Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Трофименко Надежда Николаевна

# КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент Хмылёва Татьяна Евгеньевна

Томск – 2016

# Оглавление


**Список обозначений** **3**

**Введение** **5**

**1 Топологическая классификация пространств $S \times [1, \alpha]$** **14**

**2 Пространства непрерывных функций, заданные на «длинных прямых Зоргенфрея»** **24**

**3 Пространства непрерывных функций, заданные на «длинных прямых»** **46**

**4 Общий вид функционалов на пространствах $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S \times [1, \alpha])$** **57**

**Заключение** **72**

**Список литературы** **74**

# Список обозначений

В работе принята двойная нумерация теорем и формул, самостоятельная в каждой главе.

$S$ – прямая Зоргенфрея;

$[1, \alpha]$ – отрезок ординалов;

$\omega$ – первый бесконечный ординал;

$\omega_1$ – первый несчетный ординал;

$C_p(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости, заданных на вполне регулярном тихоновском пространстве $X$. База окрестностей нуля состоит из множеств вида

$$U(0, t_1, \ldots, t_n, \varepsilon) = \{x \in C_p(X) : \, |x(t_i)| < \varepsilon, \, \forall t_i \in X, i = \overline{1, n}\};$$

$C_c(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций с топологией компактной сходимости, заданных на вполне регулярном тихоновском пространстве $X$. База окрестностей нуля состоит из множеств вида

$$U(0, K, \varepsilon) = \{x \in C_c(X) : \, |x(k)| < \varepsilon, \, \forall k \in K\},$$

где $K \subset X$ — произвольный компакт и $\varepsilon > 0$;

$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ – это полуинтервал, наделенный стандартной евклидовой топологией;

$I_S = (0, 1] \subset S$ – это отрезок, наделенный топологией Зоргенфрея;

$C(K)$ – нормированное пространство с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in K} |x(t)|$, где $K$ – компакт;

$C^*(K)$ – сопряженное пространство к нормированному пространству $C(K)$, то есть пространство линейных непрерывных функционалов, заданных на $C(K)$;

Пусть $X$ – топологическое пространство, А – произвольное подмножество из X. Для произвольного ординала $\alpha$ определим $A^{(\alpha)}$ – это производная порядка $\alpha$ множества $A$, которая определяется по трансфинитной индукции формулами $A^{(1)} = A'$ – множество предельных точек множества $A$;

$$A^{(\xi+1)} = \left(A^{(\xi)}\right)',$$

и

$$A^{(\lambda)} = \cap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)},$$

если $\lambda$ – предельный ординал.

Запись $X \sim Y$ означает, что линейные топологические пространства $X$ и $Y$ линейно гомеоморфны;

$\square$ – конец доказательства.

# Введение

Пространства непрерывных функций $C(X)$ – это классический объект в топологии и функциональном анализе. В последние годы активно изучаются свойства пространств непрерывных функций $C_p(X)$, наделенных топологией поточечной сходимости. В частности, большое внимание уделяется вопросам классификации пространств непрерывных функций. Полная классификация получена для банаховых пространств непрерывных функций $C(K)$, заданных на метризуемых компактах $K$. В 1966 А.А. Милютин [9] доказал, что для любого несчетного метрического компакта $K$ пространство $C(K)$ изоморфно пространству $C[0,1]$. В 1960 году С. Бессага и А. Пелчинский в работе [18] дали полную классификацию пространств непрерывных функций на счетных метризуемых компактах или, что то же самое на счетных отрезках ординалов. Первый шаг по классификации банаховых пространств на несчетных отрезках ординалов сделал З. Семадени [23]. Он показал, что для первого несчетного ординала $\omega_1$ при различных $n \in \mathrm{N}$ пространства $C[1, \omega_1 \cdot n]$ не являются изоморфными. Теоремы С. Бессаги, А. Пелчинского и З. Семадени дали полную классификацию банаховых пространств непрерывных функций для всех ординалов, не превосходящих $\omega_1 \cdot \omega$. В работах С.П. Гулько, А.В. Оськина и С.В. Кислякова ([4],[6]) изоморфная классификация пространств $C[1, \alpha]$ была продолжена на произвольные отрезки ординалов $[1, \alpha]$. Для пространств непрерывных функций, заданных на отрезках ординалов и наделенных топологией поточечной сходимости, полная линейная гомеоморфная классификация была получена в работе С.П. Гулько [5].

Для неметризуемых пространств вопросы классификации не столь хорошо изучены. В частности, не изучен вопрос о классификации пространств непрерывных функций на линейно упорядоченных пространствах. В настоящей работе рассматривается один из классов таких пространств, а именно, вводится определение «длинных прямых Зоргенфрея» и проводится линейная топологическая классификация пространств непрерывных функций, заданных на этих прямых и дается гомеоморфная классификация «длинных прямых Зоргенфрея». Термин «длинные прямые Зоргенфрея» был введен по аналогии с понятием «длинные прямые», которое впервые было дано в работе П.С. Александрова и П.С. Урысона [1].

Напомним, что прямая Зоргенфрея – это числовая прямая с топологией, базу которой образуют все полуинтервалы вида $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Прямая Зоргенфрея $S$ является подпространством «двойной стрелки» П.С. Александрова, которая впервые стречается в книге «Мемуар о компактных топологических пространствах» П.С. Александрова и П.С. Урысона в 1929 году [1]. Прямая Зоргенфрея является «универсальным контрпримером» в общей топологии [17]. За последние 60 лет вышло много статей, касающихся свойств этого пространства. Отметим следующие из них: прямая Зоргенфрея является сепарабельным, совершенно нормальным, наследственно линделефовым, с первой аксимомой счетности, без второй аксиомы счетности, с несчетным сетевым весом пространством, каждое компактное подпространство которого является счетным.

