного МАР-потока и МАР-потока, в котором предельно редко изменяются состояния управляющей цепи Маркова. Можно сделать логичный вывод, что чем реже изменяется состояние управляющей входящим МАР-потоком цепи Маркова, тем точнее аппроксимация допредельных характеристик соответствующими асимптотическими характеристиками.

Таблица 1.10 – Зависимость относительных погрешностей от разности интенсивностей исходного МАР-потока и МАР-потока в условии ПРИС

$\frac{ r_{Be}-r_{Ae} }{r_{Be}}$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
$9,831 \cdot 10^{-3}$	0,123	0,165	0,062
$9,919 \cdot 10^{-4}$	0,032	0,06	0,011
$9.928 \cdot 10^{-5}$	<b>0,004</b>	<b>0,008</b>	<b>0,001</b>

### 1.3 Выводы по главе 1

В настоящей главе проведено исследование неоднородной (гетерогенной) бесконечнолинейной СМО вида  $МАР|M^{(n)}|\infty$ .

В разделе 1.1 проведено исследование МАР-потока разнотипных заявок. Найдены выражения для вероятностно-временных характеристик исследуемого потока.

В разделе 1.2 проводится исследование СМО  $МАР|M^{(n)}|\infty$ .

В параграфе 1.2.2 найдены основные вероятностные характеристики многомерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$ , описывающего число занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе в стационарном режиме. А именно, получены выражения для нахождения математического ожидания, начальных моментов второго порядка, корреляционных моментов, дисперсии и коэффициентов корреляции.

В подразделах 1.2.3, 1.2.4 система  $МАР|M^{(n)}|\infty$  исследуется методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах, то есть при  $\mu_i = q_i \mu$ ,  $\mu \rightarrow 0$   $i = 1, \dots, n$ . Сформулирована и доказана теорема о виде асимптотической характеристической функции второго порядка числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе.

В подразделе 1.2.4 предложена модификация метода асимптотического анализа при условии предельно редких изменений состояния управляющей МАР-поток цепи Маркова, то есть при  $q_{\nu k}^{(1)} = \varepsilon q_{\nu k}$  ( $\nu = 1, \dots, K$ ,  $k = 1, \dots, K$ ), где  $\varepsilon$  – некоторый малый положительный параметр. Получено выражение для асимптотической характеристической функции числа

занятых приборов каждого типа в системе при условии ПРИС в виде гиперпуассоновского распределения.

Также на основе численных экспериментов сделаны выводы об области применимости асимптотических методов.

Результаты этой главы опубликованы в работах [47, 67–69, 88, 89, 131].

## Глава 2 Исследование неоднородных систем массового обслуживания вида $GI|M^{(n)}|\infty$

В данной главе исследуется математическая модель неоднородных (гетерогенных) бесконечнолинейных СМО с входящим рекуррентным потоком разнотипных заявок.

Решается задача исследования многомерного случайного процесса, описывающего число занятых приборов каждого типа в рассматриваемых СМО.

Для исследования немарковских многомерных случайных процессов, описывающих число занятых приборов каждого типа в рассматриваемой СМО, применяется метод марковизации [57, 78, 82, 84].

Получены выражения, определяющие начальные моменты исследуемого процесса, а также проведено исследование систем методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах. Доказано, что распределение числа занятых приборов рассматриваемой системы при заданных асимптотических условиях можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением.

### 2.1 Математическая модель рекуррентного потока разнотипных событий

Рассмотрим GI-поток разнотипных событий с функцией распределения длин интервалов между моментами наступления событий  $A(z)$  (Рисунок 2.1).

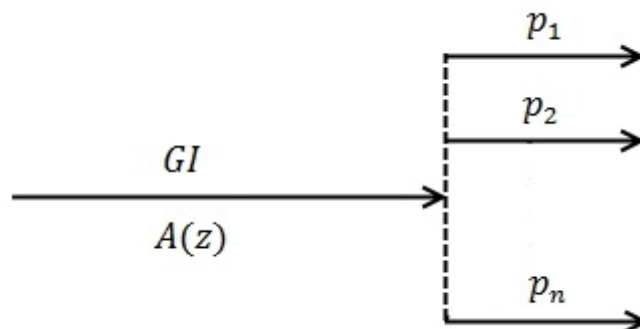


Рисунок 2.1 — Рекуррентный поток разнотипных заявок

С вероятностью  $p_i$  событие определяется как событие типа  $i$  и исходный поток условно делится на  $n$  зависимых потоков случайных событий.

Поставим задачу нахождения основных вероятностных характеристик  $n$ -мерного немарковского случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$  — числа событий потока каждого типа.

Рассмотрим  $(n+1)$ -мерный марковский процесс  $\{z(t), l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$ , где  $z(t)$  — остаточное время от момента времени  $t$  до момента наступления следующего события потока.

Обозначим

$P(z, l_1, l_2, \dots, l_n, t) = P\{z(t) < z, l_1(t) = l_1, l_2(t) = l_2, \dots, l_n(t) = l_n\}$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  в потоке  $i$ -ого типа  $l_i$  заявок ( $i = 1, \dots, n$ ) и длина интервала от момента  $t$  до момента наступления следующего события рекуррентного потока меньше чем  $z$ .

Для распределения вероятностей  $P(z, l_1, l_2, \dots, l_n, t)$  запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial P(0, l_1 - 1, \dots, l_n, t)}{\partial z} p_1 A(z) + \frac{\partial P(0, l_1, \dots, l_n - 1, t)}{\partial z} p_n A(z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Начальные условия определим в виде

$$P(z, l_1, \dots, l_n, 0) = P(z, 0, \dots, 0, t) = R(z), \quad (2.2)$$

где  $R(z)$  — стационарное распределение вероятностей процесса  $z(t)$ .

Введем характеристическую функцию следующего вида:

$$H(z, u_1, \dots, u_n, t) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} e^{ju_1 l_1} \times \dots \times e^{ju_n l_n} P(z, l_1, \dots, l_n, t),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Из (2.1) получаем систему дифференциальных уравнений для характеристических функций  $H(z, u_1, \dots, u_n, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} &= \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial H(0, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{-j u_i} A(z) - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Начальные условия (2.2) перепишем в следующем виде:

$$H(z, 0, \dots, 0, t) = H(z, u_1, \dots, u_n, 0) = R(z).$$

Для определения вида  $R(z)$  подставим в (2.3)  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$  и получим уравнение вида

$$R'(z) + (A(z) - 1)R'(0) = 0, \quad (2.4)$$

решение которого можно записать в виде

$$R(z) = \int_0^z R'(0)(1 - A(x))dx.$$

Так как

$$R(\infty) = 1 = R'(0) \int_0^\infty (1 - A(x))dx,$$

то

$$R'(0) = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - A(x))dx} = \lambda.$$

Таким образом, выражение для стационарного распределения вероятностей процесса  $z(t)$  примет вид [40]

$$R(z) = \lambda \int_0^z (1 - A(x))dx. \quad (2.5)$$

По свойствам характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j f m_i(z, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому, учитывая (2.3) и (2.5), можно записать дифференциальное уравнение для нахождения среднего числа событий каждого типа в рекуррентном потоке разнотипных событий

$$\begin{aligned} \frac{\partial f m_i(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f m_i(z, t)}{\partial z} + p_i \lambda A(z) + \\ &+ (A(z) - 1) \frac{\partial f m_i(0, t)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Устремив  $z \rightarrow \infty$ , получим следующее выражение:

$$\frac{\partial f m_i(\infty, t)}{\partial t} = \lambda p_i,$$

из которого очевидно получается выражение для среднего числа событий каждого типа в GI-потоке разнотипных событий

$$f m_i(t) = \lambda p_i t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Также можно вычислить моменты более высокого порядка.

## 2.2 Исследование неоднородной бесконечнолинейной СМО с $n$ типами обслуживающих приборов и рекуррентным входящим потоком

### 2.2.1 Математическая модель

Рассмотрим гетерогенную СМО  $GI|M^{(n)}|\infty$ , на вход которой поступает рекуррентный поток, заданный функцией распределения  $A(z)$  — длин интервалов между моментами наступления событий потока. В момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему поступает только одна заявка, которая с вероятностью  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) отправляется на прибор соответствующего типа, где выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, имеющего экспоненциальную функцию распределения с параметром  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Поставим задачу исследования  $n$ -мерного случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$ , характеризующего число занятых приборов  $i$ -ого типа в момент времени  $t$ . Так как входящий поток не является пуассоновским, то  $n$ -мерный процесс  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  — немарковский. Рассмотрим  $(n+1)$ -мерный марковский случайный процесс  $\{z(t), l_1(t), \dots, l_n(t)\}$ , для которого можно записать совместное распределение вероятностей  $P(z, l_1, \dots, l_n, t) = P\{z(t) < z, l_1(t) = l_1, \dots, l_n(t) = l_n\}$ ,  $l_1, \dots, l_n = 0, 1, \dots$ , где  $z(t)$  — время от момента  $t$  до момента наступления следующего события входящего потока.

Для распределения вероятностей  $P(z, l_1, \dots, l_n, t)$  запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, l_1, \dots, l_n, t)}{\partial z} \\ & - \sum_{i=1}^n l_i \mu_i P(z, l_1, \dots, l_n, t) + \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & + P(z, l_1 + 1, \dots, l_n, t)(l_1 + 1)\mu_1 + \dots + P(z, l_1, \dots, l_n + 1, t)(l_n + 1)\mu_n + \\ & + \frac{\partial P(0, l_i - 1, \dots, l_n, t)}{\partial z} p_1 A(z) + \dots + \frac{\partial P(0, l_1, \dots, l_n - 1, t)}{\partial z} p_n A(z), \\ & l_1, \dots, l_n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Решение системы (2.8) будем искать при стационарном функционировании рассматриваемой системы. Перепишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для стационарного распределения вероятностей  $\Pi(z, l_1, \dots, l_n)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(z, l_1, \dots, l_n)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(0, l_1, \dots, l_n)}{\partial z} - \sum_{i=1}^n l_i \mu_i \Pi(z, l_1, \dots, l_n) + \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & + \Pi(z, l_1 + 1, \dots, l_n)(l_1 + 1)\mu_1 + \dots + \Pi(z, l_1, \dots, l_n + 1)(l_n + 1)\mu_n + \\ & + \frac{\partial \Pi(0, l_1 - 1, \dots, l_n)}{\partial z} p_1 A(z) + \dots + \frac{\partial \Pi(0, l_1, \dots, l_n - 1)}{\partial z} p_n A(z) = 0. \end{aligned}$$

Введем частичную характеристическую функцию следующего вида

$$H(z, u_1, \dots, u_n) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} e^{ju_1 l_1} \times \dots \times e^{ju_n l_n} \Pi(z, l_1, \dots, l_n),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Из (2.9) получаем дифференциальное уравнение для характеристической функции  $H(z, u_1, \dots, u_n)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial z} + \frac{\partial H(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z} \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} A(z) - 1 \right) - \\ - j \sum_{i=1}^n \mu_i (e^{-ju_i} - 1) \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial H(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z} = \left. \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Уравнение (2.10) будем считать основным для дальнейших исследований системы  $GI|M^{(n)}|\infty$ .

Решение  $H(z, u_1, \dots, u_n)$  системы (2.10) удовлетворяет начальным условиям  $H(z, 0, \dots, 0) = R(z)$ , где  $R(z)$  — стационарное распределение вероятностей процесса  $z(t)$ , определяемое выражением (2.5).

## 2.2.2 Вероятностные характеристики числа занятых приборов в системе $GI|M^{(n)}|\infty$

Для нахождения точных вероятностных характеристик числа занятых приборов в рассматриваемой системе докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.1** *Для начальных моментов числа занятых приборов каждого типа при стационарном функционировании неоднородной системы  $GI|M^{(n)}|\infty$  верны следующие утверждения:*

**Утверждение 1.** *Среднее значение числа занятых приборов  $i$ -ого типа  $fm_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  имеет вид*

$$fm_i = \frac{p_i}{\mu_i} \lambda. \quad (2.11)$$

**Утверждение 2.**

Начальные моменты второго порядка числа занятых приборов  $i$ -ого типа  $sm_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  имеют вид

$$sm_i = \frac{p_i \lambda}{\mu_i} + \frac{p_i^2 \lambda}{\mu_i} \frac{A^*(\mu_i)}{1 - A^*(\mu_i)}, \quad (2.12)$$

где  $A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dA(z)$  — преобразование Лапласа-Стилтьеса.

**Утверждение 3.**

Корреляционный момент числа занятых приборов  $i$ -ого и  $g$ -ого типов  $cm_{ig}$ , ( $i = 1, \dots, n, g = 1, \dots, n, i \neq g$ ) в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  имеет вид

$$cm_{ig} = \frac{p_i p_g}{\mu_i + \mu_g} \left\{ \frac{A^*(\mu_i)}{1 - A^*(\mu_i)} + \frac{A^*(\mu_g)}{1 - A^*(\mu_g)} \right\} \lambda. \quad (2.13)$$

*Доказательство.*

**Начальные моменты первого порядка.**

По свойствам характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j f m_i(z), \quad i = 1, \dots, n.$$

Продифференцируем (2.10) по переменной  $u_i$  и получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial z \partial u_i} + \frac{\partial^2 H(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z \partial u_i} \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j u_i} A(z) - 1 \right) + \\ & + \frac{\partial H(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z} p_i j e^{j u_i} A(z) - \mu_i e^{-j u_i} \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} - \\ & - j \sum_{s=1}^n \mu_s (e^{-j u_s} - 1) \frac{\partial^2 H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_s \partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Откуда при  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$  получаем дифференциальное уравнение для нахождения  $f m_i(z)$

$$f m_i'(z) + f m_i'(0)(A(z) - 1) + \lambda p_i A(z) - \mu_i f m_i(z) = 0. \quad (2.15)$$

Будем решать уравнение (2.15) с помощью преобразования Лапласа-Стилтьеса. Обозначим

$$\varphi_i(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dfm_i(z), \quad A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dA(z), \quad i = 1, \dots, n.$$

Выполним в (2.15) преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$(\mu_i - \alpha)\varphi_i(\alpha) = fm_i'(0)(A^*(\alpha) - 1) + p_i\lambda A^*(\alpha), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.16)$$

откуда

$$\varphi_i(\alpha) = \frac{1}{\mu_i - \alpha} [fm_i'(0)(A^*(\alpha) - 1) + p_i\lambda A^*(\alpha)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Положим в (2.16)  $\alpha = \mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), тогда

$$fm_i'(0) = \frac{p_i}{1 - A^*(\mu_i)} \lambda A^*(\mu_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Так как

$$fm_i(\infty) = \varphi_i(0) = \frac{1}{\mu_i} \left[ \frac{p_i}{1 - A^*(\mu_i)} \lambda A^*(\mu_i)(A^*(0) - 1) + p_i\lambda A^*(0) \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

$$A^*(0) = \int_0^{\infty} dA(z) = A(\infty) - A(0) = 1,$$

тогда для среднего числа занятых приборов  $i$ -ого типа в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  можно записать равенство

$$M\{i\} = fm_i = \frac{\lambda}{\mu_i} p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Начальные моменты второго порядка.**

По свойствам характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial^2 H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i^2} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j^2 sm_i(z), \quad i = 1, \dots, n.$$

Продифференцируем (2.14) по переменной  $u_i$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 \mathbf{H}(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial z \partial u_i^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z \partial u_i^2} \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{ju_i} A(z) - 1 \right) + \\
& + 2j e^{ju_i} p_i A(z) \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z \partial u_i} + j^2 p_i e^{ju_i} \frac{\partial \mathbf{H}(0, u_1, \dots, u_n)}{\partial z} A(z) + \\
& + j \mu_i e^{-ju_i} \frac{\partial \mathbf{H}(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} - 2 \mu_i e^{-ju_i} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i^2} - \\
& - j \sum_{s=1}^n \mu_s (e^{-ju_s} - 1) \frac{\partial^3 \mathbf{H}(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_s \partial u_i^2}, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Положив в (2.19)  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ , получим выражение для нахождения  $sm_i(z)$

$$\begin{aligned}
sm'_i(z) + p_i A(z) \lambda + 2p_i A(z) f m'_i(0) + sm'_i(0) \left( \sum_{i=1}^n p_i A(z) - 1 \right) + \\
+ \mu_i f m_i(z) - 2\mu_i sm_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Решать (2.20) будем с помощью преобразования Лапласа-Стилтьеса. Для этого обозначим

$$\psi_i(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} dsm_i(z), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.21}$$

Тогда, (2.20) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(2\mu_i - \alpha) \psi_i(\alpha) = sm'_i(0) (A^*(\alpha) - 1) + \\
+ p_i \{ \lambda + 2f m'_i(0) \} A^*(\alpha) + \mu_i \varphi_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Откуда,

$$\begin{aligned}
\psi_i(\alpha) = \frac{1}{2\mu_i - \alpha} \{ sm'_i(0) (A^*(\alpha) - 1) + \\
+ p_i [\lambda + 2f m'_i(0)] A^*(\alpha) + \mu_i \varphi_i(\alpha) \}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.17) и (2.11), для моментов второго порядка числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ) неоднородной системы

$GI|M^{(n)}|_{\infty}$  можно записать следующее равенство:

$$sm_i(\infty) = \psi_i(0) = \frac{p_i\lambda}{\mu_i} + \frac{p_i^2\lambda A^*(\mu_i)}{\mu_i(1 - A^*(\mu_i))}.$$

Таким образом,

$$M\{i^2\} = sm_i = \frac{p_i\lambda}{\mu_i} + \frac{p_i^2\lambda A^*(\mu_i)}{\mu_i(1 - A^*(\mu_i))}.$$

### Корреляционный момент

По свойствам характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial^2 H(z, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i \partial u_g} \right|_{u_1=0, \dots, u_n=0} = j^2 cm_{ig}(z), \quad i = 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, n, \quad i \neq g.$$

Тогда, для того чтобы найти корреляционный момент  $cm_{ig}(z)$  числа занятых приборов типа  $i$  и  $g$  ( $i = 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, n, \quad i \neq g$ ), продифференцируем (2.14) по переменной  $u_g, \quad g \neq i$  и положим в полученном уравнении  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ :

$$\begin{aligned} cm'_{ig}(z) + cm'_{ig}(0) \left( \sum_{s=1}^n p_s A(z) - 1 \right) + p_g f m'_i(0) A(z) + \\ + p_i f m'_g(0) A(z) - \mu_i cm_{ig}(z) - \mu_g cm_{ig}(z) = 0. \end{aligned}$$

Решать полученное дифференциальное уравнение будем с помощью преобразования Лапласа-Стилтьеса, обозначив

$$\theta_{ig}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dcm_{ig}(z), \quad i = 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, n, \quad i \neq g. \quad (2.23)$$

Получаем

$$\begin{aligned} (\mu_i + \mu_g - \alpha) \theta_{ig}(\alpha) = cm'_{ig}(0) \left( \sum_{s=1}^n p_s A^*(\alpha) - 1 \right) + \\ + (p_g f m'_i(0) + p_i f m'_g(0)) A^*(\alpha). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Положим в (2.24)  $\alpha = \mu_i + \mu_g$ , тогда, учитывая что  $cm_{ig}(\infty) = \theta_{ig}(0)$ , а также выражение (2.17), получим выражение

$$cm_{ig} = \frac{p_i p_g}{\mu_i + \mu_g} \left\{ \frac{A^*(\mu_i)}{1 - A^*(\mu_i)} + \frac{A^*(\mu_g)}{1 - A^*(\mu_g)} \right\} \lambda.$$

*Теорема доказана.*

Запишем выражение для нахождения дисперсии числа занятых приборов  $i$ -ого типа системы  $GI|M^{(n)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием

$$\begin{aligned} Var_i &= sm_i - [fm_i]^2, \quad i = 1, \dots, n, \\ Var_i &= \frac{p_i \lambda}{\mu_i} + \frac{p_i^2 \lambda A^*(\mu_i)}{\mu_i (1 - A^*(\mu_i))} - \frac{p_i^2 \lambda^2}{\mu_i^2}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, для коэффициента корреляции  $r_{ig}$  числа занятых приборов  $i$ -ого и  $g$ -ого типов системы  $GI|M^{(n)}|\infty$  можно записать равенство

$$\begin{aligned} r_{ig} &= \frac{cov_{ig}}{\sqrt{Var_i Var_g}} = \frac{cm_{ig} - fm_i fm_g}{\sqrt{Var_i Var_g}}, \\ &i = 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, n, \quad i \neq g. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Аналогичным образом можно найти моменты более высокого порядка.