В 1979 году Э. ван Дауэн и В. Пфеффер [22] доказали, что для любых натуральных $m, n \in \mathbb{N}$ пространства $S^n$ и $T^m$ не гомеоморфны, где $T$ – иррациональная прямая Зоргенфрея, т.е. множество иррациональных чисел в топологии стрелки. В этой статье они сформулировали вопрос о том, будут ли гомеоморфны пространства $S, S^2, \ldots$. В 1985 году Д. Бурке и Д. Латцер [19] доказали, что для любых различных натуральных $m, n \in \mathbb{N}$ пространства $S^n$ и $S^m$ не являются гомеоморфными. В работе рассмотрены пространства $S \times [1, \alpha]$, где $\alpha$ – произвольный ординал, и проведена топологическая классификация этих пространств. При этом используются результаты работы Д. Бурке и Дж. Мура [20], которые в 1998 году дали характеристику всем подмножествам прямой Зоргенфрея гомеоморфным ей самой – это $F_\sigma$ и одновременно $G_\delta$ множества без изолированных точек.

Топологические свойства прямой Зоргенфрея используются при решении задач функционального анализа. Одной из таких задач является задача об общем виде функционалов на пространствах непрерывных функций с различными топологиями. Начало систематическому исследованию такого рода задач положил Ф. Рисс. В 1909 году он доказал теорему об общем виде функционала на пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ [11]. В 1937 г. С. Банах обобщил эту теорему для пространства непрерывных функций $C(K)$, где $K$ – несчетный метрический компакт. Общий вид функционала на пространстве $C(K)$, где $K$ – произвольный компакт, исследовал Ш. Какутани (1941 г.). В работе З. Семадени [23] получен общий вид функционала на пространстве $C(K)$, где $K$ – разреженный компакт. Известно, что сопряженное к этому пространству есть в точности $l_1(K)$. В 1984 г., в то время как интенсивно развивалась теория пространств непрерывных функций в топологии поточечной сходимости, А.В. Архангельский [2] доказал теорему об общем виде функционала на пространстве $C_p(X)$.

**Общая характеристика и основные результаты диссертации.**

В данной работе рассматривается такой классический объект как пространства непрерывных функций с топологией поточечной сходимости. Пространства непрерывных функций рассматриваются на линейно упорядоченных пространствах, а именно на «длинных прямых Зоргенфрея» и на «длинных прямых». «Длинные прямые» впервые были определены в статье П.С. Александрова и П.С. Урысона «Мемуар о компактных топологических пространствах» [1]. В нашей работе по аналогии определяются «длинные прямые Зоргенфрея». Приводится их полная топологическая классификация. Дается полная линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея». Пространства непрерывных функций рассматриваются в топологиях поточечной и компактной сходимости. Также получены некоторые результаты о линейной гомеоморфной классификации пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых» и наделенных топологией поточечной сходимости. В диссертации доказаны теоремы об общем виде функционалов на пространствах непрерывных функций с топологией компаткной сходимости, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» и на произведениях $S\times[1,\alpha]$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Рассматриваемая в данной работе тематика является широко известной и актуальной.

**Цели работы.** Целями диссертационной работы являются:

— гомеоморфная классификация произведений прямой Зоргенфрея на произвольные отрезки ординалов;

— линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» с топологиями поточечной и компактной сходимости;

— гомеоморфная классификация «длинных прямых Зоргенфрея»;

— линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых» и наделенных топологией поточечной сходимости;

— вывод формулы общего вида функционала на пространствах непрерывных функций, наделенных топологией компактной сходимости и заданных на произведениях $S \times [1, \alpha]$, где $\alpha$ – произвольный ординал, на «длинных прямых Зоргенфрея» и на произведениях прямой Зоргенфрея $S^n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Методы исследования.** В работе используются методы топологии и функционального анализа: метод разложения Пелчинского пространств непрерывных функций в декартово произведение, метод трансфинитной индукции, арифметика порядковых чисел.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертационного исследования, полученные автором, являются новыми и определяются следующими положениями, выносимыми на защиту:

• Проведена гомеоморфная классификация произведений $S \times [1, \alpha]$, где $\alpha$ – произвольный ординал.

• Проведена линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» и наделенных топологией поточечной и компактной сходимости;

• Проведена гомеоморфная классификация «длинных прямых Зоргенфрея».

• Проведена частичная линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых».

• Получен общий вид функционала на пространствах непрерывных функций, наделенных топологией компактной сходимости и заданных на произведениях прямой Зоргенфрея на произвольные отрезки ординалов, на «длинных прямых Зоргенфрея» и на произведениях прямой Зоргенфрея $S^n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Её результаты могут использоваться в научных исследованиях и спецкурсах для студентов и аспирантов механико-математических факультетов, специализирующихся по топологии и функциональному анализу. Используемые методы исследования данной работы могут быть полезны при исследовании свойств пространств непрерывных функций, заданных на линейно упорядоченных топологических пространствах.

**Достоверность и обоснованность всех полученных результатов.** Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое обоснование в форме теорем.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации обсуждались на научном семинаре кафедры теории функций ММФ ТГУ (руководитель профессор С.П. Гулько) и докладывались на научных конференциях: 1. Международная (44-й Всероссийская) молодежная школа-конференция. Екатеринбург, 27 января – 2 февраля 2013 г.

2. IV Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». Томск, 17–19 ноября 2014.

3. 53-я международная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, 11-17 апреля 2015 г.

4. 54-я международная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, 16-20 апреля 2016г.

**Публикации.** Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в восьми печатных работах, в том числе четыре статьи в журналах, рекомендованных ВАК.

1. *Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е.* О линейном гомеоморфизме пространств непрерывных функций на подмножествах прямой Зоргенфрея // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2. С. 29-32;

2. *Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е.* О гомеоморфизмах пространств $I \times [1, \alpha]$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. №. 5 (25). С. 40-44;

3. *Трофименко Н.Н. Хмылева Т.Е.* О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых Зоргенфрея» // Сиб.Мат.жур. 2016. Т.57. № 3. С. 709-711;

4. *Трофименко Н.Н.* О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 36–41;

5. *Трофименко Н.Н.* О гомеоморфизмах между пространствами вида $I$ и $I \times [1, \alpha]$ // Международная молодежная школа-конференция : тезисы международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 27 января - 2 февраля 2013 г. С. 203.

6. *Трофименко Н.Н.* Пространства непрерывных функций на «длинных прямых Зоргенфрея» // Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики : сборник материалов IV Международной молодежной конференции Актуальные проблемы современ-

ной механики сплошных сред и небесной механики. Томск, 17–19 ноября, 2014. С 109-110;

7. *Трофименко Н.Н.* Пространства непрерывных функций на «длинных прямых Зоргенфрея» // Студент и научно-технический прогресс : материалы 54-ой международной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс. Новосибирск, 11-17 апреля 2015 г. С. 61;

8. *Трофименко Н.Н.* О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых» // Студент и научно-технический прогресс : материалы 54-ой международной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс. Новосибирск, 16-20 апреля 2016г. С. 37;

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и списка обозначений. Работа изложена на 76 страницах.

**Во введении** раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор известных результатов, формулируется цель и излагается содержание работы, обосновывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

**В 1-ой главе** проводится топологическая классификация пространств $S \times [1, \alpha]$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Доказывается, что пространство $S \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству в пространстве $S \times [1, \omega^\alpha]$ и, следовательно, пространства $S \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ и $S \times [1, \omega^\alpha]$ не являются гомеоморфными. Устанавливается, что пространства $S \times [1, \alpha]$ и $S \times [1, \alpha \cdot n]$ являются гомеоморфными. Отрезки ординалов $[1, \alpha]$ наделены стандартной порядковой топологией.

**Во 2-ой главе** получена гомеоморфная классификация «длинных прямых Зоргенфрея» и линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» $S_\alpha$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций наделяются топологиями поточечной и компактной сходимости и обозначаются $C_p(S_\alpha)$ и $C_c(S_\alpha)$.

**В 3-ой главе** проводится частичная линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых» $L_\alpha$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций наделяются топологией поточечной сходимости и обозначаются $C_p(L_\alpha)$. Доказано, что пространства $C_p(L_\alpha)$ и $C_p(L_\beta)$ линейно гомеоморфны, если $\alpha$ и $\beta$ счетные ординалы и пространства $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ не линейно гомеоморфны, если $\tau$ – начальный регулярный ординал, $\alpha, \beta$ – начальные ординалы и $\alpha < \beta \leq \tau$.

**В 4-ой главе** рассматривается пространство непрерывных функций $C_c(S \times [1, \alpha])$ в топологии компактной сходимости. Здесь $S$ – прямая Зоргенфрея, а отрезок ординалов $[1, \alpha]$ наделен стандартной порядковой топологией. Доказаны теоремы об общем виде функционалов на пространствах непрерывных функций $C_c(S \times [1, \alpha])$, $C_c(S^n)$, $C_c(S_\alpha)$.

**В заключении** формулируются основные результаты диссертации.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту Татьяне Евгеньевне Хмылёвой за постановку задач и ценные советы.

# Глава 1

# Топологическая классификация пространств $S \times [1, \alpha]$

В данной главе проводится топологическая классификация пространств $S \times [1, \alpha]$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Доказывается, что пространство $S \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству в пространстве $S \times [1, \omega^\alpha]$ и, следовательно, пространства $S \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ и $S \times [1, \omega^\alpha]$ не являются гомеоморфными и, значит, пространства $S \times [1, \omega^\beta]$ и $S \times [1, \omega^\alpha]$ не являются гомеоморфными при $\alpha \neq \beta$. Устанавливается, что пространства $S \times [1, \alpha]$ и $S \times [1, \alpha \cdot n]$ являются гомеоморфными. Отрезки ординалов $[1, \alpha]$ наделены стандартной порядковой топологией.

Результаты этой главы опубликованы в [12] и [13].

В данной главе запись $X \sim Y$ означает, что топологические пространства $X$ и $Y$ гомеоморфны.

Для доказательства основного результата нам потребуются некоторые теоремы о разложении ординалов, доказательство которых представлено в [7].

**Теорема 1.1.** *Если $1 \leq \alpha < \omega^\gamma$, то существует последовательность* *натуральных чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *такая, что*

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot n_m,$$

*где* $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_m \geq 0.$

**Теорема 1.2.** *Если* $\gamma > 1$ *и* $1 \leq \alpha < \gamma^\xi$, *то существуют такие* $\eta$, $\beta$ *и* $\rho$, *что*

$$\alpha = \gamma^n \cdot \beta + \rho,$$

$0 \leq \eta < \xi$, $\beta < \gamma$, $\rho < \gamma^\eta$.