### **Пример 2.1**

Приведем численный пример для системы  $GI|M^{(2)}|\infty$ .

Для вычисления начальных моментов необходимо для начала задать функцию  $A(z)$ . Пусть длины интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока имеют равномерную функцию распределения с параметрами  $a = 0$ ,  $b = 2$ .

Вероятности поступления заявок каждого типа зададим следующими:  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 1 - p_1$ .

Покажем, как влияет изменение соотношения между параметрами обслуживания (Таблица 2.1) и изменение соотношения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  (Таблица 2.2) на значение коэффициента корреляции между компонентами исследуемого случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t)\}$ .

Таблица 2.1 – Зависимость коэффициента корреляции  $r(l_1, l_2)$  системы  $GI|M^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием от отношения параметров обслуживания

$\mu_2/\mu_1$	1	0,1	0,01	0,001
$r(l_1, l_2)$	-0,133	-0,044	-0,013	$-3,997 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2.2 – Зависимость коэффициента корреляции  $r(l_1, l_2)$  системы  $GI|M^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием от соотношения вероятностей  $p_1$  и  $p_2$

$p_2/p_1$	1	9	99	999
$r(l_1, l_2)$	-0,135	-0,082	-0,027	$-8,634 \cdot 10^{-3}$

Исходя из приведенных таблиц, можно сделать следующий вывод: зависимость между числом занятых приборов каждого типа в системе обратно пропорциональна соотношению между параметрами обслуживания на приборах и соотношению вероятностей  $\frac{p_1}{p_2}$ .

### 2.2.3 Построение гауссовской аппроксимации числа занятых приборов методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания для СМО $GI|M^{(n)}|\infty$

Асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах разного типа:

$$\mu_i = q_i \mu, \quad \mu \rightarrow 0, \quad \left( \frac{1}{\mu_i} \rightarrow \infty \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.27)$$

**Теорема 2.2** *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\lambda \frac{p_1}{\mu_1}, \dots, \lambda \frac{p_n}{\mu_n}]$  – вектор математических ожиданий числа занятых приборов,

$\mathbf{K} = [K_{is}]$ ,  $i, s = 1, \dots, n$ , где  $K_{ii} = \frac{\lambda p_i + p_i^2 f_0}{\mu_i}$  — дисперсия числа занятых приборов  $i$ -ого типа,  $K_{is} = \frac{p_i p_s f_0}{\mu_i + \mu_s}$ ,  $i \neq s$  — ковариационные моменты числа занятых приборов, где  $f_0$  определяются выражением

$$f_0 = \lambda^2 \int_0^\infty (A(u) - R(u)) du. \quad (2.28)$$

*Доказательство.* Доказательство будем выполнять в 2 этапа.

### 1 этап. Асимптотика первого порядка.

Сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 2. 1** *Асимптотическая характеристическая функция первого порядка при условии эквивалентного роста времени обслуживания числа занятых приборов неоднородной системы  $GI|M^{(n)}|\infty$  имеет вид*

$$h_1(u_1, \dots, u_n) = M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\}. \quad (2.29)$$

*Доказательство.*

Выполним в (2.10) следующие замены

$$\begin{aligned} \mu_i &= q_i \varepsilon, & u_i &= q_i \varepsilon x_i, & i &= 1, \dots, n, \\ H(u_1, \dots, u_n, z) &= F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.30)$$

в результате которых уравнение для  $F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, 0, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i e^{j x_i q_i \varepsilon} A(z) - 1 \right\} - \\ - j \sum_{i=1}^n (e^{-j \varepsilon q_i x_i} - 1) \frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Будем искать функцию  $F_1(x_1, \dots, x_n, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)$  в виде

$$F_1(x_1, \dots, x_n, z) = R(z) \Phi_1(x_1, \dots, x_n), \quad (2.32)$$

где  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n)$  — искомая скалярная функция.

Выполнив в уравнении (2.31) предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим следующее дифференциальное уравнение для  $F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)$ :

$$\frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, 0, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i e^{j x_i q_i \varepsilon} - 1 \right\} - j \sum_{i=1}^n (e^{-j \varepsilon q_i x_i} - 1) \frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, \infty, \varepsilon)}{\partial x_i} = 0.$$

Поделим левую и правую части полученного уравнения на  $\varepsilon$  и, выполнив в нем предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим следующее уравнение:

$$j \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i \frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, 0)}{\partial z} + j^2 \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial F_1(x_1, \dots, x_n, \infty)}{\partial x_i} = 0,$$

подставив в которое функцию  $F_1(x_1, \dots, x_n, z)$  в виде (2.32), получим дифференциальное уравнение в частных производных для функции  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n)$

$$j \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i \lambda \Phi_1(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial \Phi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.33)$$

Решение (2.33), удовлетворяющее начальному условию  $\Phi_1(0, \dots, 0) = 1$ , имеет вид

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\}. \quad (2.34)$$

Таким образом,

$$F_1(x_1, \dots, x_n, z) = R(z) \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \right\}.$$

Учитывая замены (2.30), можно записать асимптотическое (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) приближенное равенство

$$H(u_1, \dots, u_n, z) = F_1(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) \approx R(z) \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\}. \quad (2.35)$$

*Лемма доказана.*

### Замечание 1 Функции

$$h_1^{(i)}(u_i) = M e^{ju_i l_i(t)} = h_1(0, \dots, u_i, \dots, 0) = \exp \left\{ j\lambda p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\}, \quad (2.36)$$

$$i = 1, \dots, n$$

будем называть асимптотическим приближением первого порядка для характеристической функции числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ) в системе  $GI/M^{(n)}|\infty$ .

### 2 этап. Асимптотика второго порядка.

В уравнении (2.10) выполним замену

$$H(u_1, \dots, u_n, z) = H_2(u_1, \dots, u_n, z) \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\}. \quad (2.37)$$

Тогда получим следующее уравнение для  $H_2(u_1, \dots, u_n, z)$ :

$$\frac{\partial H_2(u_1, \dots, u_n, z)}{\partial z} + \sum_{i=1}^n (p_i e^{ju_i} A(z) - 1) \frac{\partial H_2(u_1, \dots, u_n, 0)}{\partial z} -$$

$$-j \sum_{i=1}^n \mu_i (e^{-ju_i} - 1) \left\{ \frac{\partial H_2(u_1, \dots, u_n, z)}{\partial u_i} + j\lambda \frac{p_i}{\mu_i} H_2(u_1, \dots, u_n, z) \right\}.$$

Выполним в полученном уравнении следующие замены:

$$\mu_i = q_i \varepsilon^2, \quad u_i = \varepsilon x_i, \quad H_2(u_1, \dots, u_n, z) = F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) \quad (2.38)$$

и запишем дифференциальное уравнение для функции  $F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)$

$$\frac{\partial F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)}{\partial z} + \left( \sum_{i=1}^n p_i e^{j\varepsilon q_i x_i} A(z) - 1 \right) \frac{\partial F_2(x_1, \dots, x_n, 0, \varepsilon)}{\partial z} -$$

$$-j \sum_{i=1}^n \varepsilon (e^{-j\varepsilon q_i x_i} - 1) \frac{\partial F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)}{\partial x_i} - \quad (2.39)$$

$$-j^2 \sum_{i=1}^n (e^{-j\varepsilon q_i x_i} - 1) F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) \lambda p_i = 0.$$

Решение уравнения (2.39) будем искать в виде

$$F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) = \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \left\{ R(z) + j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i f(z) \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (2.40)$$

Подставив (2.40) в (2.39), имеем следующее уравнение:

$$\Phi_2(x_1, \dots, x_n) \left\{ j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i f'(z) + j\varepsilon \lambda \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i A(z) + j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i f_0(A(z) - 1) - j\varepsilon \lambda \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i R(z) \right\} = O(\varepsilon^2),$$

где  $f_0 = f'(0)$ .

Разделим обе части полученного уравнения на  $\varepsilon$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\Phi_2(x_1, \dots, x_n) \left\{ j \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i f'(z) + j\lambda \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i A(z) + j \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i f_0(A(z) - 1) - j\lambda \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i R(z) \right\} = 0,$$

откуда, учитывая равенство  $R'(z) + \lambda(A(z) - 1) = 0$ , несложно получить следующее уравнение для функции  $f(z)$ :

$$f'(z) + f_0(A(z) - 1) + \lambda(A(z) - R(z)) = 0, \quad (2.41)$$

решение которого имеет вид

$$f(z) = \lambda \int_0^z (R(u) - A(u)) du + f_0 \int_0^z (1 - A(u)) du.$$

Полагая  $f(\infty) = 0$ , устремим  $z \rightarrow \infty$  и получим выражение

$$f_0 = \lambda^2 \int_0^\infty (A(u) - R(u)) du,$$

которое совпадает с выражением для  $f_0$  (2.28).

Для нахождения вида функции  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n)$  разложим в уравнении (2.39) экспоненты в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon)}{\partial z} + (j\varepsilon)^2 \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial F_2(x_1, \dots, x_n, 0, \varepsilon)}{\partial x_i} + \\ & + \left\{ j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i A(z) + (j\varepsilon)^2 \sum_{i=1}^n p_i \frac{(q_i x_i)^2}{2} A(z) + \right. \\ & \quad \left. + A(z) - 1 \right\} \frac{\partial F_2(x_1, \dots, x_n, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \\ & + \lambda \frac{(j\varepsilon)^2}{2} \sum_{i=1}^n p_i (q_i x_i)^2 F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) - \\ & - j\lambda \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) = O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставив в полученное выражение разложение (2.40), устремив  $z \rightarrow \infty$  и выполнив предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n q_i x_i \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \\ & = j^2 \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{(q_i x_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^n p_i q_i x_i f_0 \sum_{s=1}^n p_s q_s x_s \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Решением дифференциального уравнения (2.42), удовлетворяющим начальному условию  $\Phi_2(0, \dots, 0) = 1$  является функция  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n)$  вида

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ j^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{x_i^2 q_i}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^n p_i \frac{q_i x_i^2}{2} f_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1, s \neq i}^n \frac{p_i p_s q_i q_s x_i x_s}{q_i + q_s} f_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Учитывая, что

$$H_2(u_1, \dots, u_n, z) = F_2(x_1, \dots, x_n, z, \varepsilon) \approx R(z) \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \quad (2.44)$$

и замены (2.38), запишем выражение для  $H_2(u_1, \dots, u_n, z)$  в виде

$$H_2(u_1, \dots, u_n, z) = R(z) \exp \left\{ j^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2\mu_i} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{u_i^2}{2} f_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1, s \neq i}^n \frac{p_i p_s u_i u_s}{\mu_i + \mu_s} f_0 \right] \right\}. \quad (2.45)$$

Из равенств (2.37) и (2.45) получим выражение для характеристической функции многомерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$

$$\begin{aligned} h_2(u_1, \dots, u_n) &= H(u_1, \dots, u_n, \infty) = M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \\ &= H_2(u_1, \dots, u_n, \infty) \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} \right\} = \\ &= \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i}{\mu_i} + j^2 \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2\mu_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \frac{j u_i j u_s}{\mu_i + \mu_s} f_0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Таким образом, асимптотическая характеристическая функции числа занятых приборов разного типа в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  имеет вид многомерной гауссовской с параметрами:

$\mathbf{a}^T = [\lambda \frac{p_1}{\mu_1}, \dots, \lambda \frac{p_n}{\mu_n}]$  — вектор математических ожиданий числа занятых приборов,

$\mathbf{K} = [K_{is}]$ ,  $i, s = 1, \dots, n$ , где  $K_{ii} = \frac{\lambda p_i + p_i^2 f_0}{\mu_i}$  — дисперсия числа занятых приборов  $i$ -ого типа,  $K_{is} = \frac{p_i p_s f_0}{\mu_i + \mu_s}$ ,  $i \neq s$  — ковариационные моменты числа занятых приборов.

*Теорема доказана.*

### Замечание 1 Функцию

$$h(u) = M e^{j u \sum_{i=1}^n l_i} = \exp \left\{ j u \lambda \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i} + j^2 u^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{2\mu_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{p_i p_s}{\mu_i + \mu_s} f_0 \right] \right\}$$

будем называть асимптотическим приближением второго порядка для характеристической функции общего числа занятых приборов системы  $GI|M^{(n)}|\infty$ .

## 2.2.4 Численная реализация

Для определения области применимости асимптотического метода сравним асимптотические и допредельные характеристики системы  $GI|M^{(n)}|\infty$ , полученные в разделах 2.2.2 и 2.2.3 соответственно.

Зададим следующие параметры системы. Пусть длины интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока имеют равномерную функцию распределения

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b, \\ 1, & \text{если } x \geq b \end{cases}$$

с параметрами  $a = 0$ ,  $b = 2$ , то есть интенсивность входящего потока  $\lambda = 1$ .

Рассмотрим частный случай:  $n = 2$ . Параметры обслуживания и вероятности поступления заявок каждого типа зададим следующими:  $\mu_1 = 3\varepsilon$ ,  $\mu_2 = \varepsilon$ ,  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 1 - p_1$ .

В качестве меры точности аппроксимации зададим величину относительной погрешности в следующем виде:

$$\Delta_i = \left| \frac{Var_i - K_{ii}}{Var_i} \right|, \quad i = 1, 2,$$

где  $Var_i$  — точное значение дисперсии числа занятых приборов каждого типа в системе  $GI|M^{(2)}|\infty$ , а  $K_{ii}$ , ( $i = 1, 2$ ) — асимптотическое. Зависимость величины относительной погрешности от значений  $\varepsilon$  отображена в Таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Сравнение значений относительной погрешности для системы  $GI|M^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием

$\varepsilon$	1	0,5	0,1	0,01
$\Delta_1$	0,084	0,057	<b>0,015</b>	<b>0,002</b>
$\Delta_2$	0,066	0,037	<b>0,008</b>	<b>0,001</b>

Из Таблицы 2.3 видно, что точность аппроксимации очень велика и разница в значениях точных и асимптотических характеристик не превышает 3% уже при  $\varepsilon = 0,1$ .

## 2.3 Выводы по главе 2

В настоящей главе исследована неоднородная бесконечнолинейная СМО  $GI|M^{(n)}|\infty$ .

В разделе 2.1 исследуется рекуррентный поток случайных разнотипных событий. Для немарковского случайного процесса, описывающего число событий разного типа в исследуемом потоке, получено аналитическое выражение для среднего числа событий каждого типа, которое позволяет вычислить моменты более высокого порядка.

В разделе 2.2.2 найдены основные вероятностные характеристики многомерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  — числа занятых приборов каждого типа в системе  $GI|M^{(n)}|\infty$  при ее стационарном функционировании. А именно, получены аналитические выражения для нахождения математического ожидания, начальных моментов второго порядка, корреляционных моментов, дисперсии и коэффициентов корреляции.

В подразделе 2.2.3 проведено исследование системы  $GI|M^{(n)}|\infty$  методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах, то есть при  $\mu_i = q_i \mu$ ,  $\mu \rightarrow 0$   $i = 1, \dots, n$ . Сформулирована и доказана теорема о том, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в рассматриваемой системе можно аппроксимировать многомерным гауссовским с соответствующими параметрами.

В подразделе 2.2.4 приведен численный пример сравнения асимптотических и допредельных характеристик системы  $GI|M^{(n)}|\infty$ , полученных в предыдущих разделах, для определения области применимости метода асимптотического анализа.

Результаты этой главы опубликованы в работах [46, 66, 71, 132].

## Глава 3 Исследование неоднородных немарковских бесконечнолинейных систем массового обслуживания вида $MMPP|GI^{(n)}|_{\infty}$ и $GI|GI^{(n)}|_{\infty}$

В данной главе рассматриваются математические модели неоднородных бесконечнолинейных систем, на вход которых поступает случайный поток разнотипных заявок (MMPP, GI). Заявка входящего потока с вероятностью  $p_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) поступает для обслуживания на прибор соответствующего типа. Количество обслуживающих приборов неограничено, а функция распределения времени обслуживания на приборах имеет произвольный вид  $B_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Исследование таких систем, а точнее многомерного немарковского случайного процесса числа занятых приборов, проводится методом динамического просеивания и асимптотическим методом в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах. Доказано, что асимптотическая характеристическая функция числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемых системах имеет вид многомерной гауссовской. Полученные результаты согласуются с уже известными результатами исследования систем с неограниченным числом обслуживающих приборов [17, 44].

### 3.1 Модификация метода многомерного динамического просеивания

Рассмотрим систему массового обслуживания (Рисунок 3.1) с неограниченным числом неоднородных обслуживающих приборов. На вход системы поступает случайный поток заявок. В момент наступления события в потоке в систему поступает только одна заявка. Дисциплина обслуживания определяется тем, что пришедшая заявка с вероятностью  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) занимает для обслуживания любой из свободных приборов соответствующего типа. Время обслуживания на приборах каждого типа имеет заданную неэкспоненциальную функцию распределения вероятностей  $B_i(x)$

( $i = 1, \dots, n$ ), которая определена для положительных случайных величин и имеет конечные моменты первого и второго порядка.