**Предложение 1.1.** *Пусть* $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot n_m$. *Тогда отрезки ординалов* $[1, \alpha]$ *и* $[1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1]$ *являются гомеоморфными.*

**Доказательство.** Представим отрезок ординалов $[1, \alpha]$ в виде

$$[1, \alpha] = [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \sqcup [\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \xi].$$

В силу того, что отображение $\varphi(\omega^{\gamma_1} \cdot n + \delta) = \delta$, $\delta < \omega^{\gamma_1}$ является гомеоморфизмом справедливо следующее

$$[1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \sqcup [\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \xi]$$

$$\sim [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \sqcup [1, \xi] = [1, \xi] \sqcup [1, \xi \cdot \omega] \sqcup [\xi \cdot \omega + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1].$$

Нетрудно видеть, что отображение $\psi : [1, \xi] \sqcup [1, \xi \cdot \omega] \sqcup [\xi \cdot \omega + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \to [1, \xi \cdot \omega] \sqcup [\xi \cdot \omega + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1]$, заданное формулой

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \xi(n+1) + \delta, & \text{где} \quad \tau = \xi \cdot n + \delta\,, \quad 0 \leq \delta < \xi, n = 0, 1, 2, \ldots; \\ \tau, & \text{где} \quad \tau \in [1, \xi] \qquad \text{или} \quad \tau \in [\xi \cdot \omega + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1]. \end{cases}$$

является гомеоморфизмом. Поэтому

$$[1, \alpha] \sim [1, \xi] \sqcup [1, \xi \cdot \omega] \sqcup [\xi \cdot \omega + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1]$$

$$\sim [1, \xi \cdot \omega] \sqcup [\xi \cdot \omega + 1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] = [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1].$$

$\square$

**Теорема 1.3.** *Пусть $\gamma$ – произвольный ординал и $n \in \mathbb{N}$. Тогда пространства $S \times [1, \omega^\gamma]$ и $S \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$ являются гомеоморфными.*

**Доказательство.** Для $n = 1$ утверждение теоремы тривиально. Пусть $n \geq 2$. Представим пространство $S \times [1, \omega^\gamma]$ следующим образом

$$S \times [1, \omega^\gamma] = ((-\infty, 1] \sqcup (1, 2] \sqcup \ldots \sqcup (n-2, n-1] \sqcup (n-1, +\infty)) \times [1, \omega^\gamma]$$

$$\sim (\sqcup_{i=1}^n S_i) \times [1, \omega^\gamma],$$

где $S_i = (-\infty, 1]$ или $S_i = (n-2, n-1]$ или $S_i = (n-1, +\infty)$. Так как $S_i \sim S$ в силу [20], то

$$(\sqcup_{i=1}^n S_i) \times [1, \omega^\gamma] \sim (S \times [1, \omega^\gamma]) \oplus (S \times [1, \omega^\gamma]) \oplus \ldots \oplus (S \times [1, \omega^\gamma]).$$

Пространство $S \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$ запишем в виде

$$S \times [1, \omega^\gamma \cdot n] \sim (S \times [1, \omega^\gamma]) \oplus (S \times [\omega^\gamma + 1, \omega^\gamma \cdot 2]) \oplus \ldots \oplus (S \times [\omega^\gamma (n-1) + 1, \omega^\gamma \cdot n])$$

$$\sim (S \times [1, \omega^\gamma]) \oplus (S \times [1, \omega^\gamma]) \oplus \ldots \oplus (S \times [1, \omega^\gamma]).$$

Таким образом, пространства $S \times [1, \omega^\gamma]$ и $S \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$ гомеоморфны.

$\square$

**Следствие 1.1.** *Пространства $S \times [1, \omega^\gamma \cdot m]$ и $S \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$ являются гомеоморфными, для любых $n, m \in \mathbb{N}$.*

**Следствие 1.2.** *Пространства $S \times [1, \alpha]$ и $S \times [1, \alpha \cdot n]$ являются гомеоморфными.*

Это утверждение следует из предложения 1.1.

**Теорема 1.4.** *Пространство $S \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в пространстве $S$.*

Для доказательства теоремы 1.4 нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.1.** *Любое открытое подмножество $U$ на прямой Зоргенфрея $S$ можно представить как*

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

*где $I_i = (a_i, b_i)$ или $I_i = (a_i, b_i]$.*

**Доказательство.** Для каждой точки $x \in U$ выберем множество

$$A_x = \{(x - \varepsilon, x + \delta] : (x - \varepsilon, x + \delta] \subset U; \varepsilon > 0, \delta \geq 0\}.$$

Обозначим через

$$x - \varepsilon_x = \inf_{(x-\varepsilon, x+\delta] \in A_x} (x - \varepsilon) \quad \text{и} \quad x + \delta_x = \sup_{(x-\varepsilon, x+\delta] \in A_x} (x + \delta).$$

Так как $U$ – открытое множество, то $x - \varepsilon_x \notin U$, а $x + \delta_x$ может принадлежать, а может и не принадлежать $U$. Множество $U_x = (x - \varepsilon_x, x + \delta_x)$, если $x + \delta_x \notin U$ и $U_x = (x - \varepsilon_x, x + \delta_x]$, если $x + \delta_x \in U$. Ясно, что $U_x \in U$. Заметим, что если $x \neq x^{'}$, то $U_x = U_x^{'}$ либо $U_x \bigcap U_x^{'} = \emptyset$. Действительно, если $U_x \bigcap U_x^{'} \neq \emptyset$ и $U_x \neq U_x^{'}$, то $U_x \bigcup U_x^{'}$ содержит точки $x$ и $x^{'}$, а это противоречит тому, что интервалы $U_x$ и $U_x^{'}$ наибольшие.

Очевидно, что $U = \bigcup\limits_{x \in I} U_x$. Семейство $\{U_x\}_{x \in I}$ содержит только счетное число непересекающихся интервалов, так как прямая Зоргенфрея $S$ является сепарабельным пространством.

$\square$

**Доказательство теоремы 1.4.** Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S \times [1, \omega] \to S$ такой, что $\varphi(S \times [1, \omega]) = U$, где $U$ – открытое подмножество на прямой $S$. Так как $\varphi$ – гомеоморфизм, то $\varphi(S \times \{n\})$ – открыто-замкнутое подмножество в $U$ и так как $U$ – открытое подмножество в $S$, то $\varphi(S \times \{n\})$ – открытое подмножесто в $S$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Согласно лемме 1.1 представим $\varphi(S \times \{n\})$ следующим образом

$$\varphi(S\times\{n\})=\bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i^n,$$

где

$$I_i^n=(a_i^n,b_i^n) \quad \text{или} \quad I_i^n=(a_i^n,b_i^n]$$

для любого $n\in\mathbb{N}$. Поскольку отображение $\varphi$ является гомеоморфизмом, получаем

$$\varphi^{-1}((a_i^n,b_i^n])=\bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j}^n,$$

где $I_{i,j}^n=(c_{i,j}^n,d_{i,j}^n)\times\{n\}$ или $I_{i,j}^n=(c_{i,j}^n,d_{i,j}^n]\times\{n\}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Ясно, что

$$\left|\left(\{c_{i,j}^k\}\cup\{b_{i,j}^k\}\right)_{i,j,k=1}^{\infty}\right|\leq\aleph_0.$$

Следовательно, существует точка $(x_0,\omega)\in S\times\{\omega\}$ такая, что

$$x_0\notin\left(\{c_{i,j}^k\}\cup\{b_{i,j}^k\}\right)_{i,j,k=1}^{\infty},$$

Таким образом, для любого $n\in\mathbb{N}$ существуют номера $i_n,j_n$ такие, что

$$(x_0,n)\in(c_{i_n,j_n}^n,d_{i_n,j_n}^n), \tag{1.1}$$

для всех $n\in\mathbb{N}$. Так как $\varphi$ – гомеоморфизм, то $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_0,n)=\varphi(x_0,\omega)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что если $k>n$, то $\varphi(x_0,n)<\varphi(x_0,k)$ для любых $n<k$. Ясно, что выполняется условие

$$\varphi(x_0,n)<\varphi(x_0,\omega) \quad \text{и} \quad \varphi(x_0,n)<\varphi(x_0,k)<\varphi(x_0,\omega)$$

для любого $n\in\mathbb{N}$. Для некоторых $i,j\in\mathbb{N}$ существует номер $i_n$ такой, что $\varphi(x_0,n)\in I_{i_n}^n$ и $\varphi(x_0,k)\in I_{i_k}^k$ и $I_{i_n}^n\cap I_i^k=\emptyset$, $k\neq n$. Кроме того, выполняется неравенство

$$I_{i_1}^1<I_{i_2}^2<\ldots<I_{i_n}^n<\ldots<\varphi(x_0,\omega).$$

Следовательно, для любой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n\in I_{i_n}^n$ получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} y_n = \varphi(x_0, \omega) \tag{1.2}$$

В силу равенства 1.1 точка $(x_0, n) \in (c^n_{i_n,j_n}, d^n_{i_n,j_n})$, то существует число $\varepsilon_n$ такое, что $(x_0 + \varepsilon_n, n) \in (c^n_{i_n,j_n}, d^n_{i_n,j_n})$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что точки

$$(x_0 + \varepsilon_n, n) \not\to_{n\to\infty} (x_0, \omega)$$

в пространстве $S \times [1, \omega]$, а образы этих точек $\varphi(x_0 + \varepsilon_n, n) \in I^n_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и по (1.2)

$$\varphi(x_0 + \varepsilon_n, n) \to_{n\to\infty} \varphi(x_0, \omega).$$

Таким образом, получили противоречие с непрерывностью $\varphi^{-1}$. $\square$

**Следствие 1.3.** *Пространства $S$ и $S \times [1, \omega]$ не являются гомеоморфными.*

Используя теорему 1.4 и следствие 1.3, получаем следующий результат.

**Следствие 1.4.** *Пространство $S \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $S$.*

Данное утверждение следует из того, что любое замкнутое подпространство прямой Зоргенфрея без изолированных точек гомеоморфно $S$ [20], а при гомеоморфизме $S \times [1, \omega]$ в $S$, образ пространства $S \times [1, \omega]$ является пространством без изолированных точек.

**Теорема 1.5.** *Пусть $\alpha$ – произвольный ординал. Тогда пространство $S \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $S \times [1, \omega^\alpha]$.*

**Доказательство.** Доказательство проведем методом трансфинитной индукции. Пусть $\alpha = 0$. Согласно следствию 1.4, пространство $S \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $S$. Предположим, что для всех $\beta < \gamma$ пространство $S \times [1, \omega^\beta \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $S \times [1, \omega^\beta]$. Докажем, что предположение индукции выполнено для ординала $\gamma$. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega] \to S \times [1, \omega^\gamma]$ такой, что $\varphi(S \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega]) = F$, где $F$ – замкнутое подпространство в пространстве $S \times [1, \omega^\gamma]$. Рассмотрим точку $(x, \omega^\gamma) \in S \times \{\omega^\gamma\}$. Пусть $\varphi(x, \omega^\gamma) = (y, \delta)$. Покажем, что $\delta = \omega^\gamma$. Предположим, что $\delta < \omega^\gamma$. Так как отображение $\varphi$ является непрерывным, то для любого $\varepsilon > 0$ и $\rho < \delta$ существует открыто-замкнутая открестность $(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \subset S \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega]$ такая, что

$$\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma]) \subset (y - \varepsilon, y] \times (\rho, \delta]$$