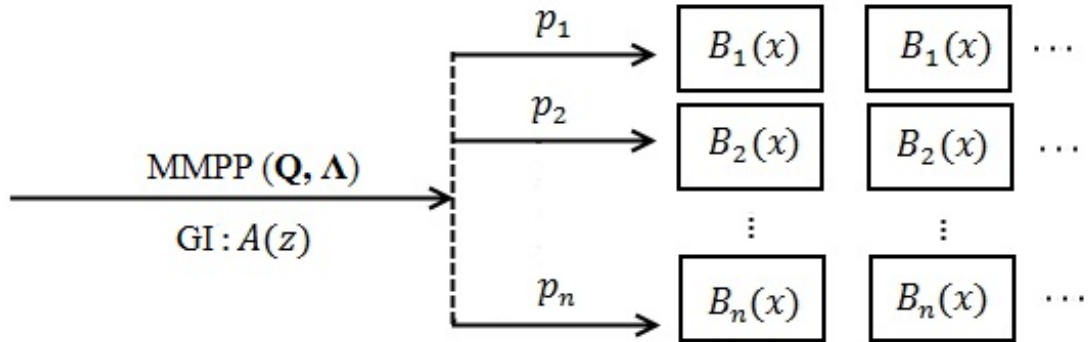


Рисунок 3.1 — Немарковская система массового обслуживания с разнотипными приборами

В качестве входящих потоков в данной главе рассматриваются математические модели ММРР- и рекуррентного потоков разнотипных заявок. Обозначим  $l_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — число приборов  $i$ -ого типа, занятых в момент времени  $t$ . Для исследуемых систем  $n$ -мерный случайный процесс  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  не является марковским. Поэтому для исследования систем предлагается применить модификацию метода многомерного динамического просеивания [44, 45, 51, 83]. Данный метод позволяет разрешить проблему исследования немарковской СМО с разнотипным обслуживанием путем сведения ее к задаче анализа нестационарного  $n$ -мерного марковизируемого потока.

На оси времени  $t$  отметим моменты наступления событий входящего потока (это могут быть события ММРР-, либо рекуррентного потока). Выделим момент времени  $T$ , относительно которого будем оценивать "просеялась" ли наша заявка (Рисунок 3.2). Итак, метод многомерного динамического просеивания заключается в следующем.

Обозначим  $S_i(t) = P\{\tau_r^{(i)} > T - t\} = 1 - B_i(T - t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени  $t$ , к некоторому выделенному моменту времени  $T$  еще не закончила своего обслуживания на приборе  $i$ -ого типа. Будем в этом случае говорить, что сформировалась заявка просеянного потока  $i$ -ого типа.

Обозначим  $\{m_1(t), \dots, m_n(t)\}$  — число заявок просеянного потока каждого типа на момент времени  $t$ .

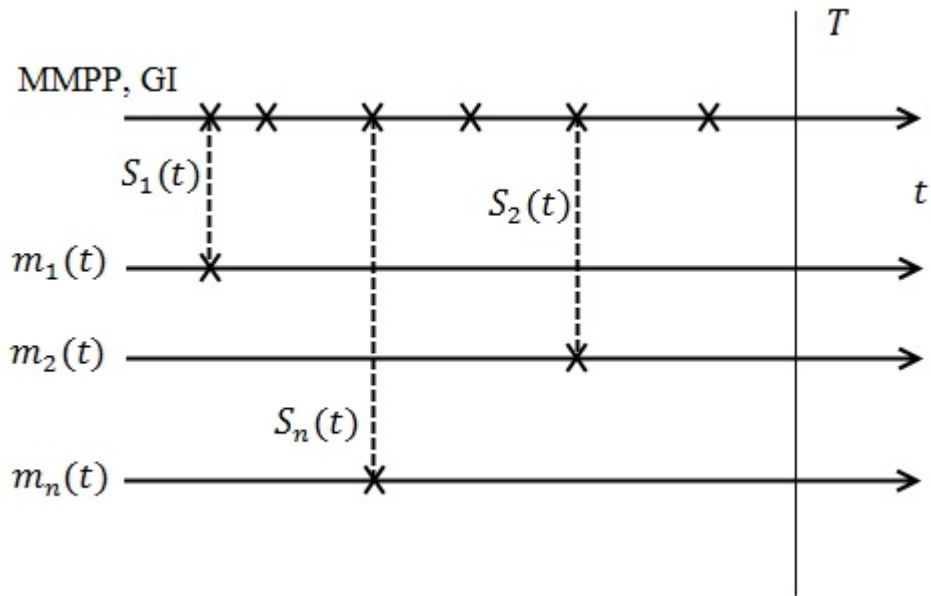


Рисунок 3.2 — Схема действия метода многомерного динамического просеивания

Пусть в начальный момент времени  $t_0 < T$  система пуста, то есть  $m_1(t_0) = \dots = m_n(t_0) = 0$ .

Тогда в момент времени  $T$ :  $l_1(T) = m_1(T), \dots, l_n(T) = m_n(T)$ .

Таким образом, для исследования немарковского процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  необходимо исследовать случайный немарковский процесс  $\{m_1(t), \dots, m_n(t)\}$  в произвольный момент времени  $t_0 \leq t \leq T$  и положить  $t = T$ .

## 3.2 Исследование неоднородных немарковских СМО

### 3.2.1 Основное векторно-матричное дифференциальное уравнение для СМО

$$\text{MMPP} | \text{GI}^{(n)} |_{\infty}$$

Рассмотрим неоднородную (гетерогенную) бесконечнолинейную СМО, на вход которой поступает ММРР-поток заявок, управляемый цепью Маркова  $k(t)$  с конечным числом состояний  $K$  и заданный матрицами  $\mathbf{Q}, \mathbf{\Lambda}$ , определенными в разделе 1.1.

Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка из входящего потока с вероятностью  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) занимает любой из свободных об-

служивающих приборов соответствующего типа для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения  $B_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Поставим задачу исследования  $n$ -мерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  числа занятых приборов каждого типа.

Для решения поставленной задачи будем использовать модификацию метода многомерного динамического просеивания потока из раздела 3.1.

Рассмотрим  $(n+1)$ -мерный случайный процесс  $\{k(t), m_1(t), \dots, m_n(t)\}$ , который является нестационарной  $(n+1)$ -мерной цепью Маркова. Обозначим  $P(k, m_1, \dots, m_n, t) = P\{k(t) = k, m_1(t) = m_1, \dots, m_n(t) = m_n\}$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  управляющая входящим ММРР-потокком цепь Маркова  $k(t)$  находится в состоянии  $k$ , а в просеянном потоке  $i$ -ого типа находится соответственно  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) заявок.

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, m_1, \dots, m_n, t)}{\partial t} = & \quad (3.1) \\ = & (-\lambda_k + q_{kk})P(k, m_1, \dots, m_n, t) + P(k, m_1, \dots, m_n, t)(\lambda_k \sum_{i=1}^n p_i(1 - S_i(t)) + \\ & + P(m_1 - 1, m_2, \dots, m_n, t)\lambda_k p_1 S_1(t) + \dots + P(k, m_1, m_2, \dots, m_n - 1, t) \times \\ & \times \lambda_k p_n S_n(t) + \sum_{\nu \neq k} q_{\nu k} P(\nu, m_1, \dots, m_n, t), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Начальные условия зададим в следующем виде:

$$P(k, m_1, \dots, m_n, t_0) = \begin{cases} R(k), & \text{если } m_1 = \dots = m_n = 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ 0, & \text{если } m_1 > 0, \dots, m_n > 0, \end{cases}$$

$R(k)$  — стационарные вероятности значений цепи Маркова  $k(t)$ .

Введем частичные характеристические функции

$$\begin{aligned} H(k, u_1, \dots, u_n, t) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \times \dots \times \sum_{m_n=0}^{\infty} e^{ju_1 m_1} \dots e^{ju_n m_n} P(k, m_1, \dots, m_n, t) = \\ &= R(k) M\{e^{ju_1 m_1} \times \dots \times e^{ju_n m_n} | k(t) = k\}, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для частичных характеристических функций

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(k, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} = \\ & = -\lambda_k \sum_{i=1}^n p_i (e^{ju_i} - 1) S_i(t) H(k, u_1, \dots, u_n, t) + \sum_{\nu} q_{\nu k} H(k, u_1, \dots, u_n, t), \\ & H(k, u_1, \dots, u_n, t) = R(k), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Воспользовавшись обозначениями, введенными в разделе 1.1, перепишем (3.2) в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t) \left[ \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n p_i (e^{ju_i} - 1) S_i(t) \mathbf{\Lambda} \right], \\ \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t_0) &= \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Исследование системы ММРР|GI<sup>(n)</sup>|∞ методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах

Обозначим:  $b_i = \int_0^{\infty} (1 - B_i(x)) dx$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — среднее значение времени обслуживания заявки на приборе  $i$ -ого типа;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (S_i(z))^2 dz &= \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-z))^2 dz = \int_0^{\infty} (1 - B_i(z))^2 dz = \beta_i, \\ \int_{-\infty}^0 S_i(z) S_g(z) dz &= \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-z))(1 - B_g(-z)) dz = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - B_i(z))(1 - B_g(z)) dz = \beta_{ig}, \\ i &= 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, n, \quad i \neq g. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах разного типа гетерогенной немарковской СМО определим

в следующем виде:

$$b_i = q_i b, \quad b \rightarrow \infty, \quad \left( \frac{1}{b_i} \rightarrow 0 \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

**Теорема 3.1** *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в неоднородной системе  $MMPP|GI^{(n)}|_\infty$  при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\kappa_1 p_1 b_1, \dots, \kappa_1 p_n b_n]$  — вектор математических ожиданий числа занятых приборов, где  $\kappa_1 = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор-столбец;

$\mathbf{K} = [K_{ig}]$ ,  $i, g = 1, \dots, n$ , где  $K_{ii} = \kappa_1 p_i b_i + 2p_i^2 \beta_i \kappa_2$  — дисперсия числа занятых приборов  $i$ -ого типа,  $K_{ig} = \kappa_2 p_i p_g \beta_{ig}$ ,  $i \neq g$  — ковариационные моменты числа занятых приборов. Здесь  $\kappa_2 = \mathbf{f}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ , а вектор-функция  $\mathbf{f}$  является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\mathbf{Q} + \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}) &= 0, \\ \mathbf{f}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Доказательство будем осуществлять в 2 этапа.

### Этап 1. Асимптотика первого порядка

Докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.1** *Асимптотическая характеристическая функция первого порядка при условии эквивалентного роста времени обслуживания числа занятых приборов неоднородной системы  $MMPP|GI^{(n)}|_\infty$  имеет вид*

$$h_1(u_1, \dots, u_n) = \exp\left\{j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i\right\}. \quad (3.7)$$

*Доказательство.* Обозначим  $b_i = q_i b$ ,  $\frac{1}{q_i b} = \varepsilon$  и выполним в (3.3)

замены

$$\begin{aligned} t\varepsilon &= \tau, & t_0\varepsilon &= \tau_0, & S_i(t) &= \tilde{S}_i(\tau), & u_i &= \varepsilon x_i, \\ \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t) &= \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon), & i &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

тогда получим систему дифференциальных уравнений для  $\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \\ &= \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \left[ \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n p_i (e^{j\varepsilon x_i} - 1) \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В системе уравнений (3.9) выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим, что  $\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)$  является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau) \mathbf{Q} = 0.$$

Функцию  $\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$  будем искать в виде

$$\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau) = \Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau) \mathbf{r}, \quad (3.10)$$

где скалярную функцию  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$  можно найти следующим образом. Просуммируем все уравнения системы (3.9), домножив обе ее части на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n p_i (e^{j\varepsilon x_i} - 1) \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} \right\} \mathbf{e}.$$

Далее, учитывая, что  $\mathbf{Qe} = 0$ , поделим левую и правую части полученного равенства на  $\varepsilon$  и, полагая  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим выражение для  $\mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau) \sum_{i=1}^n p_i j x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}. \quad (3.11)$$

Подставив (3.10) в (3.11) и принимая во внимание то, что  $\kappa_1 = \mathbf{r} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}$  и  $\mathbf{re} = 1$ , получим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} = j \kappa_1 \Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau) \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e},$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau) = \exp \left\{ j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i x_i \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(z) dz \right\}.$$

Подставив это выражение в (3.10) и учитывая (3.8), можно записать асимптотическое (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) приближенное равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t) &= \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(x_1, \dots, x_n, \tau) = \\ &= \mathbf{r} \exp \left\{ j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_{t_0}^t S_i(z) dz \right\}, \end{aligned}$$

откуда, положив  $t = T = 0$ , для характеристической функции случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} h_1(u_1, \dots, u_n) &= M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, 0) \mathbf{e} = \\ &= \exp \left\{ j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_0^{\infty} (1 - B_i(z)) dz \right\} = \\ &= \exp \left\{ j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i \right\}. \end{aligned}$$

*Лемма доказана.*

**Замечание 1** *Функцию*

$$h_1^{(i)}(u_i) = M e^{j u_i l_i(t)} = h_1(0, \dots, u_i, \dots, 0) = \exp \{ j\kappa_1 p_i u_i b_i \} \quad (3.12)$$

*будем называть асимптотической характеристической функцией первого порядка числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ) для неоднородной СМО  $MMPP|GI^{(n)}|_{\infty}$ .*

Обозначим  $fm_i^{as} = p_i \kappa_1 b_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) — асимптотические средние значения числа занятых приборов  $i$ -ого типа для системы  $MMPP|GI^{(n)}|_{\infty}$  с разнотипным обслуживанием. Следует отметить, что они совпадают с соответствующими допредельными значениями.

## Этап 2. Асимптотика второго порядка

Будем искать решение системы уравнений (3.3) в виде

$$\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, t) = \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t) \exp \left\{ j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_{t_0}^t S_i(z) dz \right\}, \quad (3.13)$$

подставляя которое в (3.3), получим, что  $\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t)$  является решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} &= \quad (3.14) \\ &= \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t) \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n p_i (e^{ju_i} - 1) S_i(t) \mathbf{\Lambda} - j\kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i S_i(t) \mathbf{I} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная диагональная матрица.

Обозначив  $b_i = q_i b$ ,  $\frac{1}{q_i b} = \varepsilon^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ), выполним в (3.14) следующие замены:

$$\begin{aligned} t\varepsilon^2 = \tau, \quad t_0\varepsilon^2 = \tau_0, \quad S_i(t) = \tilde{S}_i(\tau), \quad u_i = \varepsilon x_i, \\ \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t) = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.15)$$

и получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \quad (3.16) \\ &= \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n p_i (e^{j\varepsilon x_i} - 1) \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} - j\kappa_1 \sum_{i=1}^n \varepsilon p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{I} \right\}. \end{aligned}$$

Представим вектор-функцию  $\mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)$  в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) &= \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \{ \mathbf{r} + \\ &+ j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{f} \} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.17)$$

подставив которое в (3.16), получим выражение

$$O(\varepsilon^2) = \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \left\{ j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{f} \mathbf{Q} + \right. \\ \left. + j\varepsilon \mathbf{r} \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) [\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}] \right\}. \quad (3.18)$$

Откуда получаем, что вектор-функции  $\mathbf{f}$  определяется решением системы уравнений

$$\mathbf{f} \mathbf{Q} + \mathbf{r} (\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}) = 0, \\ \mathbf{f} \mathbf{e} = 0,$$

совпадающей с (3.6).

Для нахождения скалярной функции  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)$  просуммируем все уравнения системы (3.16)

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \\ = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n p_i (e^{j\varepsilon x_i} - 1) \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} - j\kappa_1 \sum_{i=1}^n \varepsilon p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{I} \right\} \mathbf{e},$$

в получившемся равенстве разложим экспоненты в ряд Тейлора:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \\ = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \left( j\varepsilon x_i + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} \right) \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{\Lambda} - j\kappa_1 \sum_{i=1}^n \varepsilon p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{I} \right\} \mathbf{e}$$

и подставим в него разложение (3.17).

Тогда, обозначив  $\kappa_2 = \mathbf{f} (\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}) \mathbf{e}$ , получим дифференциальное уравнение для функции  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} = \quad (3.19) \\ = \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \left\{ j\varepsilon \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \mathbf{r} (\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \frac{(j\varepsilon)^2}{2} \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \tilde{S}_i(\tau) + \right.$$

$$+ (j\varepsilon)^2 \kappa_2 \left[ \sum_{i=1}^n p_i^2 x_i^2 \tilde{S}_i^2(\tau) + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g x_i x_g \tilde{S}_i(\tau) \tilde{S}_g(\tau) \right] \Big\} + O(\varepsilon^3).$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тогда решение  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)$  уравнения (3.19) имеет вид

$$\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) = \exp \left\{ \frac{j^2}{2} \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(z) dz + \right. \quad (3.20)$$

$$\left. + j^2 \kappa_2 \left[ \sum_{i=1}^n p_i^2 x_i^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i^2(z) dz + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g x_i x_g \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(z) \tilde{S}_g(z) dz \right] \right\}.$$

Подставив (3.20) в (3.17) и учитывая замены (3.15), запишем выражение для  $\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t)$

$$\mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, t) = \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_2(x_1, \dots, x_n, \tau) =$$

$$= \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{j^2}{2} \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i^2 \int_{t_0}^t S_i(z) dz + \right.$$

$$\left. + j^2 \kappa_2 \left[ \sum_{i=1}^n p_i^2 u_i^2 \int_{t_0}^t S_i^2(z) dz + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g u_i u_g \int_{t_0}^t S_i(z) S_g(z) dz \right] \right\}.$$

Положим  $t = T = 0$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$  и, учитывая обозначения (3.4), получим

$$\mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, 0) = \mathbf{H}_2(u_1, \dots, u_n, 0) \exp \left\{ j \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i \right\} =$$

$$= \mathbf{r} \exp \left\{ j \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i + j^2 \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2} b_i + \right.$$

$$\left. + j^2 \kappa_2 \left[ \sum_{i=1}^n p_i^2 u_i^2 \beta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g u_i u_g \beta_{ig} \right] \right\}.$$

Тогда асимптотическая характеристическая функция второго порядка числа занятых приборов неоднородной системы  $\text{MMPR}|\text{GI}^{(n)}|\infty$  будет

ИМЕТЬ ВИД

$$h_2(u_1, \dots, u_n) = M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(t)} = \mathbf{H}(u_1, \dots, u_n, 0) \mathbf{e} = \exp \left\{ j \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i + \right. \\ \left. + j^2 \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2} b_i + j^2 \kappa_2 \left[ \sum_{i=1}^n p_i^2 u_i^2 \beta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g u_i u_g \beta_{ig} \right] \right\}, \quad (3.21)$$

откуда следует утверждение теоремы.