как замкнутое подмножество в $S \times [1, \omega^\gamma]$. Из предложения 1.1 следует, что

$$(x - \varepsilon_1, x] \times [\xi, \omega^\gamma] \sim S \times [1, \omega^\gamma].$$

Представим ординал $\delta$ в следующем виде

$$\delta = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\beta_m} \cdot n_m,$$

где $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_m$, $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме 1.1, $[1, \delta] \sim [1, \omega^{\beta_1} \cdot n_1]$. Применяя теорему 1.3 получаем

$$\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma]) \subset (y - \varepsilon, y] \times (\rho, \delta]$$
$$\subset S \times [1, \delta] \sim S \times [1, \omega^{\beta_1} \cdot n_1] \sim S \times [1, \omega^{\beta_1}].$$

Следовательно, $\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma])$ гомеоморфно вкладывается как замкнутое подпространство в $S \times [1, \omega^{\beta_1}]$. Так как $(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \sim$

$S \times [1, \omega^\gamma]$, то пространство $S \times [1, \omega^\gamma]$ гомеоморфно вкладывается в $S \times [1, \omega^{\beta_1}]$, что невозможно, поскольку $\omega^\gamma > \delta \geq \omega^{\beta_1} \cdot n_1$, и значит, $\omega^\gamma \geq \omega^{\beta_1 + 1} = \omega^{\beta_1} \cdot \omega$. Следовательно, $\delta = \omega^\gamma$ и, значит, $\varphi(S \times \{\omega^\gamma\}) \subset S \times \{\omega^\gamma\}$. Аналогично можно доказать, что $\varphi(S \times \{\omega^\gamma \cdot n\}) \subset S \times \{\omega^\gamma\}$ для всех $n \in N$. Так как $S \times \{\omega^\gamma\}$ замкнутое подмножество в $S \times [1, \omega^\gamma]$. $\lim\limits_{n \to \infty} (x, \omega^\gamma \cdot n) = (x, \omega^\gamma \cdot \omega)$. Точка $(x, \omega^\gamma \cdot \omega) \in S \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\}$. Следовательно,

$$\varphi\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (S \times \{\omega^\gamma \cdot n\}) \bigsqcup (S \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\})\right) \subset S \times \{\omega^\gamma\}.$$

В силу того, что $S \times \{\omega^\gamma \cdot n\} \sim S$ для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (S \times \{\omega^\gamma \cdot n\}) \bigsqcup (S \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\})\right) \sim S \times [1, \omega]$$

и $S \times \{\omega^\gamma\} \sim S$, то получаем противоречие со следствием 1.4.

$\square$

**Следствие 1.5.** *Пусть $\alpha$ – произвольный ординал. Тогда пространства $S \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ и $S \times [1, \omega^\alpha]$ не являются гомеоморфными.*

**Следствие 1.6.** *Пусть $\alpha$, $\beta$ – произвольные ординалы и $\alpha \leq \beta$. Пространства $S \times [1, \alpha] \sim S \times [1, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.*

**Доказательство.** Пусть $\varphi : S \times [1, \alpha] \to S \times [1, \beta]$ гомеоморфизм и $\beta \geq \alpha$. Представим ординалы $\alpha$ и $\beta$ в виде [7]

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot n_m,$$

$$\beta = \omega^{\delta_1} \cdot m_1 + \omega^{\delta_2} \cdot m_2 \ldots + \omega^{\delta_l} \cdot m_l.$$

Так как $\alpha \leq \beta$, то $\delta_1 \geq \gamma_1$. В силу того, что отображение $\varphi$ гомеоморфизм и по предложению 1.1 получаем, что $S \times [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \sim S \times [1, \omega^{\delta_1} \cdot m_1]$. В свою очередь по теореме 1.3 имеем $S \times [1, \omega^{\gamma_1}] \sim S \times [1, \omega^{\delta_1}]$, где $\delta_1 \geq \gamma_1$.

Заметим, что в силу теоремы 1.5 неравенство $\omega^{\delta_1} \geq \omega^{\gamma_1} \cdot \omega$ невозможно. Следовательно, $\omega^{\delta_1} < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1+1}$ и $\delta_1 \leq \gamma_1$. Тогда, $\omega^{\delta_1}(m_1+1) \leq \omega^{\gamma_1}(m_1+1) < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega$. Таким образом,

$$\alpha \leq \beta < \omega^{\delta_1} \cdot m_1 + \omega^{\delta_1} = \omega^{\delta_1}(m_1+1) < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha \cdot \omega.$$

Последнее равенство верно, так как

$$\begin{aligned} &\omega^{\gamma_1} \cdot \omega = (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1) \cdot \omega \\ &\qquad \leq \alpha \cdot \omega = (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot n_m) \cdot \omega \\ &\qquad\qquad \leq (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_1}) \cdot \omega = \omega^{\gamma_1}(n_1+1) \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega. \end{aligned}$$

Докажем обратную имликацию $\omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha \cdot \omega$. Пусть $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$. Используя предыдущее неравенство $\omega^{\gamma_1} \leq \omega^{\delta_1}(m_1+1)$, получаем

$$\begin{aligned} &\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot n_m \\ &\quad \leq \beta = \omega^{\delta_1} \cdot m_1 + \omega^{\delta_2} \cdot m_2 \ldots + \omega^{\delta_l} \cdot m_l < \alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1+1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Из последного неравенства видим, что $\gamma_1 \leq \delta_1 \leq \gamma_1$ и, следовательно, $\delta_1 = \gamma_1$. Так как $S \times [1, \omega^{\gamma_1}] \sim S \times [1, \alpha]$ и $S \times [1, \omega^{\delta_1}] \sim S \times [1, \beta]$, согласно следствию 1.1, предложению 1.1 и тому, что $\delta_1 = \gamma_1$, имеем $S \times [1, \alpha] \sim S \times [1, \beta]$. $\square$

В отличие от пространств $S \times [1, \alpha]$, пространства $\mathbb{R} \times [1, \alpha]$ могут быть гомеоморфны только в случае гомеоморфности отрезков ординалов.

**Теорема 1.6.** *Пространства $\mathbb{R} \times [1, \eta]$ и $\mathbb{R} \times [1, \xi]$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда отрезки ординалов $[1, \eta]$ и $[1, \xi]$ гомеоморфны.*

**Доказательство.** В силу предложения 1.1 мы можем считать, что $\eta = \omega^\alpha \cdot n$, а $\xi = \omega^\beta \cdot m$. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi$ :

$\mathbb{R} \times [1, \omega^\alpha \cdot n] \to \mathbb{R} \times [1, \omega^\beta \cdot m]$. Расссмотрим компакт $F = \{1\} \times [1, \omega^\alpha \cdot n] \subset \mathbb{R} \times [1, \omega^\alpha \cdot n]$ гомеоморфный отрезку ординалов $[1, \omega^\alpha \cdot n]$. Пусть $\pi : \mathbb{R} \times [1, \omega^\beta \cdot m] \to [1, \omega^\beta \cdot m]$ – отображение проектирования $\pi(y, \gamma) = \gamma$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что отображение $(\pi \circ \varphi)|_F : F \to [1, \omega^\beta \cdot m]$ является гомеоморфизмом. Поскольку $(\pi \circ \varphi)|_F$ – непрерывное отображение компакта, то достаточно показать, что отображение является биекцией $F$ на отрезок $[1, \omega^\beta \cdot m]$. Рассмотрим точки $(1, \gamma), (1, \delta) \in F$, $\gamma \neq \delta$. Если $(\pi \circ y)(1, \gamma) = (\pi \circ y)(1, \delta) = \tau$, то это означает, что $\varphi(1, \gamma) = (y, \tau)$, а $\varphi(1, \delta) = (z, \tau)$. В силу связности прямой $\mathbb{R}$, $\varphi(\mathbb{R} \times \{\gamma\}) \subset \mathbb{R} \times \{\tau\}$ и $\varphi(\mathbb{R} \times \{\delta\}) \subset \mathbb{R} \times \{\tau\}$. Но это невозможно, так как $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \times \{\tau\})$ – связное множество. Таким образом, $\pi \circ \varphi$ – инъективное отображение. Докажем теперь, что $\varphi(F) = [1, \omega^\beta \cdot m]$. Пусть $\tau \in [1, \omega^\beta \cdot m]$. Поскольку $\varphi$ – гомеоморфизм, то существует точка $(x, \gamma) \in \mathbb{R} \times [1, \omega^\alpha \cdot n]$ такая, что $\varphi(x, \gamma) = (0, \tau)$. В силу связности множества $\varphi(\mathbb{R} \times \{\gamma\}) \subset \mathbb{R} \times \{\tau\}$ и, следовательно, $\varphi(0, \gamma) = (y, \tau)$ для некоторого $y \in \mathbb{R}$. Но тогда $(\pi \circ \varphi)(0, \gamma) = \tau$. Таким образом, $\pi \circ \varphi$ является биекцией компакта $F$ на отрезок ординалов $[1, \omega^\beta \cdot m]$.

Достаточность очевидна.

$\square$

# Глава 2

# Пространства непрерывных функций, заданные на «длинных прямых Зоргенфрея»

В данной главе проводится гомеоморфная классификация «длинных прямых Зоргенфрея» $S_\alpha$ и линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» $S_\alpha$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций наделяются топологией поточечной и компактной сходимости и обозначаются $C_p(S_\alpha)$ и $C_c(S_\alpha)$ соответственно.

Результаты этой главы опубликованы в [14].

Определим «длинные прямые Зоргенфрея», используя конструкцию, предложенную В.В. Федорчуком в [16]. Пусть $X = [1, \alpha]$ – отрезок ординалов, $X'$ – множество предельных точек пространства $X$ и

$$Y_\gamma = \begin{cases} (0,1], & \text{если} \quad \gamma \in X \backslash X'; \\ \{\gamma\}, & \text{если} \quad \gamma \in X', \end{cases}$$

где в случае $\gamma \in X \backslash X'$ под $Y_\gamma$ понимаются попарно непересекающиеся копии полуинтервала $I = (0, 1]$, наделенные топологией Зоргенфрея.

Будем называть «длинной прямой Зоргенфрея» множество $S_\alpha = \bigsqcup_{\gamma\in[1,\alpha]} Y_\gamma$ с топологией, порожденной следующей базой окрестностей: для точки $p \in Y_\gamma$ базу окрестностей образуют множества вида

$$O_p = V_p \cup \bigcup \left\{Y_\delta :\, \delta \in U \cap f^{-1}(V_p)\right\},$$

где $V_p$ – окрестность точки $p$ в пространстве $Y_\gamma$, $U$ – окрестность точки $\gamma$ в пространстве $X$ и $f_\gamma : X\setminus\{\gamma\} \to Y_\gamma$ – непрерывные отображения, определенные по формулам:

- $f_\gamma(p) = 1$ для всех $p \in X \setminus \{\gamma\}$, если $\gamma \in X\setminus X'$;
- $f_\gamma(p) = \gamma$ для всех $p \in X \setminus \{\gamma\}$, если $\gamma \in X'$.