*Теорема доказана.*

**Замечание 1** *Функцию*

$$h(u) = M e^{j u \sum_{i=1}^n l_i} = \exp \left\{ j u \kappa_1 \sum_{i=1}^n p_i b_i + \right. \\ \left. + j^2 u^2 \left[ \kappa_1 \sum_{i=1}^n \frac{p_i b_i}{2} + \kappa_2 \sum_{i=1}^n p_i^2 \beta_i + \kappa_2 \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \beta_{is} \right] \right\} \quad (3.22)$$

будем называть асимптотическим приближением второго порядка для характеристической функции общего числа занятых приборов системы  $MMPP|GI^{(n)}|_{\infty}$ .

В работе [70] аналогичные исследования проведены для неоднородной системы вида  $MAP|GI^{(n)}|_{\infty}$ .

### Пример 3.1

Так как не удастся получить значения допредельных вероятностных характеристик гетерогенной СМО  $MAP|GI^{(n)}|_{\infty}$ , то для оценки области применимости асимптотического метода проведем сравнение асимптотического и полученного с помощью имитационного моделирования распределений вероятностей числа занятых приборов исследуемой системы.

Рассмотрим частный случай, когда число обслуживающих приборов  $n = 2$ .

Для задания входящего  $MAP$ -потока заявок воспользуемся параметрами из раздела 1.2.2. Функцию  $B_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) распределения времени обслуживания на приборах зададим как гамма-функцию с параметрами  $\xi_i$ , ( $i = 1, 2$ ) и  $\alpha$ , где  $\xi_i$  — параметр формы,  $\alpha$  — параметр масштаба. Положим  $\alpha = 1$ ,  $\xi_1 = \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $\xi_2 = \frac{2}{\varepsilon}$ .

Воспользуемся теоремой 3.1 для построения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов в системе  $\text{MAP}|\text{GI}^{(2)}|\infty$ .

В качестве метрики, которая количественно демонстрирует близость исследуемых распределений возьмем расстояние Колмогорова [45, 77]

$$\Delta = \max_{0 \leq n < \infty, 0 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (F_{as}(i, j) - F_{im}(i, j)) \right|, \quad (3.23)$$

где  $F_{as}(i, j)$  — асимптотическая функция распределения, а  $F_{im}(i, j)$  — функция распределения, полученная в результате имитационного моделирования при генерации 100000 событий (3.1).

Таблица 3.1 – Сравнение расстояния Колмогорова для асимптотического и "имитационного" распределений вероятностей числа занятых приборов в неоднородной системе  $\text{MAP}|\text{GI}^{(2)}|\infty$

$\varepsilon$	0,5	0,1	0,01
$\Delta$	0,67	0,11	<b>0,016</b>

На численном примере показано, что при  $\varepsilon = 0,01$  величина погрешности не превышает уровня 3%, что мы считаем приемлемым для практического применения.

### 3.2.3 Система дифференциальных уравнений для характеристических функций неоднородных СМО $\text{GI}|\text{GI}^{(n)}|\infty$

Рассмотрим гетерогенную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов  $n$  разных типов и произвольным временем обслуживания. На вход системы поступает рекуррентный поток заявок, который определяется функцией распределения вероятностей  $A(z)$ . Длины интервалов между моментами наступления событий потока есть положительные случайные величины, имеющие конечные моменты первого и второго порядка. В момент наступления события в потоке только одна заявка поступает в систему и с вероятностью

$p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) осуществляется её обслуживание на приборе  $i$ -ого типа в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения  $B_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Поставим задачу исследования  $n$ -мерного случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$  числа занятых приборов каждого типа в момент времени  $t$ .  $n$ -мерный случайный процесс  $\{l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$  не является марковским. Рассмотрим  $(n + 1)$ -мерный марковский случайный процесс  $\{z(t), l_1(t), l_2(t), \dots, l_n(t)\}$ , здесь  $z(t)$  — остаточное время от момента времени  $t$  до момента наступления следующего события рекуррентного потока.

Для решения поставленной задачи снова воспользуемся методом многомерного динамического просеивания потока [45]. Для этого введем следующие обозначения:

$m_1(T), \dots, m_n(T)$  — число заявок, поступивших в систему в момент времени  $t$  и не закончивших обслуживание к моменту времени  $T$ ,  $t < T$ ;

$S_i(t) = P\{\tau_k^{(i)} > T - t\} = 1 - B_i(T - t)$  — вероятность того, что заявка  $i$ -ого типа, пришедшая в момент времени  $t$ , к некоторому выделенному моменту времени  $T$  еще не закончила своего обслуживания ( $i = 1, \dots, n$ ).

Пусть в начальный момент времени  $t_0 < T$  система пуста, то есть  $m_1(t_0) = \dots = m_n(t_0) = 0$ . Тогда в момент времени  $T$  :  $l_1(T) = m_1(T), \dots, l_n(T) = m_n(T)$ . Таким образом, задача исследования случайного немарковского процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  сводится к задаче исследования случайного немарковского процесса  $\{m_1(t), \dots, m_n(t)\}$  в произвольный момент времени  $t_0 \leq t \leq T$  при  $t = T$ .

Случайный  $(n + 1)$ -мерный процесс  $\{z(t), m_1(t), \dots, m_n(t)\}$  является  $(n + 1)$ -мерной нестационарной цепью Маркова.

Введем совместное распределение вероятностей  $P(z, m_1, \dots, m_n, t) = P\{z(t) < z, m_1(t) = m_1, \dots, m_n(t) = m_n\}$  и запишем для него систему дифференциальное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial P(z, m_1, \dots, m_n, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z, m_1, \dots, m_n, t)}{\partial z} + \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial P(0, m_1, \dots, m_n, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + \frac{\partial P(0, m_1 - 1, \dots, m_n, t)}{\partial z} p_1 S_1(t) A(z) + \dots + \\
& + \frac{\partial P(0, m_1, \dots, m_n - 1, t)}{\partial z} p_n S_n(t) A(z) - \frac{\partial P(0, m_1, \dots, m_n, t)}{\partial z} A(z) \sum_{i=1}^n p_i S_i(t), \\
& m_i = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Введем характеристическую функцию следующего вида:

$$H(z, u_1, \dots, u_n, t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} e^{ju_1 m_1} \times \dots \times e^{ju_n m_n} P(z, m_1, \dots, m_n, t),$$

здесь  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Учитывая (3.24), запишем дифференциальное уравнение в частных производных для характеристической функции  $H(z, u_1, \dots, u_n, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} &= \frac{\partial H(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(0, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + \\
&+ \frac{\partial H(0, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} A(z) \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (e^{ju_i} - 1),
\end{aligned}$$

$$H(z, u_1, \dots, u_n, t_0) = R(z), \quad (3.25)$$

где  $R(z)$  — стационарное распределение вероятностей случайного процесса  $z(t)$ , определяемое выражением (2.5).

### 3.2.4 Исследование системы $GI|GI^{(n)}|_{\infty}$ методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах

Согласно введенным ранее обозначениям (3.4):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (S_i(z))^2 dz &= \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-z))^2 dz = \int_0^{\infty} (1 - B_i(z))^2 dz = \beta_i, \\ \int_{-\infty}^0 S_i(z) S_g(z) dz &= \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-z))(1 - B_g(-z)) dz = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - B_i(z))(1 - B_g(z)) dz = \beta_{ig}, \\ i &= 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, n, \quad i \neq g. \end{aligned}$$

**Теорема 3. 2** *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе  $GI|GI^{(n)}|_{\infty}$  с  $n$  типами обслуживающих приборов при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\lambda p_1 b_1, \dots, \lambda p_n b_n]$  — вектор математических ожиданий числа занятых приборов;

$\mathbf{K} = [K_{ig}]$ ,  $i, g = 1, \dots, n$ , где  $K_{ii} = \lambda p_i b_i + 2p_i^2 \beta_i f_0$  — дисперсия числа занятых приборов  $i$ -ого типа,  $K_{ig} = p_i p_g \beta_{ig} f_0$ ,  $i \neq g$  — ковариационные моменты числа занятых приборов, где

$$f_0 = \lambda^2 \int_0^{\infty} (A(u) - R(u)) du. \quad (3.26)$$

*Доказательство.*

**1 этап. Асимптотика первого порядка**

Обозначим

$$t\varepsilon = \tau, \quad t_0\varepsilon = \tau_0, \quad b_i = q_i b, \quad \frac{1}{q_i b} = \varepsilon, \quad u_i = \varepsilon x_i, \quad S_i(t) = \tilde{S}_i(\tau), \quad (3.27)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad H(z, u_1, \dots, u_n, t) = F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon).$$

Учитывая (3.27), можно переписать (3.25) в виде

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \\ & = \frac{\partial F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} (A(z) - 1) + \\ & + \frac{\partial F_1(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} A(z) \sum_{i=1}^n p_i \tilde{S}_i(\tau) (e^{j\varepsilon x_i} - 1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 3. 2** *Асимптотическая характеристическая функция первого порядка при условии эквивалентного роста времени обслуживания числа занятых приборов для неоднородной системы  $GI|GI^{(n)}|\infty$  имеет вид*

$$h_1(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i \right\}. \quad (3.29)$$

*Доказательство.*

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  в (3.28) и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial z} (A(z) - 1) = 0, \quad (3.30)$$

здесь  $F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)$ .

Будем искать  $F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau)$  в виде

$$F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau) = R(z) \Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau), \quad (3.31)$$

где  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$  — искомая функция.

Устремив  $z \rightarrow \infty$  в (3.28), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial F_1(\infty, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \\ & = \frac{\partial F_1(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \sum_{i=1}^n p_i \tilde{S}_i(\tau) (e^{j\varepsilon x_i} - 1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

В (3.32) разложим экспоненты в ряд Тейлора, разделим обе части полученного уравнения на  $\varepsilon$  и подставим в полученное выражение функцию  $F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau)$  в виде (3.31). Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно записать следующее дифференциальное уравнение для  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$ :

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} = j\lambda \Phi(x_1, \dots, x_n, \tau) \sum_{i=1}^n p_i \tilde{S}_i(\tau) x_i, \quad (3.33)$$

где  $\lambda = R'(z)|_{z=0}$ .

Решение  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau)$  уравнения (3.33) с учетом начальных условий  $\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau_0) = 1$  имеет вид

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n, \tau) = \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(w) dw \right\}. \quad (3.34)$$

Тогда для функции  $F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau)$  можно записать выражение

$$F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau) = R(z) \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(w) dw \right\}.$$

Учитывая введенные замены (3.27), запишем приближенное равенство ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} H(z, u_1, \dots, u_n, t) &= F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \approx F_1(z, x_1, \dots, x_n, \tau) = \\ &= R(z) \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тогда при  $t = T = 0$  для характеристической функции случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  имеем:

$$\begin{aligned} h_1(u_1, \dots, u_n) &= \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-w)) dw \right\} = \\ &= \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i \right\}. \end{aligned}$$

*Лемма доказана.*

**Замечание 1** Функцию

$$h_1^{(i)}(u_i) = M e^{j u_i l_i(t)} = h_1(0, \dots, u_i, \dots, 0) = \exp\{j \lambda p_i u_i b_i\} \quad (3.36)$$

будем называть асимптотической характеристической функцией первого порядка числа занятых приборов  $i$ -ого типа ( $i = 1, \dots, n$ ) для неоднородной системы  $GI|GI^{(n)}|\infty$ .

**Этап 2. Асимптотика второго порядка**

Далее определим искомую функцию  $H(z, u_1, \dots, u_n, t)$  в виде

$$\begin{aligned} H(z, u_1, \dots, u_n, t) &= \\ &= H_2(z, u_1, \dots, u_n, t) \exp \left\{ j \lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Подставив (3.37) в (3.25) получим следующее дифференциальное уравнение для  $H_2(z, u_1, \dots, u_n, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial t} + H_2(z, u_1, \dots, u_n, t) j \lambda \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) u_i &= \\ = \frac{\partial H_2(z, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(0, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + & \quad (3.38) \\ + \frac{\partial H_2(0, u_1, \dots, u_n, t)}{\partial z} A(z) \sum_{i=1}^n p_i S_i(t) (e^{j u_i} - 1). \end{aligned}$$

Выполним в (3.38) следующие замены:

$$t \varepsilon^2 = \tau, \quad t_0 \varepsilon^2 = \tau_0, \quad b = q_i b, \quad \frac{1}{q_i b} = \varepsilon^2, \quad u_i = \varepsilon x_i, \quad (3.39)$$

$$S_i(t) = \tilde{S}_i(\tau), \quad i = 1, \dots, n, \quad H_2(z, u_1, \dots, u_n, t) = F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)$$

и получим

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) j \lambda \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) = \\
& = \frac{\partial F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} (A(z) - 1) + \\
& \quad + \frac{\partial F_2(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} A(z) \sum_{i=1}^n p_i \tilde{S}_i(\tau) (e^{j \varepsilon x_i} - 1).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Решение уравнения (3.40) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) = \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \times \\
& \times \left\{ R(z) + j \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i x_i f(z) \tilde{S}_i(\tau) \right\} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Подставим (3.41) в (3.40) и получим

$$\begin{aligned}
& R(z) j \varepsilon \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) = R'(z) + \lambda (A(z) - 1) + \\
& + j \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \{ f'(z) + (A(z) - 1) f'(0) + \lambda A(z) \} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Учитывая, что  $R'(z) + \lambda (A(z) - 1) = 0$ , можно записать следующее дифференциальное уравнение для функции  $f(z)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$f'(z) + f_0 (A(z) - 1) + \lambda A(z) = \lambda R(z), \tag{3.43}$$

решение которой имеет вид

$$f_0 = \lambda^2 \int_0^\infty (A(u) - R(u)) du,$$

совпадающий с (3.26).

В уравнении (3.40) разложим экспоненты в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (j\varepsilon)^2 A(z) \sum_{i=1}^n p_i \frac{x_i^2}{2} \tilde{S}_i(\tau) \frac{\partial F_2(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &+ (j\varepsilon) \left[ A(z) \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \frac{\partial F_2(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \right. \\ &\left. - \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \right] + \frac{\partial F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &+ (A(z) - 1) \frac{\partial F_2(0, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставим (3.41) в полученное выражение. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} R(z) &= (j\varepsilon)^2 \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \times \\ &\times \left[ A(z) \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{x_i^2}{2} \tilde{S}_i(\tau) + A(z) \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \sum_{g=1}^n p_g x_g \tilde{S}_g(\tau) f_0 - \right. \\ &\left. - \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \sum_{g=1}^n p_g x_g \tilde{S}_g(\tau) f(z) \right] + j\varepsilon \Phi(x_1, \dots, x_n, \tau) \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \times \\ &\times [\lambda A(z) - \lambda R(z) + f'(z) + (A(z) - 1) f_0] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Учитывая (3.43), запишем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} R(z) &= (j\varepsilon)^2 \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \times \\ &\times \left[ A(z) \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{x_i^2}{2} \tilde{S}_i(\tau) + A(z) \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \sum_{g=1}^n p_g x_g \tilde{S}_g(\tau) f'_g(0) - \right. \\ &\left. - \lambda \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \sum_{g=1}^n p_g x_g \tilde{S}_g(\tau) f_g(z) \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Разделив обе части уравнения (3.44) на  $\varepsilon^2$  и устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а  $z \rightarrow \infty$ , можно записать следующее дифференциальное уравнение для

функции  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)}{\partial \tau} &= j^2 \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) \times \\ &\times \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{x_i^2}{2} \tilde{S}_i(\tau) + \sum_{i=1}^n p_i x_i \tilde{S}_i(\tau) \sum_{g=1}^n p_g x_g \tilde{S}_g(\tau) f_0 \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Решением дифференциального уравнения (3.45), удовлетворяющим начальным условиям  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau_0) = 1$ , является функция  $\Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau)$  вида

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau) &= \exp \left\{ j^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{x_i^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(w) dw + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^n p_i^2 x_i^2 f_0 \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i^2(w) dw + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g x_i x_g f_0 \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{S}_i(w) \tilde{S}_g(w) dw \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Так как имеет место приближенное равенство при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} H_2(z, u_1, \dots, u_n, t) &= F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau, \varepsilon) \approx \\ &\approx F_2(z, x_1, \dots, x_n, \tau) = R(z) \Phi_2(x_1, \dots, x_n, \tau), \end{aligned}$$

учитывая замены (3.39), запишем выражение для функции  $H_2(z, u_1, \dots, u_n, t)$

$$\begin{aligned} H_2(z, u_1, \dots, u_n, t) &= R(z) \exp \left\{ j^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2} \int_{t_0}^t S_i(w) dw + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^n p_i^2 u_i^2 f_0 \int_{t_0}^t S_i^2(w) dw + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g u_i u_g f_0 \int_{t_0}^t S_i(w) S_g(w) dw \right] \right\}. \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание вид функции  $H(z, u_1, \dots, u_n, t)$  (3.37), получим следующее выражение:

$$H(z, u_1, \dots, u_n, t) = R(z) \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw + \right. \\ \left. + j^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2} \int_{t_0}^t S_i(w) dw + \sum_{i=1}^n p_i^2 u_i^2 f_0 \int_{t_0}^t S_i^2(w) dw + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g u_i u_g f_0 \int_{t_0}^t S_i(w) S_g(w) dw \right] \right\}.$$

Тогда, с учетом обозначений (3.4), для характеристической функции  $h_2(u_1, \dots, u_n) = M e^{j \sum_{i=1}^n u_i l_i(T)} = H(\infty, u_1, \dots, u_n, T)$  случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  при  $t = T = 0$  и  $t_0 \rightarrow -\infty$  имеем выражение

$$h_2(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ j\lambda \sum_{i=1}^n p_i u_i b_i + j^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i^2}{2} b_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^n p_i^2 u_i^2 f_0 \beta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g u_i u_g f_0 \beta_{ig} \right] \right\}. \quad (3.47)$$

*Теорема доказана.*

**Замечание 1** Функцию

$$h(u) = M e^{ju \sum_{i=1}^n l_i} = \exp \left\{ ju\lambda \sum_{i=1}^n p_i b_i + \right. \\ \left. + j^2 u^2 \left[ \lambda \sum_{i=1}^n \frac{p_i b_i}{2} + f_0 \sum_{i=1}^n p_i^2 \beta_i + f_0 \sum_{i=1}^n \sum_{g=1, g \neq i}^n p_i p_g \beta_{ig} \right] \right\} \quad (3.48)$$

будем называть асимптотическим приближением второго порядка для характеристической функции общего числа занятых приборов системы  $GI|GI^{(n)}|_{\infty}$ .

### Пример 3.2

Так как не удастся получить допредельные значения основных вероятностных характеристик для неоднородной системы  $GI|GI^{(n)}|_{\infty}$ , сравним

асимптотическое и полученное в результате имитационного моделирования распределения вероятностей числа занятых приборов каждого типа в системе.

Рассмотрим пример для случая  $n = 2$ . Пусть длины интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока имеют равномерную функцию распределения с параметрами  $a = 0$ ,  $b = 2$ . Функцию  $B_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) распределения времени обслуживания на приборах зададим как гамма-функцию с параметрами  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\alpha$ , где  $\xi_i$  — параметр формы,  $\alpha$  — параметр масштаба. Положим  $\alpha = 1$ ,  $\xi_1 = \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $\xi_2 = \frac{2}{\varepsilon}$ . Воспользуемся теоремой 3.2 для построения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов в системе  $GI|GI^{(2)}|\infty$ .

В качестве меры сходимости возьмем расстояние Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq n < \infty, 0 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (F_{as}(i, j) - F_{im}(i, j)) \right|, \quad (3.49)$$

где  $F_{as}(i, j)$  — асимптотическая функция распределения, а  $F_{im}(i, j)$  — функция распределения, полученная в результате имитационного моделирования при генерации 1000000 событий. (В главе 4 показано, что погрешность моделирования работы системы  $GI|GI^{(2)}|\infty$  при генерации 100000 событий не превышает 3 %.)

Результаты сравнения отображены в Таблице 3.2

Таблица 3.2 – Сравнение расстояния Колмогорова для асимптотического и "имитационного" распределений вероятностей числа занятых приборов в системе  $GI|GI^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием

$\varepsilon$	0, 5	0, 1	0, 01
$\Delta$	0, 13	0, 096	<b>0, 013</b>

Вывод: из Таблицы 3.2 видно, что величина погрешности составляет менее 2%, когда среднее время обслуживания в 100 раз превышает интенсивность входящего потока.

### 3.3 Выводы по главе 3

В данной главе выполнено исследование неоднородных систем с входящими ММРР- и рекуррентным потоками разнотипных заявок и произвольной функцией распределения времени обслуживания на приборах.

Для рассматриваемых систем проведено исследование  $n$ -мерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  числа занятых приборов каждого типа в момент времени  $t$ . Для исследования систем  $\text{MMPP}|\text{GI}^{(n)}|_\infty$  и  $\text{GI}|\text{GI}^{(n)}|_\infty$  предложена модификация метода многомерного динамического просеивания, позволяющая, получив выражения для характеристик потоков так называемых «просеянных» заявок, перейти к выражениям для искомых характеристик изначально рассматриваемых потоков. Методом введения дополнительной компоненты был осуществлен переход к нестационарной  $(n + 1)$ -мерной цепи Маркова (для систем с входящим ММРР-потоком это  $k(t)$  — распределение состояний управляющей цепи Маркова, а для систем с входящим GI-потоком —  $z(t)$  — остаточное время от момента времени  $t$  до момента наступления следующего события потока).

Для распределения вероятностей исследуемых процессов построены системы дифференциальных уравнений Колмогорова, на основе которых получены уравнения для соответствующих характеристических функций.

В разделах 3.2.2 и 3.2.4 проведено исследование систем  $\text{MMPP}|\text{GI}^{(n)}|_\infty$  и  $\text{GI}|\text{GI}^{(n)}|_\infty$  методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах, то есть при  $b_i \rightarrow \infty$ , где  $b_i = \int_0^\infty (1 - B_i(x)) dx$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — среднее значение времени обслуживания заявки на приборе  $i$ -ого типа. Сформулированы и доказаны теоремы о построении гауссовской аппроксимации стационарного распределения вероятностей числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемых системах. Записаны выражения для асимптотических характеристических функций второго порядка общего числа занятых приборов в рассматриваемых системах.

Результаты этой главы опубликованы в работах [65, 70, 133].

## **Глава 4 Комплекс программ имитационного моделирования и численного анализа неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания**

В данной главе представлено описание разработанного комплекса программ, реализующего имитационное моделирование и численный анализ вероятностных характеристик неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания. В представленный комплекс входит: программы численной реализации нахождения допредельных характеристик исследуемых процессов, а именно математического ожидания, дисперсии, корреляционного момента и коэффициента корреляции; программы, реализующие гауссовскую аппроксимацию числа занятых приборов в системах с входящими потоками разнотипных заявок (МАР, рекуррентный) и неограниченным числом обслуживающих приборов, полученную методом асимптотического анализа при условии эквивалентно растущего времени обслуживания и ПРИС; программы имитационного моделирования неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания с различными видами входящих потоков (МАР-, рекуррентный).

### **4.1 Численная реализация нахождения допредельных характеристик и метода асимптотического анализа**

Программное обеспечение для анализа характеристик всех указанных СМО на базе математической модели реализовано в виде рабочих листов системы MathCAD.

### 4.1.1 Программа вычисления допредельных значений вероятностных характеристик неоднородной системы $\text{МАР}|\text{М}^{(n)}|\infty$

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, экспоненциальной функцией распределения времени обслуживания на приборах и разнотипным обслуживанием. На вход системы поступает МАР-поток заявок, управляемый цепью Маркова  $k(t)$  с конечным числом состояний  $K$ , которая задана матрицей инфинитезимальных характеристик  $Q$ . Также входящий поток определяется набором неотрицательных чисел  $\lambda_k$  и вероятностями  $d_{\nu k}$  ( $\nu = 1, \dots, K, k = 1, \dots, K$ ). Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка из входящего потока с вероятностью  $p_i$  занимает любой из свободных обслуживающих приборов соответствующего типа для обслуживания в течение случайного времени, имеющего экспоненциальную функцию распределения с параметром  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Для нахождения начальных моментов числа занятых приборов в рассматриваемой системе использовались формулы из параграфа 1.2.2. В таблицах 4.1, 4.2 представлен текст программы вычисления характеристик системы методом начальных моментов для  $n = 3, K = 3$ .

Таблица 4.1 – Блок задания исходных параметров для программы вычисления характеристик системы  $\text{MAP}|\text{M}^{(n)}|\infty$

$n = 3, \quad K = 3;$	
$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 2,5 & 2,5 & -5 \end{pmatrix}$	— матрица инфинитезимальных характеристик для управляющей цепи Маркова $k(t)$ ;
$\mathbf{\Lambda} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	— матрица интенсивностей поступления заявок MAP-потока;
$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$	— матрица вероятностей наступления события во входящем MAP-потоке при переходе цепи Маркова $k(t)$ из одного состояния в другое;
$\mathbf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	— единичная матрица;
$\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	— единичный вектор-столбец;
$p_1 := 0,2,$ $p_2 := 0,5,$ $p_3 := 0,3$	— вероятности наступления событий соответствующего типа;
$\mu_1 := 0,2,$ $\mu_2 := 0,1,$ $\mu_3 := 0,6$	— интенсивности обслуживания заявок соответствующего типа

Таблица 4.2 – Блок вычисления допредельных значений вероятностных характеристик системы  $\text{MAP}|M^{(n)}|_{\infty}$ 

<b>Нахождение вектора стационарного распределения вероятностей состояний процесса <math>k(t)</math></b>	
$\mathbf{M} := \text{augment}(\mathbf{Q}, \mathbf{e}),$ $\mathbf{v} := \text{augment}(0 \cdot \mathbf{e}^T, 1),$ $\mathbf{r} := \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}^T \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T)^{-1}$	$\mathbf{r} = (0, 072 \ 0, 766 \ 0, 163);$
<b>Нахождение матрицы <math>\mathbf{B}</math></b>	
$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \mathbf{D}_{01}\mathbf{Q}_{01} & \mathbf{D}_{02}\mathbf{Q}_{02} \\ \mathbf{D}_{10}\mathbf{Q}_{10} & \Lambda_{11} & \mathbf{D}_{12}\mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{D}_{20}\mathbf{Q}_{20} & \mathbf{D}_{21}\mathbf{Q}_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0,05 & 12 & 0 \\ 2,25 & 1,5 & 1 \end{pmatrix};$
<b>Вычисление среднего числа занятых приборов каждого типа</b>	
$fm_i := \frac{p_i}{\mu_i} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}, \quad i = 1, 2, 3$	$fm_1 = 10,356,$ $fm_2 = 51,782,$ $fm_3 = 5,178;$
<b>Вычисление начальных моментов второго порядка числа занятых приборов каждого типа</b>	
$sm_i := p_i \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \{ \mathbf{I} + [\mu_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \cdot [\mu_i \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot p_i \cdot \mathbf{B}] \} \cdot \{ 2 \cdot \mu_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q} \}^{-1} \cdot \mathbf{e},$ $cm_{ig} := (p_g \cdot \mathbf{f}\mathbf{m}_i + p_i \cdot \mathbf{f}\mathbf{m}_g) \cdot \mathbf{B} \cdot [(\mu_i + \mu_g) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \cdot \mathbf{e},$	$sm_1 = 118,157,$ $sm_2 = 2740,155,$ $sm_3 = 32,365;$ $cm_{12} = 538,117,$ $cm_{13} = 54,019,$ $cm_{23} = 269,27;$
<b>Вычисление коэффициентов корреляции</b>	
$r_{ig} := \frac{cov_{ig}}{\sqrt{Dl_i \cdot Dl_g}} = \frac{cm_{ig} - fm_i \cdot fm_g}{\sqrt{Dl_i \cdot Dl_g}},$ $i = 1, 2, 3, \quad g = 1, 2, 3$	$r_{12} = 0,073,$ $r_{13} = 0,05,$ $r_{23} = 0,063$

### 4.1.2 Программа нахождения асимптотического распределения числа занятых приборов неоднородной системы $\text{МАР}|M^{(n)}|\infty$

В первой главе для характеристической функции  $n$ -мерного случайного процесса  $\{l_1(t), \dots, l_n(t)\}$  числа занятых приборов в системе  $\text{МАР}|M^{(n)}|\infty$  была записана асимптотическая характеристическая функция  $h_2(u_1, \dots, u_n)$ , имеющая вид  $n$ -мерной гауссовской характеристической функции

$$h_2(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ \left( ju_1 \frac{\kappa p_1}{\mu_1} + \frac{(ju_1)^2 \kappa p_1}{2 \mu_1} \right) + \dots + \left( ju_n \frac{\kappa p_n}{\mu_n} + \frac{(ju_n)^2 \kappa p_n}{2 \mu_n} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n p_i p_s \frac{ju_i ju_s}{\mu_i + \mu_s} f \mathbf{B} e \right\}.$$

Рассмотрим частный случай, а именно, двумерную гауссовскую аппроксимацию исследуемых процессов, полученную методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах для системы  $\text{МАР}|M^{(2)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием. Двумерная гауссовская характеристическая функция для рассматриваемой системы имеет вид

$$h_2(u_1, u_2) = \exp \left\{ \left( ju_1 \frac{\kappa p_1}{\mu_1} + \frac{(ju_1)^2}{2} \left[ \frac{\kappa p_1}{\mu_1} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} f \mathbf{B} e \right] \right) + \left( ju_2 \frac{\kappa p_2}{\mu_2} + \frac{(ju_2)^2}{2} \left[ \frac{\kappa p_2}{\mu_2} + \frac{p_2^2}{2\mu_2} f \mathbf{B} e \right] \right) + 2p_1 p_2 \frac{ju_1 ju_2}{\mu_1 + \mu_2} f \mathbf{B} e \right\}.$$

Зададим начальные параметры:  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 1 - p_1$ ,  $\mu_1 = \varepsilon$ ,  $\mu_2 = 2\varepsilon$ . Положим  $\varepsilon = 1$ . Начальные параметры, определяющие входящий МАР-поток, возьмем такие же, как в разделе 1.2.2.

В таблице 4.3 представлен текст программы вычисления асимптотического распределения для неоднородной системы с входящим МАР-поток и двумя типами обслуживающих приборов.

Таблица 4.3 – Блок вычисления параметров асимптотического распределения для неоднородной системы  $\text{MAP}|\text{M}^{(n)}|_{\infty}$  в случае  $n = 2$

<b>Асимптотическое среднее число занятых приборов первого и второго типа</b>	
$\kappa := \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e},$ $a_i := \frac{\kappa \cdot p_i}{\mu_i}, i = 1, 2;$	$a_1 = 1,773,$ $a_2 = 1,329;$
<b>Дисперсия числа занятых приборов первого и второго типа</b>	
$\mathbf{v1} := \text{augment}[-\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}), 0],$ $f := \mathbf{v1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot [\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T]^{-1},$ $\sigma_i^2 := \left[ \frac{\kappa \cdot p_i}{\mu_i} + \frac{p_i^2}{2\mu_i} \cdot f \cdot [\mathbf{B} - \kappa \cdot \mathbf{I}] \cdot \mathbf{e} \right], i = 1, 2;$	$\sigma_1^2 = 5,595,$ $\sigma_2^2 = 5,629;$
<b>Коэффициент корреляции</b>	
$r_{12} := \frac{p_1 \cdot p_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{2f}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot [\mathbf{B} - \kappa \cdot \mathbf{I}] \cdot \mathbf{e};$	$r_{12} = 0,681,$
<b>Асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов</b>	
$P(l_1, l_2) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\left[ \frac{1}{2 \cdot (1-r^2)} \cdot \left[ \frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \cdot r \cdot \frac{(x-a_1) \cdot (y-a_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right]}.$	

### 4.1.3 Программа вычисления допредельных характеристик числа занятых приборов неоднородной системы $\text{GI}|\text{M}^{(n)}|_{\infty}$

В разделе 2.2.2 получены выражения (2.11),(2.12),(2.13) для нахождения допредельных значений основных вероятностных характеристик системы  $\text{GI}|\text{M}^{(n)}|_{\infty}$ .

Пусть длины интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока имеют равномерную функцию распределения  $A(x)$  сле-

дующего вида:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b, \\ 1, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$$

Начальные параметры зададим следующим образом:  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 1 - p_1$ ,  $\mu_1 = 3\varepsilon$ ,  $\mu_2 = \varepsilon$ . В таблице 4.4 представлен текст программы вычисления допредельных значений начальных моментов числа занятых приборов в неоднородной системе  $GI|M|^{(n)}|\infty$  в частном случае  $n = 2$ .

Таблица 4.4 – Блок вычисления допредельных характеристик системы  $GI|M|^{(n)}|\infty$  при  $n = 2$

$\lambda := \frac{1}{\int_0^\infty (1-A(x)dx)}$ ;	
<b>Вычисление среднего числа занятых приборов каждого типа</b>	
$fm_i(\infty) := \frac{p_i}{\mu_i} \cdot \lambda, i = 1, 2;$	$fm_1 = 0,133,$ $fm_2 = 0,6;$
<b>Вычисление начальных моментов второго порядка числа занятых приборов каждого типа</b>	
$A^*(\mu_i) := \int_0^\infty e^{-\mu_i \cdot z} dA(z),$ $sm_i(\infty) := \frac{p_i \cdot \lambda}{\mu_i} + \frac{p_i^2 \cdot \lambda}{\mu_i} \cdot \frac{A^*(\mu_i)}{1-A^*(\mu_i)}, i = 1, 2;$	$sm_1 = 0,144,$ $sm_2 = 0,874;$
<b>Корреляционный момент</b>	
$cm_{12}(\infty) := \frac{p_1 \cdot p_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \left\{ \frac{A^*(\mu_1)}{1-A^*(\mu_1)} + \frac{A^*(\mu_2)}{1-A^*(\mu_2)} \right\} \cdot \lambda;$	$cm_{12} = 0,058;$
<b>Коэффициент корреляции</b>	
$r_{12} := \frac{cov_{12}}{\sqrt{Var_1 \cdot Var_2}} = \frac{cm_{12}(\infty) - fm_1(\infty) \cdot fm_2(\infty)}{\sqrt{Var_1 \cdot Var_2}};$	$r_{12} = -0,088.$

#### 4.1.4 Программа нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов неоднородной системы $GI|M^{(n)}|\infty$

Согласно теореме 2.2 асимптотическая характеристическая функция  $h_2(u_1, \dots, u_n)$  имеет вид  $n$ -мерной гауссовской (2.46) с параметрами  $\mathbf{a}^T = [\lambda \frac{p_1}{\mu_1}, \dots, \lambda \frac{p_n}{\mu_n}]$  — вектор математических ожиданий числа занятых приборов,

$\mathbf{K} = [K_{is}]$ ,  $i, s = 1, \dots, n$ , где  $K_{ii} = \frac{\lambda p_i + p_i^2 f_0}{\mu_i}$  — дисперсия числа занятых приборов  $i$ -ого типа,  $K_{is} = \frac{p_i p_s f_0}{\mu_i + \mu_s}$ ,  $i \neq s$  — ковариационные моменты числа занятых приборов.

Алгоритм построения двумерного асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов в системе отражен в таблице 4.5.

#### 4.1.5 Программа нахождения асимптотического распределения числа занятых приборов неоднородной системы $MAR|GI^{(n)}|\infty$

Воспользуемся параметрами для задания входящего  $MAR$ -потока заявок из раздела 1.2.2. Рассмотрим частный случай:  $n = 2$ . Функцию  $B_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) распределения времени обслуживания на приборах зададим как гамма-функцию с параметрами  $\xi_i$  и  $\alpha$ , где  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) — параметр формы,  $\alpha$  — параметр масштаба. Положим  $\alpha = 1$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 20$ .

В разделе 3.2.2 был получен вид асимптотической характеристической функции второго порядка числа занятых приборов системы  $MMPP|GI^{(n)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием (3.21). Рассмотрим неоднородную систему с входящим  $MAR$ -потоком, в таблице 4.6 представлен алгоритм программы построения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов в системе  $MAR|GI^{(n)}|\infty$  при  $n = 2$ .

На рисунке 4.1 представлено асимптотическое распределение числа занятых приборов в системе  $MAR|GI^{(n)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием.

Таблица 4.5 – Блок нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов неоднородной системы GI|M<sup>(n)</sup>|∞ для n = 2

$A(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{if } a \leq x < b, \\ 1, & \text{if } x \geq b; \end{cases}$	
$\lambda := \frac{1}{\int_0^\infty (1-A(x))dx};$	
$RR(x) := \begin{cases} \lambda \cdot x, & \text{if } x < a, \\ \frac{\lambda \cdot (b^2 - a^2) - \lambda \cdot (x-b)^2}{2 \cdot (b-a)}, & \text{if } a \leq x < b, \\ 1, & \text{if } x \geq b; \end{cases}$	
<b>Вычисление асимптотического среднего</b>	
$a_i := \frac{p_i}{\mu_i} \cdot \lambda, \quad i = 1, 2;$	$a_1 = 0,133,$ $a_2 = 0,6;$
<b>Вычисление асимптотических моментов второго порядка</b>	
$f := \lambda^2 \cdot \int_0^2 (A(x) - RR(x))dx,$	$\sigma_1^2 = 0,116,$
$\sigma_i^2 := \frac{p_i^2 \cdot df}{\mu_i} + \lambda \cdot \frac{p_i}{\mu_i}, \quad i = 1, 2;$	$\sigma_2^2 = 0,148;$
<b>Асимптотический коэффициент корреляции</b>	
$r := \frac{p_1 \cdot p_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{f}{\sigma_1 \cdot \sigma_2};$	$r = -0,085;$
<b>Асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов</b>	
$P(l_1, l_2) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\left[ \frac{1}{2 \cdot (1-r^2)} \cdot \left[ \frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \cdot r \cdot \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right]}.$	

Таблица 4.6 – Блок нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов системы  $\text{MAP|GI}^{(n)}|\infty$ , ( $n = 2$ )

$B_i(t) := p\text{gamma}(\xi_i \cdot t, \alpha), i = 1, 2;$	
$b_i := \int_0^\infty (1 - B_i(t))dt, i = 1, 2;$	
<b>Вычисление среднего числа занятых приборов каждого типа</b>	
$\mathbf{T} := \text{augment}[\mathbf{r} \cdot (\kappa_1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{B}), 0],$ $\kappa_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e},$ $a_i := p_i \cdot \kappa_1 \cdot b_i, i = 1, 2;$	$a_1 = 3, 545,$ $a_2 = 2, 659;$
<b>Вычисление начальных моментов второго порядка числа занятых приборов каждого типа</b>	
$\mathbf{f} := \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}^T \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T)^{-1},$ $\kappa_2 := \mathbf{f} \cdot (\mathbf{B} - \kappa_1 \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e},$ $\beta_i := \int_0^\infty (1 - B_i(t))^2 dt, i = 1, 2,$ $\sigma_i^2 := a_i + 2 \cdot p_i^2 \cdot \kappa_2 \cdot \beta_i, i = 1, 2;$	$\mathbf{f} = (-2, 646 \ 2, 646),$ $\beta_1 = 1, 25, \beta_2 = 0, 5,$ $\kappa_2 = 23, 81,$ $\sigma_1^2 = 13, 069,$ $\sigma_2^2 = 11, 23;$
<b>Коэффициент корреляции</b>	
$\beta_{12} := \int_0^\infty (1 - B_1(t))(1 - B_2(t))dt,$ $r := \kappa_2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \frac{\beta_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2},$	$\beta_{12} = 0, 75,$ $r = 0, 354;$
<b>Асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов</b>	
$P(l_1, l_2) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\left[ \frac{1}{2 \cdot (1-r^2)} \left[ \frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \cdot r \cdot \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right]}.$	

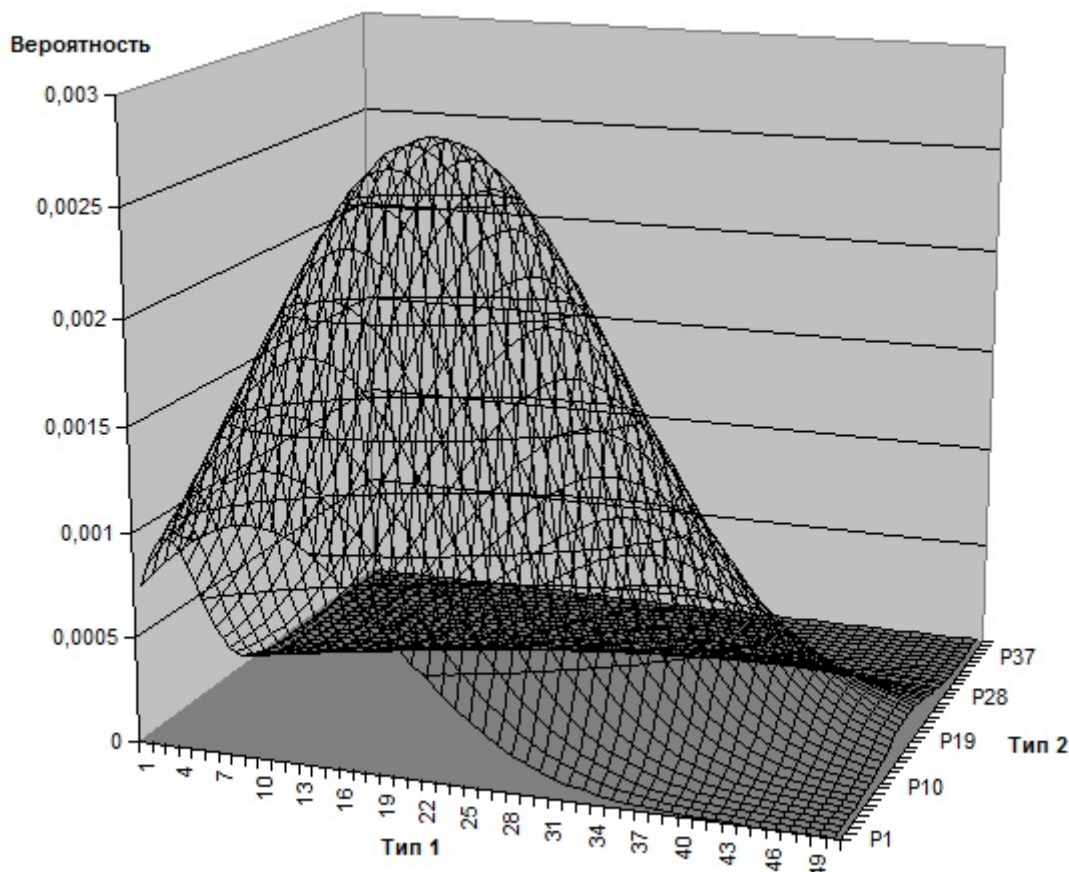


Рисунок 4.1 — Асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов системы  $MAP|GI^{(2)}|\infty$

#### 4.1.6 Программа нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов неоднородной системы $GI|GI^{(n)}|\infty$

Зададим функцию распределения длин интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока  $A(x)$  как равномерную с параметрами  $a = 0$ ,  $b = 2$ .

Функцию  $B_i(x)$ , ( $i = 1, 2$ ) распределения времени обслуживания на приборах зададим как гамма-функцию с параметрами  $\xi_i$ , ( $i = 1, 2$ ) и  $\alpha$ , где  $\xi_i$  — параметр формы,  $\alpha$  — параметр масштаба. Аналогично предыдущему разделу положим  $\alpha = 1$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 20$ . В разделе 3.2.4 был получен вид асимптотической характеристической функции второго порядка числа занятых приборов системы  $GI|GI^{(n)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием

(3.47). Воспользуемся им для построения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов в системе  $GI|GI^{(2)}|_{\infty}$  (Таблица 4.7).

Таблица 4.7 – Блок нахождения асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов системы  $GI|GI^{(2)}|_{\infty}$

$\lambda := \frac{1}{\int_0^{\infty} (1-A(x))dx};$	
$B_i(t) := pgamma(\xi_i \cdot t, \alpha), i = 1, 2;$	
$b_i := \int_0^{\infty} (1 - B_i(t))dt, i = 1, 2;$	
$RR(x) := \begin{cases} \lambda \cdot x, & \text{if } x < a, \\ \frac{\lambda \cdot (b^2 - a^2) - \lambda \cdot (x-b)^2}{2 \cdot (b-a)}, & \text{if } a \leq x < b, \\ 1, & \text{if } x \geq b; \end{cases}$	
<b>Вычисление асимптотического среднего числа занятых приборов каждого типа</b>	
$a_i := \lambda \cdot p_i \cdot b_i, i = 1, 2;$	$a_1 = 0, 8,$ $a_2 = 0, 6;$
<b>Вычисление асимптотических начальных моментов второго порядка числа занятых приборов каждого типа</b>	
$f := \lambda^2 \cdot \int_0^2 (A(x) - RR(x))dx,$ $\beta_i := \int_0^{\infty} (1 - B_i(t))^2 dt, i = 1, 2,$ $\sigma_i^2 := a_i + 2 \cdot p_i^2 \cdot f \cdot \beta_i, i = 1, 2;$	$\beta_1 = 1, 25, \beta_2 = 0, 5,$ $\sigma_1^2 = 0, 667,$ $\sigma_2^2 = 0, 48;$
<b>Асимптотический коэффициент корреляции</b>	
$\beta_{12} := \int_0^{\infty} (1 - B_1(t))(1 - B_2(t))dt,$ $r := f \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \frac{\beta_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2};$	$\beta_{12} = 0, 75,$ $r = -0, 106;$
<b>Асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов</b>	
$P(l_1, l_2) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\left[ \frac{1}{2 \cdot (1-r^2)} \left[ \frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \cdot r \cdot \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right]}.$	

## 4.2 Имитационное моделирование систем массового обслуживания разнотипных заявок с произвольным временем обслуживания

Получить распределение вероятностей для СМО с произвольным временем обслуживания в аналитическом виде не удастся. Поэтому прибегают к приближенным методам: асимптотическому методу и имитационному моделированию.

В данном разделе обратимся к имитационному моделированию. В результате имитационного моделирования рассматриваемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, с которой проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе.

Для моделирования исследуемых систем был выбран дискретно-событийный метод моделирования, предлагающий абстрагироваться от непрерывной природы событий и рассматривать только основные события моделируемой системы, такие, как: «поступление заявки», «окончание обслуживания» и другие.

### 4.2.1 Алгоритм имитационного моделирования

В ходе программной реализации описанная система логически разделена на три части:

1. управляющая цепь Маркова с непрерывным временем,
2. поток заявок, управляемый этой цепью,
3. система обслуживания с приборами, обслуживающими заявки.

Все части реализованы на основе классов C++.

Параметры системы можно условно разделить на группы:

- параметры потока заявок;
- параметры управляющей цепи Маркова;
- параметры системы обслуживания заявок.

Параметры потока заявок: матрица интенсивности заявок  $\Lambda$ , управляющая цепь Маркова и матрица вероятностей  $\mathbf{D}$ . Управляющая цепь Маркова имеет единственный параметр — матрицу инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q} = \|\|Q_{ij}\|\|$ . Параметры системы обслуживания следующие: количество типов заявок  $n$ , их вероятности  $p_1, \dots, p_n$ , функции распределения обслуживания заявок каждого типа  $B_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Объект класса, реализующего цепь Маркова, помимо матрицы инфинитезимальных характеристик хранит своё текущее состояние  $k$ . Для МАР-потока сначала генерируется начальное состояние согласно стационарному распределению вероятностей состояний потока. Для моделирования начального состояния необходимо определить финальные вероятности в виде одномерного массива  $P[k]$ , элементы которого являются значениями вероятности того, что в текущий момент времени система находится в состоянии  $k$ . Таким образом, начальное состояние системы определяется как дискретная случайная величина с рядом распределения  $P[k]$ . Время нахождения в текущем состоянии каждый раз определяется как значение экспоненциальной случайной величины с параметром  $-Q_{kk}$ . Следующее состояние определяется как дискретная случайная величина с набором вероятностей  $\pi_i = Q_{ki} / -Q_{kk}$ ,  $k, i = 1, \dots, K, k \neq i$ , либо  $\pi_i = 0$ , если  $i = k$ . При этом цепь Маркова не привязана к оси времени, а только сообщает вызывающему объекту продолжительность нахождения в текущем состоянии и следующее состояние. Помимо этого объект хранит промежуток времени, оставшийся до следующего переключения состояния цепи Маркова  $t_{state}$ . На старте этот промежуток приравнивается продолжительности нахождения цепи в исходном состоянии. Алгоритм имитации следующий: в текущем состоянии генерируем время нахождения в нём  $t_{state}$  и генерируем заявки с промежутками времени, распределёнными экспоненциально с параметром  $\Lambda_{kk}$ , где  $k$  — текущее состояние цепи Маркова. Как только время очередной заявки превысило значение  $t_{state}$ , эту заявку игнорируем и переключаем управляющую цепь в новое состояние  $k'$  (цепь сама определяет своё следующее состояние). Значение  $t_{state}$  обновляется для нового состояния цепи, с вероятностью  $D_{kk'}$  генерируется переходная заявка (заявка, поступившая во время изменения состояния цепи Маркова). Заметим, что

поток работает с заявками, не уточняя их тип, поскольку для потока тип заявки не имеет никакого значения.

Помимо них система хранит время поступления очередной заявки и моменты времени завершения обслуживания всех заявок в системе, а также состояние системы обслуживания — количество обслуживаемых заявок каждого типа. На старте работы системы заявок в системе нет, время поступления следующей заявки получается из объекта, реализующего поток заявок. При обработке очередного события выясняется его тип: если это заявка, то в соответствии с вероятностями определяется его тип  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), вычисляется время обслуживания в соответствии с функцией распределения  $B_i(x)$  и в набор добавляется событие завершения обслуживания. Если же событие является завершением обслуживания, то оно изымается из набора ожидаемых событий. В любом случае необходимо обновить состояние системы.

В программе реализованы следующие случайные величины для распределения времени обслуживания заявок на приборах и распределения длин интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока:

- константа (детерминированная случайная величина),
- равномерно распределённая случайная величина,
- экспоненциальная случайная величина,
- нормально распределённая случайная величина,
- гамма-распределённая случайная величина.

Разработан удобный интерфейс пользователя (Рисунок 4.2). На главное окно программы помещены кнопки, вызывающие дополнительные окна настройки всех параметров системы. При изменении значений параметров происходит автоматическая проверка корректности, некорректные значения подсвечиваются бледно-розовым цветом. Пока имеются некорректные значения, сохранить параметры не получится. Также на главном диалоговом окне расположена кнопка для удобного экспорта результатов моделирования в программу, удобную для пользователя с точки зрения обработки полученных статистических данных.

Таким образом, для каждого типа заявок собирается индивидуальная статистика, на основании которой рассчитываются основные числовые

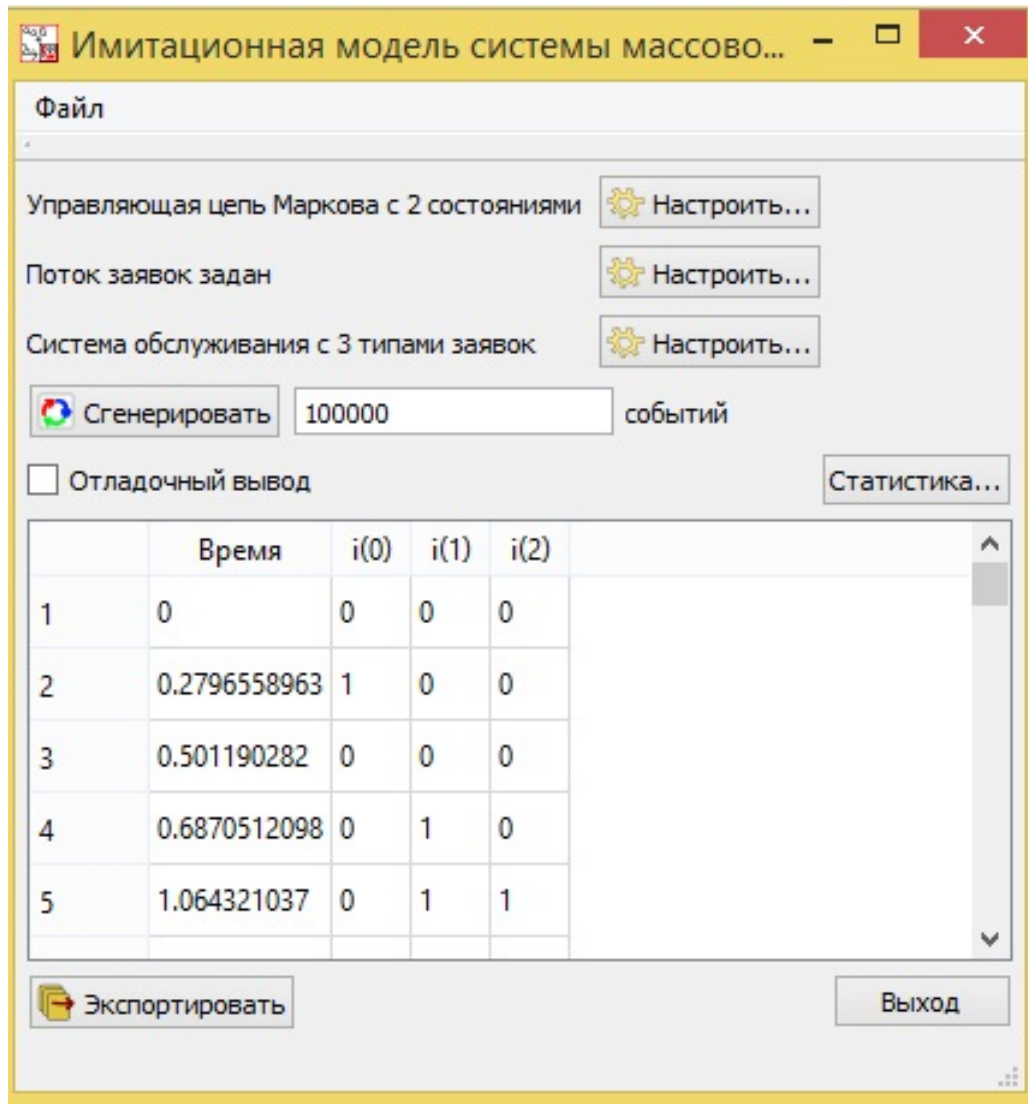


Рисунок 4.2 — Иллюстрация работы имитационной модели СМО  $GI|GI^{(n)}|\infty$

характеристики обслуживания (математическое ожидание, дисперсия). А также оценивается корреляционная связь между заявками разного типа.

#### 4.2.2 Анализ результатов, полученных с помощью имитационного моделирования

Оценим, насколько имитационная модель отражает поведение реальной системы на примерах программ для систем  $MAR|M^{(n)}|\infty$  и  $GI|GI^{(n)}|\infty$  в частном случае  $n = 2$ .

Запустим программу имитационного моделирования работы СМО  $GI|GI^{(2)}|\infty$  несколько раз, не меняя параметры системы. Графики полученного распределения вероятностей представлены на рисунке 4.3.

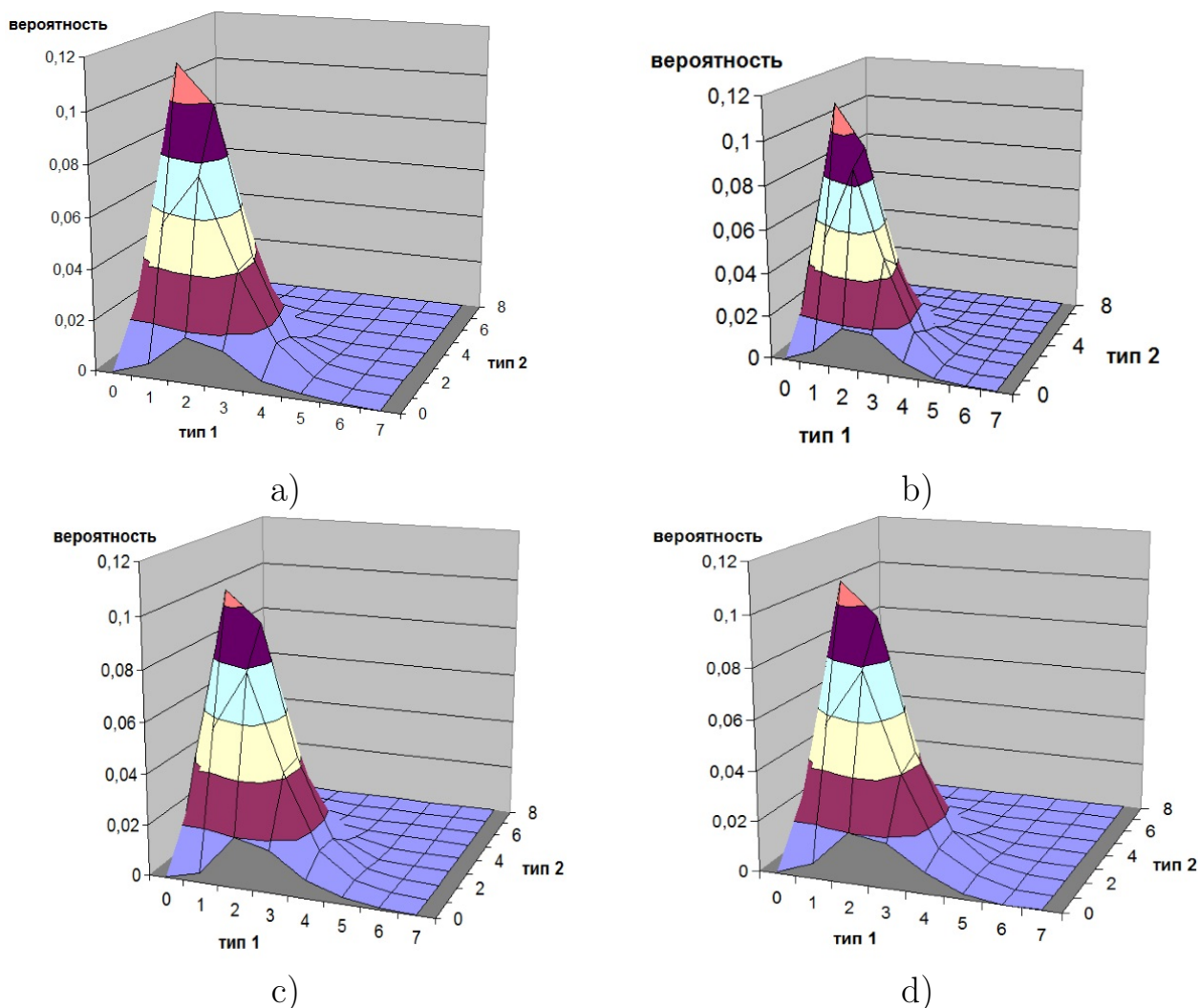


Рисунок 4.3 — Распределение вероятностей числа занятых приборов системы  $GI|GI^{(2)}|\infty$  при генерации 10000 событий.

Из рисунка 4.3 видно, что существует некоторая погрешность в работе имитационной модели, оценивать которую предлагается с помощью расстояния Колмогорова:

$$\Delta = \max_{0 \leq n < \infty, 0 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (F_1(i, j) - F_s(i, j)) \right|, \quad (4.1)$$

где  $F_1(i, j)$  — функция распределения, полученная в результате имитационного моделирования при первом запуске программы, а  $F_s(i, j)$  — при последующих запусках.

Для программы имитационного моделирования системы  $\text{MAP}|\text{M}^{(2)}|_\infty$  зададим следующие входные параметры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,3 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим  $\mu_1 = 0,1$ ,  $\mu_2 = 0,2$  — параметры экспоненциального времени обслуживания на приборах первого и второго типа соответственно.

Для системы  $\text{GI}|\text{GI}^{(2)}|_\infty$ : длины интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока имеют равномерную функцию распределения с параметрами  $a = 0$ ,  $b = 2$ ;  $B_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) имеет гамма-распределение с параметрами  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\alpha$ , где  $\xi_i$  — параметр формы,  $\alpha$  — параметр масштаба. Положим  $\alpha = 1$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 20$ .

Пусть  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 0,6$  для обеих систем.

Обозначим  $N$  — количество генерируемых событий.

В таблице 4.8 представлена область применимости результатов, полученных с помощью имитационного моделирования.

Таблица 4.8 – Область применимости результатов, полученных с помощью имитационного моделирования гетерогенных СМО  $\text{MAP}|\text{M}^{(n)}|_\infty$  и  $\text{GI}|\text{GI}^{(n)}|_\infty$

	$\text{MAP} \text{M}^{(n)} _\infty$		$\text{GI} \text{GI}^{(n)} _\infty$	
	10000	100000	10000	100000
$\Delta$	0,091	0,020	0,081	0,009
$\Delta$	0,062	0,017	0,059	0,012
$\Delta$	0,048	0,022	0,047	0,015
$\Delta$	0,085	0,017	0,073	0,02
$\Delta$	0,026	0,017	0,062	0,013

Из результатов имитационного моделирования видно, что уже при увеличении числа событий до 100000 отклонение разных реализаций программного модуля друг относительно друга составляет не более 3%, что является приемлемым для практического применения.

### 4.3 Выводы по главе 4

В данной главе описан разработанный комплекс программ численного анализа и имитационного моделирования неоднородных СМО.

Разработан алгоритм вычисления допредельных значений характеристик гетерогенных систем  $\text{MAP}|M^{(n)}|_{\infty}$  и  $\text{GI}|M^{(n)}|_{\infty}$ , позволяющая находить математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции для исследуемых СМО.

Разработан алгоритм, реализующий двумерную гауссовскую аппроксимацию процесса изменения числа занятых приборов разного типа в исследуемых СМО, полученную методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах в частном случае  $n = 2$ .

Описан комплекс программ имитационного моделирования неоднородных бесконечнолинейных систем массового обслуживания с  $n$  типами обслуживающих приборов. Приведена оценка области применимости результатов работы разработанного программного модуля на примере имитационной модели систем  $\text{MAP}|M^{(n)}|_{\infty}$  и  $\text{GI}|M^{(n)}|_{\infty}$ .

Результаты этой главы опубликованы в работах [63, 64].

## Заключение

В настоящей диссертации впервые представлено исследование математических моделей немарковских бесконечнолинейных СМО с разнотипным обслуживанием и специальными входящими потоками разнотипных заявок. Разработаны новые и усовершенствованы уже имеющиеся методы исследования. Получены формулы для стационарных вероятностных характеристик процессов изменения числа занятых приборов разного типа в исследуемых СМО.

Основные теоретические и практические результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Предложены новые математические модели систем массового обслуживания с неограниченным числом разнотипных обслуживающих приборов, а именно: бесконечнолинейных систем массового обслуживания разнотипных заявок вида  $MAR|M^{(n)}|\infty$  и  $GI|M^{(n)}|\infty$ , а также бесконечнолинейных немарковских СМО вида  $MAR|GI^{(n)}|\infty$  и  $GI|GI^{(n)}|\infty$  с разнотипным обслуживанием.

2. Получены выражения для нахождения стационарных вероятностных характеристик СМО с разнотипным обслуживанием заявок случайных входящих потоков в случае экспоненциального времени обслуживания.

3. Разработана модификация метода многомерного просеивания для исследования немарковских СМО с разнотипным обслуживанием заявок случайных потоков в случае произвольного времени обслуживания.

4. Предложено развитие метода асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах для исследования СМО с разнотипным обслуживанием заявок случайных потоков в случае экспоненциального и произвольного времени обслуживания, а также метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний управляющей входящим  $MAR$ -потокм цепи Маркова для систем с экспоненциальным временем обслуживания.

5. Сделаны выводы об области применимости полученных асимптотических результатов, то есть, показано, что при увеличении времени обслуживания асимптотические результаты приближаются к результатам, полученным аналитически в допредельной ситуации.

6. Разработан комплекс программ для имитационного моделирования и численного анализа бесконечнолинейных СМО с разнотипным обслуживанием.

Предложенные в диссертации модели позволяют расширить класс известных моделей в виде систем массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и могут быть применены для анализа характеристик реальных объектов в различных предметных областях. Разработанные методы позволяют расширить круг решаемых задач и могут быть модифицированы для исследования других классов моделей.

## Список использованной литературы

1. Абаев, П. О. Гистерезисное управление нагрузкой в сетях сигнализации / П. О. Абаев, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуилов // Вестник РУДН. Математика. Информатика. Физика. — 2011. — № 4. — С. 55–73.
2. Башарин, Г. П. Актуальные задачи математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуилов // Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко: Тезисы докладов. — М.: ЛЕНАНД, 2012. — С. 176–177.
3. Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы анализа / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган — М.: Наука, 1989. — 336 с.
4. Башарин, Г. П. Массовое обслуживание в телефонии / Г. П. Башарин, А. Д. Харкевич, А. Д. Шнепс — М.: Наука, 1968. — 246 с.
5. Башарин, Г. П. Математическая модель функционирования коммутатора в OBS сети с FDL и маршрутизацией с отклонением / Г. П. Башарин, Е. С. Шibaева // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: математика, информатика, Физика. — М: Изд-во РУДН, 2014. — С. 36–42.
6. Башарин, Г. П. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем / Г. П. Башарин, А. Л. Толмачев // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — М.: ВИНТИ, 1983. — Т. 21 — С. 3–119.
7. Боровков, А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. — М.: Наука, 1980. — 382 с.
8. Бочаров, П. П. Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными

- заявками / П. П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, Р. Манзо, А. В. Печинкин // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 1. — С. 93–104.
9. Бочаров, П. П. О пуассоновской двухфазной системе ограниченной емкости / П. П. Бочаров, А. И. Громов // Методы теории телетрафика в системах распределения информации. — М.: Наука, 1975. — С. 15–28.
  10. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — 520 с.
  11. Бусленко, Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах / Н. П. Бусленко, З. И. Шарагина — М: Наука, 1964. — 362 с.
  12. Васильев, К. К. Математическое моделирование систем связи: Учеб. пособие / К. К. Васильев, М. Н. Служивый — Ульяновск: УЛГТУ, 2008. — 170 с.
  13. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. — Москва: Техносфера, 2003. — 512 с.
  14. Гайдамака, Ю. В. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова, К. Е. Самуйлов — М.: Изд-во РУДН, 2008. — 72 с.
  15. Гайдамака, Ю. В. Применение системы поллинга с исчерпывающей дисциплиной обслуживания к анализу SIP-сервера / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова, О. Г. Вихрова // Т-СОММ: телекоммуникации и транспорт. — 2013. — № 11(7) — С. 22–23.
  16. Гарайшина, И. Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Гарайшина Ирина Рашитовна — Томск, 2005. — 148 с.
  17. Гарайшина, И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. — Томск: НТЛ, 2010. — 204 с.

18. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — изд. 4-е, испр. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007. — 400 с.
19. Глухова, Е. В. Математические модели страхования / Е. В. Глухова, О. А. Змеев, К. И. Лившиц — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. — 180 с.
20. Горцев, А. М. Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская, А. А. Соловьев // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 8. — С. 49–63.
21. Дудин А. Н. Ненадежная многолинейная система с управляемым ширококвещательным обслуживанием / А. Н. Дудин, Б. Сунь // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 147–160.
22. Дудин, А. Н. Оптимальное гистерезисное управление ненадежной системой МАР/SM/1 с двумя режимами работы / А. Н. Дудин // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 10. — С. 58–72.
23. Дудин, А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок — Минск: БГУ, 2000. — 175 с.
24. Ефросинин, Д. В. Методы анализа управляемых динамических систем: дис....доктора физ.-мат. наук: 05.13.01 / Ефросинин Д. В. — Москва, 2013 — 332 с.
25. Захорольная, И. А. Исследование математических моделей потоков в системах с неограниченным числом линий методом предельной декомпозиции: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Захорольная Ирина Алексеевна — Томск, 2012. — 171 с.
26. Зейфман, А. И. О предельных характеристиках системы обслуживания  $M(t)/M(t)/S$  с катастрофами / А. И. Зейфман, Я. А. Сатин, А. В. Коротышева, Н. А. Терешина // Информатика и её применения. — 2009. — Т. 3, вып. 3. — С. 16–22.
27. Зорин, А. В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А. В. Зо-

- рин, М. А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 7. — С. 102–111.
28. Ивановская (Синякова), И. А. Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа / И. А. Ивановская (Синякова), С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2010. — Т. 317, № 5. — С. 32–34.
29. Ивницкий, В. А. Многоканальная система массового обслуживания с выделенным каналом / В. А. Ивницкий // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 6. — С. 91–103.
30. Ивницкий В. А. Об инвариантности стационарных распределений вероятностей состояний многолинейной системы обслуживания конечного числа различных источников требований при абсолютном приоритете поступающего требования / В. А. Ивницкий // Теория вероятностей и ее применение. — 1992. — Т. 37. — С. 407–410.
31. Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных: отчет по годовому этапу научно-исследовательской работы № 1.511.2014/К в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ за 2014 год / Томский государственный университет; рук. Назаров А. А.; исполн. Сущенко С. П. [и др.]. — Томск, 2014. — 30 с.
32. Кёнинг, Д. Теория массового обслуживания / Д. Кёнинг, В. В. Рыков, Д. Штоян — М.: Московский институт нефтехимической и газовой промышленности, 1979. — 112 с.
33. Кокс, Д. Р. Теория восстановления / Д. Р. Кокс, В. А. Смит. Перевод с англ. / Пер. В. В. Рыкова; ред. Ю. К. Беляев — М: Советское радио, 1967. — 298 с.
34. Крыленко, А. В. Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками II. Модели с несколькими типами заявок /

- А. В. Крыленко, Ю. В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 2. — С. 62–71.
35. Кузнецов, Д. Ю. Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых протоколами случайного множественного доступа / Д. Ю. Кузнецов, А. А. Назаров // Мат. моделирование. Кибернетика. Информатика. — Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1999. — С. 89–98.
36. Леонова, М. А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2013. — № 2(23). — С. 54–63.
37. Лившиц, К. И. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта скоропортящейся продукции / К. И. Лившиц, Е. С. Ульянова // Известия вузов. Физика. — 2015. — Т. 58. — № 11/2. — С. 281–285.
38. Ложковский, А. Г. Математическая модель пакетного трафика / А. Г. Ложковский, В. А. Каптур, О. В. Вербанов, В. М. Колчар // Вестник национального политехнического университета «ХПИ». — 2011. — № 9. — С. 113–119.
39. Ложковский, А. Г. Теория массового обслуживания в телекоммуникациях / А. Г. Ложковский. — Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2012. — 112 с.
40. Лопухова, С. В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Лопухова Светлана Владимировна — Томск, 2008. — 167 с.
41. Матальцкий, М. А. Исследование сетей с многолинейными системами обслуживания и разнотипными заявками / М. А. Матальцкий // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 9. — С. 79–91.

42. Маталыцкий, М. А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении / М. А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 10. — С. 97–113.
43. Михеев, П. А. О быстродействии агрегирующего канала звездообразного сетевого фрагмента / П. А. Михеев, С. П. Сущенко // Вестник Том. гос. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». — 2010. — № 4 (13). — С. 97–105.
44. Моисеев, А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Томск: Изд-во НТЛ, 2015 — 240 с.
45. Моисеев А. Н. Исследование математических моделей систем и сетей массового обслуживания с высокоинтенсивными непуассоновскими входящими потоками: дис. . . . д-р. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Моисеев Александр Николаевич — Томск, 2016. — 333 с.
46. Моисеева, С. П. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления / С. П. Моисеева, Е. В. Панкратова, Е. Г. Убонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2016. — № 2 (35). — С. 46–53.
47. Моисеева, С. П. Исследование вероятностных характеристик математической модели обслуживания разнотипных заявок телекоммуникационного потока / С. П. Моисеева, Е. В. Панкратова // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всерос. конф. с междунар. участием (Москва, 22–26 апр. 2013). — М: изд-во РУДН, 2013. — С. 39–42.
48. Моисеева, С. П. Исследование модели параллельного обслуживания сдвоенных заявок с рекуррентным входящим потоком / С. П. Моисеева, И. А. Синякова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): материалы X Всерос. науч.-практ.

- конф. с междунар. участием: в 2 ч., 25-26 ноября, 2011. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. — Ч. 1. — С. 175–179.
49. Моисеева, С. П. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции / С. П. Моисеева, А. А. Назаров, А. А. Морозова // Вычислительные технологии. — 2008. — Т. 13 — С. 88–92.
50. Моисеева, С. П. Немарковская модель параллельного обслуживания сдвоенных заявок / С. П. Моисеева, И. А. Ивановская (Синякова) // Научное творчество молодежи: материалы XIV Всерос. науч.-практ. конф. (Анжеро-Судженск, 15–16 апр. 2010): в 2 ч. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. — Ч. 1. — С. 35–38.
51. Моисеева, С. П. Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками: дис. ... д-р. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Моисеева Светлана Петровна — Томск, 2014. — 280 с.
52. Моисеева, С. П. Сравнение асимптотических и точных результатов исследования СМО  $MAR(2)|M2|\infty$  / С. П. Моисеева, И. А. Синякова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012): материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (Анжеро-Судженск, 23–24 нояб. 2012): в 2 ч. — Кемерово: Практика, 2012. — Ч. 2. — С. 127–130.
53. Морозов, Е. В. Асимптотики вероятностей больших отклонений стационарной очереди / Е. В. Морозов // Информатика и её применения. — 2009. — Т. 3, вып. 3. — С. 23–34.
54. Морозов, Е. В. Вероятностные модели многопроцессорных систем: стационарность и моментные свойства / Е. В. Морозов, А. С. Румянцев // Информатика и её применения. — 2012. — Т. 6, вып. 3. — С. 99–106.

55. Назаров, А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем: монография / А. А. Назаров — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. — 153 с.
56. Назаров, А. А. Асимптотический анализ системы ММР|М1|ИПВ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока / А. А. Назаров, А. Е. Горбатенко // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2009. — Т. 315, № 5. — С. 187–190.
57. Назаров, А. А. Асимптотическое свойство выходящих потоков систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и входящим МАР-поток / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 5. — С. 57–70.
58. Назаров, А. А. Исследование сетей связи с протоколами «адаптивная Алоха» для конечного числа станций в условии перезагрузки / А. А. Назаров, Одышев Ю. Д. // Проблемы передачи информации. — 2000. — № 3. — С. 83–93.
59. Назаров, А. А. Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования / А. А. Назаров, С. Б. Пичугин // Изв. вузов. Физика. — 1992. — № 9. — С. 120–129.
60. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. — Томск: Изд-во НТЛ, 2006. — 112 с.
61. Назаров, А. А. Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статистическими протоколами случайного множественного доступа / А. А. Назаров, С. А. Цой // Автоматика и вычислительная техника. — 2004. — № 4. — С. 73–85.
62. Носова, М. Г. Автономная немарковская система массового обслуживания и ее применение в задачах демографии: дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Носова Мария Геннадьевна — Томск, 2010. — 204 с.

63. Панкратов, И. В. Программное обеспечение «МАР-модель» [Электронный ресурс] / И. В. Панкратов, Е. В. Панкратова. — Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». — Свид. о рег. № 21261, дата рег.: 20.10.2015 г.
64. Панкратов, И. В. GI-модель [Электронный ресурс] / И. В. Панкратов, Е. В. Панкратова. — Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». — Свид. о рег. № 21262, дата рег.: 20.10.2015 г.
65. Панкратова, Е. В. Исследование системы массового обслуживания GI/GI/ $\infty$  с двумя типами заявок / Е. В. Панкратова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2015): материалы XIV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова (Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015). — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. — Ч. 1. — С. 152–157.
66. Панкратова, Е. В. Исследование системы массового обслуживания GI|M| $\infty$  с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа / Е. В. Панкратова // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г. А. Медведева (Минск, 23–26 февраля 2015) — Минск: РИВШ, 2015. — С. 242–247.
67. Панкратова, Е. Исследование системы массового обслуживания MАР|M| $\infty$  с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего MАР-потока / Е. Панкратова // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015): материалы 18-ой междунар. науч. конф. (Москва, 19–22 октября 2015). — М.: ИПУ РАН, 2015. — С. 585–592.
68. Панкратова, Е. В. Исследование системы MMАР|M| $\infty$  с разнотипными заявками / Е. В. Панкратова, В. В. Коновалова // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы X Российской конф. с междунар. участием (Катунь, 9–11 июня 2014). — Томск: Изд. дом ТГУ, 2014 — С. 107–108.

69. Панкратова, Е. В. Исследование вероятностно-временных характеристик ММРР-потока разнотипных заявок / Е. В. Панкратова, С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2013): материалы XII Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием им. А. Ф. Терпугова (Анжеро-Судженск, 29–30 ноября 2013). — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. — Ч. 2. — С. 75–80.
70. Панкратова, Е. В. Исследование многопродуктовой немарковской системы массового обслуживания методом динамического просеивания / Е. В. Панкратова, С. П. Моисеева // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2013): материалы междунар. науч. конф. (Москва, 7–10 октября 2013). — М.: Техносфера, 2013. — С. 386–393.
71. Панкратова, Е. В. Исследование бесконечнолинейной СМО с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления / Е. В. Панкратова, Е. Г. Убонова, С. П. Моисеева // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы VI Всерос. конф. с междунар. участием (Москва, 18–20 апреля 2016). — М.: изд-во РУДН, 2016. — С. 49–51.
72. Печинкин, А. В. Границы изменения стационарной очереди в системах обслуживания с различными дисциплинами обслуживания / А. В. Печинкин // Проблемы устойчивости стохастических моделей: Труды семинара. — М.: ВНИИСИ, 1985. — С. 118–121.
73. Печинкин, А. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и ненадежными приборами / А. В. Чаплыгин, И. А. Соколов, В. В. Чаплыгин // Информатика и её применения. — 2007. — Т. 1, вып. 1. — С. 27–39.
74. Печинкин, А. В. Многолинейные системы массового обслуживания с независимыми отказами и восстановлениями приборов / А. В. Печинкин, И. А. Соколов, В. В. Чаплыгин // Системы и средства информатики. Спец. выпуск «Математическое и алгоритмическое обеспечение

- информационно-телекоммуникационных систем». — М.: ИПИ РАН. — 2006. — С. 99–123.
75. Печинкин, А. В. Стационарные характеристики многолинейной системы массового обслуживания с одновременными отказами приборов / А. В. Печинкин, И. А. Соколов, В. В. Чаплыгин // Информатика и её применения. — 2007. — Т. 1., вып. 2. — С. 28–38.
76. Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации: госзадание Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2013 годы № 8.4055.2011, номер госрегистрации 01201261193;
77. Рыков, В. В. Математическая статистика и планирование эксперимента: уч. пособие / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин — М: МАКС Пресс, 2010. — 308 с.
78. Рыков, В. В. Управляемые системы массового обслуживания / В. В. Рыков // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. — М: ВИНТИ, 1975. — вып.12, — С. 43–153.
79. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т. Л. Саати — 2-е изд. — М.: Советское радио, 1971. — 519 с.
80. Самуйлов, К. Е. Алгоритм свертки для расчета вероятностных характеристик звена сети мультимедиа / К. Е. Самуйлов, Е. А. Савочкин // Системы телекоммуникаций и моделирование сложных систем: сб. науч. тр. — М.: ПАИМС, 2002. — С. 29–37.
81. Севастьянов, Б. А. Э르고дическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами / Б. А. Севастьянов // Теория вероятностей и ее применения — 1957. — Т. 2, № 1. — С. 106–116.
82. Семенова, И. А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов / И. А. Семенова // Вестник Томского государствен-

- ного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2010. — № 3 (12). — С. 85–96.
83. Синякова, И. А. Математические модели и методы исследования систем параллельного обслуживания сдвоенных заявок случайных потоков: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Синякова Ирина Анатольевна. — Томск, 2013. — 147 с.
84. Судыко, Е. А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа / Е. А. Судыко // Проблемы передачи информации. — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 94–111.
85. Сущенко, С. П. О влиянии блокировок буферной памяти на быстродействие синхронных процедур управления звеном передачи данных / С. П. Сущенко // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 10. — С. 115–125.
86. Тихоненко, О. М. Анализ систем обслуживания требований случайной длины при ограниченном суммарном объеме / О. М. Тихоненко, К. Г. Климович // Проблемы передачи информации. — Т. 37, № 1. — 2001. — С. 78–88.
87. Тихоненко, О. М. Определение характеристик суммарного объема требований в однолинейных системах обслуживания с абсолютным приоритетом / О. М. Тихоненко // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 8. — с. 181–188.
88. Убонова, Е. Г. Гауссовская аппроксимация для системы массового обслуживания  $M|MP|/M/\infty$  с разнотипным обслуживанием / Е. Г. Убонова, Е. В. Панкратова // Известия вузов. Физика. 2015. — Т. 58, № 11/2. — С. 225–229.
89. Убонова, Е. Г. Исследование системы массового обслуживания  $M|MP|/M/\infty$  с разнотипным обслуживанием / Е. Г. Убонова, Е. В. Панкратова // Научное творчество молодежи: материалы XIX Всерос. науч.-практ. конф. (Анжеро-Судженск, 15–16 мая 2015). — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. — С. 87–91.

90. Федоткин, М. А. Анализ и оптимизация, выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками / М. А. Федоткин, А. М. Федоткин // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 92–108.
91. Форрестер, Д. Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика). /Д. Форрестер // — М.: Прогресс, 1971. — 340 с.
92. Хомичков, И. И. Исследование моделей локальной сети с протоколом случайного множественного доступа / И. И. Хомичков // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 12. — С. 89–90.
93. Чечельницкий, А. А. Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком / А. А. Чечельницкий, О. В. Кучеренко // Сборник научных статей. — Минск, 2009. — Вып. 2. — С. 262–268.
94. Abaev, P. On Mean Return Time in Queueing System with Constant Service Time and Bi-level Hysteric Policy / P. Abaev // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, Belarus, January 28-31, 2013). — P. 11–19.
95. Armony, M. Queueing Dynamics and Maximal Throughput Scheduling in Switched Processing Systems / M. Armony, N. Bambos. // Queueing Systems. — 2003. — Vol. 44 (3). — P. 209–252.
96. Artalejo, J. R. Accessible bibliography on retrial queues /J. R. Artalejo // Mathematical and Computer Modelling. — 1999. — Vol. 30. — P. 223–233.
97. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: a computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Coral — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 318 p.
98. Auria, B. D. M/M/ $\infty$  queues in semi-Markovian random environment / B. D. Auria // Queueing Systems. — 2008. — Vol. 58, № 3. — P. 221–237.

99. Bambos, N. Queueing Networks of Random Link Topology: Stationary Dynamics of Maximal Throughput Schedules / N. Bambos, G. Michailidis // Queueing Systems. — 2005. — Vol. 50 (1). — P. 5–52.
100. Baum, D. The infinite server queue with Markov additive arrivals in space / D. Baum // Probabilistic analysis of rare events: proc. of the Int. Conf. (Riga, Latvia, 1999). — P. 136–142.
101. Baum, D. The Inhomogeneous BMAP/G/ $\infty$  queue / D. Baum, L. Breuer // 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001): proc. of the conf. (Aachen, Germany, 2001). — P. 209–223.
102. Bojarovich, J. An Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers and Rounds / J. Bojarovich, L. Marchenko // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, January 28–31, 2013). — P. 33–36.
103. Caudillo-Fuentes, L. A. A simple heuristic for load balancing in parallel processing networks with highly variable service time distributions / L. A. Caudillo-Fuentes, D. L. Kaufman, M. E. Lewis // Queueing Systems. — 2010. — Vol. 64(2). — P. 145–165.
104. Doorn, E. A. van. Note on the GI/GI/ $\infty$  system with identical service and interarrival-time distributions / E. A. van Doorn, A. A. Jagers // Journal of queueing systems. — 2004. — № 47. — P. 45–52.
105. Down, D. G. Multi-layered round robin routing for parallel servers / D. G. Down, R. Wu // Queueing Systems. — 2006. — Vol. 53(4). — P. 177–188.
106. Dudin, A. Retrial BMAP/G/1 System with Linear Repeated Requests / A. Dudin, V. A. Klimenok // Queueing Systems. — 2000. — Vol. 34. — P. 222–227.
107. Dudin, A. BMAP/SM/1 Model with Markov Modulated Retrials / A. Dudin, V. Klimenok // TOP. — 1999. — Vol. 7, № 2. — P. 267–278.

108. Dudovskaya, Y. Open exponential networks with multimode strategies of the service and different types of customers / Y. Dudovskaya, O. Yakubovich // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013): proc. of the Int. Conf. (Moscow, October 7–10, 2013). — P.382–385.
109. Duffield, N. G. Queueing at large resources driven by long-tailed M/G/ $\infty$ -modulated processes / N. G. Duffield // Queueing Systems. — 1998. — Vol. 28, № 1–3. — P. 245–266.
110. Efrosinin, D. Performance analysis and monotone control of a tandem queueing system / D. Efrosinin, M. Farhadov, S. Kudubaeva // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013): proc. of the Int. Conf. (Moscow, October 7–10, 2013). — P.241–255.
111. Efrosinin, D. Performance analysis of a two-server heterogeneous retrial queue with threshold policy / D. Efrosinin, J. Sztrik // Quality technology and quantitative management — 2011. — vol. 8 (3), P. 211–236.
112. Falin, G. I. A Survey of Retrial Queues / G. I. Falin // Queueing Systems. — 1990. — Vol. 7. — P. 127–167.
113. Falin, G. I. Retrial Queues / G. I. Falin, J. G. C. Templeton. — London: Chapman and Hall. — 1997. — 328 p.
114. Fricker, C. On the fluid limit of the M/G/ $\infty$  queue / C. Fricker, M. R. Jaibi // Queueing Systems. — 2007. — Vol. 56, № 3–4. — P. 255–265.
115. Girlich, E. Optimal Choice of the Capacities of Telecommunication Networks to Provide QoS-Routing / E. Girlich, M. Kovalev, N. Listopad // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, January 28-31, 2013). — P. 93–104.
116. Iglehart, D. L. Limit diffusion approximations for the many server queues and the repairman problem processes / D. L. Iglehart // Journal of Applied Probability. — 1965. — Vol. 2. — P. 429–441.

117. Iravani, S. M. R. A General Decomposition Algorithm for Parallel Queues with Correlated Arrivals / S. M. R. Iravani, K. L. Luangkesorn, D. Simchi-Levi // *Queueing Systems*. — 2004. — Vol. 47(4). — P. 313–344.
118. Ivanovskaya, I. Investigation of the queuing system  $MMP(2)|M2|\infty$  by method of the moments / S. Moiseeva, I. Ivanovskaya // *Problems of Cybernetics and Informatics: proc. of the third int. conf. (Baku, Azerbaijan, September 6–8, 2010)*. — Baku: Elm, 2010. — Vol. 2. — P. 196–199.
119. Jayawardene, A. K.  $M/G/\infty$  with alternating renewal breakdowns / A. K. Jayawardene, O. Kella // *Queueing Systems*. — 1996. — Vol. 22, № 1–2. — P. 79–95.
120. Kargahi, M. Utility Accrual Dynamic Routing in Real-Time Parallel Systems / M. Kargahi, A. Movaghar // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems (TDPS)*. — 2010. — Vol. 21 (12). — P. 1822–1835.
121. Kleinrock, L. *Queueing systems: Volume I, Theory* / L. Kleinrock — New York: Wiley Interscience. — 1975. — 417 p.
122. Knessl, C. A. Heavy Traffic Analysis of Two Coupled Processors / C. A. Knessl, J. Morrison // *Queueing Systems*. — 2003. — Vol. 43(3). — P. 173–220.
123. Lebedev, E. Limit diffusions for multi-channel networks with interdependent inputs / E. Lebedev, A. Chechelnitsky // *Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, Belarus, January 31–February 3, 2011)*. — P. 133–136.
124. Lebedev, E. On Asymptotic enlargement problem for stochastic networks / E. Lebedev // *Mathematical Methods and Optimization of Telecommunication Networks: Queues flows, systems, networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, Belarus, February 22–24, 2011)*. — P. 108–109.

125. Livshits K. Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods / K. Livshits, E. Ulyanova // Communications in Computer and Information Science. — V. 564. — Springer, 2015. — P. 263–274.
126. Lucantoni, D. M. A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes / Lucantoni D. M., K. S. Meier-Hellsten, M. F. Neuts // Advances in Applied Probability. — 1990. — Vol. 22. — P. 676–705.
127. Moiseeva, S. Investigation of queuing system  $GI(2)|M2|\infty$  / S. Moiseeva, I. Sinyakova // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: Queues: flows, systems, networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, Belarus, January 31–February 3, 2011). — P. 219–225.
128. Moiseeva, S. Investigation of output flows in the system with parallel service of multiple requests / S. Moiseeva, I. Sinyakova // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI'2012): IV Int. Conf. (Baku, Azerbaijan, September 12–14, 2012). — Baku: IEEE, 2012. — P. 180–181.
129. Movaghar, A. Analysis of a Dynamic Assignment of Impatient Customers to Parallel Queues / A. Movaghar // Queueing Systems. — 2011. — Vol. 67 (3). — P. 251–273.
130. Nazarov, A. Asymptotic Analysis of the System  $GI/GI/\infty$  by Means of the Dynamic Screening and the First Jump Separation Methods / A. Nazarov, A. Moiseev // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013): proc. of the Int. Conf. (Moscow, Russia, October 7–10, 2013). — P. 410–417.
131. Pankratova, E. Queueing System  $MAP|M|\infty$  with  $n$  Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Communications in Computer and Information Science, vol. 487. — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — P. 356–366.
132. Pankratova, E. Queueing System with Renewal Arrival Process and Two Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Proc. of the IEEE

- Int. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems, ICUMT 2014 (St. Petersburg, October 6–8, 2014). — St. Petersburg: IEEE, 2015. — P. 514–517.
133. Pankratova, E. Queueing System  $GI|GI|\infty$  with  $n$  Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Communications in Computer and Information Science, vol. 564. — Springer International Publishing Switzerland, 2015. — P. 216–225.
  134. Parulekar, M. Tail probabilities for  $M/G/\infty$  input processes (I): Preliminary asymptotics / M. Parulekar, A. M. Makowski // Queueing Systems. — 1997. — Vol. 27, № 3–4. — P. 271–296.
  135. Paxson, V. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling / V. Paxson, S. Floyd // IEEE/ACM Transactions on Networking. — January 1995. — Vol. 3 (3). — P. 226–244.
  136. Rykov, V. On the slow server problem / V. Rykov, D. Efrosinin // Automation and Remote Control. — 2009. — 70(12). — P. 2013–2023.
  137. Schwarz, M. Queuing systems with inventory managements with random lead times and with backordering / M. Schwarz, H. Daduna // Mathematical methods of operation research. — 2006. — V.64, (3) — P. 383–414.
  138. Sheu, R. S. Asymptotically optimal control of parallel tandem queues with loss / R. S. Sheu, I. Ziedins // Queueing Systems. — 2010. — Vol. 65 (3). — P. 211–227.
  139. Taqqu, M. S. Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of ethernet traffic measurements / M. S. Taqqu, W. E. Leland, W. Willinger, D. V. Wilson // Statistical Science. — 1995. — Vol. 10. — P. 67–85.
  140. Willinger, W. The Discovery of Self-Similar Traffic / W. Willinger // Performance Evaluation: Origins and Directions : Lecture Notes in Computer Science. — 2000. — Vol. 1769. — P. 513–527.

141. Wüchner, P. Modeling finite-source retrial queueing systems with unreliable heterogeneous servers and different service policies using mosel / P. Wüchner, G. Bolch, J. Roszic, J. Sztrik // Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications: proc. of the 14th Int. Conf. (Prague, June 4–6, 2007). — P. 75–80.
142. Yang, T. A survey of retrial queues / T. Yang, J. G. C. Templeton // Queuing Systems. — 1987. — № 2. — P. 201–233.
143. Zeifman, A. On a Queueing Model with Group Services / A. Zeifman, A. Korotysheva, Y. Satin [et al.] // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: proc. of the Int. Conf. (Minsk, January 28–31, 2013). — P. 198–205.