Топологию на «длинных прямых Зоргенфрея», обозначим ее через $\tau$, можно определить, не опираясь на конструкцию В.В. Федорчука, если на множестве $S_\alpha$ ввести следующее отношение порядка $\leq_\alpha$

- если $p \in Y_\xi$, $q \in Y_\eta$ и $\xi < \eta$ в отрезке ординалов $[1, \alpha]$, то $p \leq_\alpha q$;
- если $p \in Y_\xi$ и $q \in Y_\xi$, то $p \leq_\alpha q$ означает, что $p \leq q$ в пространстве $Y_\xi$.

Тогда базу окрестностей точки $p \in S_\alpha$ в топологии $\tau$ образуют множества вида

$$O_q(p) = \{t \in S_\alpha :\, q <_\alpha t \leq_\alpha p\}.$$

Выражаясь неформально, «длинные прямые Зоргенфрея» получаются из отрезков ординалов при помощи «приклеивания» полуинтервала $I \subset S$ к непредельным ординалам $\alpha$. Но поскольку подпространство $I \subset S$ гомеоморфно пространству $S$ [20], то в работе мы используем термин «длинная прямая Зоргенфрея».

Для ординалов $\lambda$ и $\mu$, $\lambda < \mu \leq \alpha$, определим подпространство $S_{[\lambda,\mu]} \subset S_\alpha$ следующим образом

$$S_{[\lambda,\mu]} = \left\{ x \in S_\alpha : x \in \bigsqcup\nolimits_{\lambda \leq \gamma \leq \mu} Y_\gamma \right\}.$$

Нетрудно видеть, что для произвольного ординала $\lambda$ множество $S_{[\lambda+1,\mu]}$ является открыто-замкнутым в пространстве $S_\alpha$.

Пусть $T$ – топологическое пространство и $M \subset T$. Для произвольного ординала $\eta$ через $M^{(\eta)}$ обозначим производное множество порядка $\eta$. Отметим (см., например [17]), что если $A$ и $B$ – замкнутые множества топологического пространства $T$ и $M = A \sqcup B$, то для любого ординала $\eta$ справедливо равенство

$$M^{(\eta)} = A^{(\eta)} \bigsqcup B^{(\eta)}. \tag{2.1}$$

Пусть $L$ – замкнутое подмножество в пространстве $S_\alpha$ и $\gamma \in [1, \alpha]$ – непредельный ординал. Так как $Y_\gamma = (0, 1] \subset S$ является открыто-замкнутым подмножеством в $S_\alpha$, то по формуле (2.1) получаем

$$L^{(\eta)} = (L \cap Y_\gamma)^{(\eta)} \bigsqcup (L \cap (S_\alpha \backslash Y_\gamma))^{(\eta)}. \tag{2.2}$$

Далее $L$ – компакт. Поскольку полуинтервал $(0, 1]$, наделенный топологией Зоргенфрея, не содержит несчетных компактов [17], то для первого несчетного ординала $\omega_1$ справедливо равенство $(L \cap Y_\gamma)^{(\omega_1)} = \varnothing$ и, следовательно, для любого ординала $\gamma \in X \backslash X'$

$$L^{(\omega_1)} = (L \bigcap (S_\alpha \backslash Y_\gamma))^{(\omega_1)} \subset L \bigcap (S_\alpha \backslash Y_\gamma) \subset S_\alpha \backslash Y_\gamma. \tag{2.3}$$

Из соотношения (2.3) получаем

$$L^{(\omega_1)} \subset \bigcap\nolimits_{\gamma \in X \backslash X'} (S_\alpha \backslash Y_\gamma) = S_\alpha \backslash \bigsqcup\nolimits_{\gamma \in X \backslash X'} Y_\gamma = \bigsqcup\nolimits_{\gamma \in X'} Y_\gamma = X' \subset [1, \alpha]. \tag{2.4}$$

Для доказательства теорем о линейной гомеоморфности пространств $C_p(S_\alpha)$ нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\alpha = \omega^\delta \cdot n + \rho$, $\delta \geq \omega_1$, $\rho < \omega^\delta$ и $L$ – произвольный компакт в $S_\alpha$. Тогда $L^{(\delta)} \subset [1, \alpha]^{(\delta)}$.*

**Доказательство.** Доказательство проведем методом трансфинитной индукции по $\delta$. Пусть $\delta = \omega_1$. В этом случае $\alpha = \omega^{\omega_1} \cdot n + \rho = \omega_1 \cdot n + \rho$, так как $\omega^{\omega_1} = \omega_1$. Покажем, что

$$L^{(\omega_1)} \subset [1, \alpha]^{(\omega_1)} = \{\omega_1, \omega_1 \cdot 2, \ldots, \omega_1 \cdot n\}.$$

Допустим существует точка $x$ такая, что $x \in L^{(\omega_1)}$, но $x \notin [1, \alpha]^{(\omega_1)} = \{\omega_1, \omega_1 \cdot 2, \ldots, \omega_1 \cdot n\}$. Так как по формуле (2.4) $L^{(\omega_1)} \subset X'$, то $x = \omega_1 \cdot k + \lambda$, где $k = 0, \ldots, n-1$, $0 < \lambda < \omega_1$ и $\lambda$ – предельный ординал. Пользуясь равенством (2.1), получаем

$$L^{(\omega_1)} = \big(L \bigcap S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}\big)^{(\omega_1)} \bigsqcup \big(L \bigcap (S_\alpha \setminus S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]})\big)^{(\omega_1)}.$$

Поскольку $\lambda < \omega_1$, то множество $L \cap S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}$ является счетным компактом и, следовательно,

$$L^{(\omega_1)} = \big(L \bigcap (S_\alpha \setminus S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]})\big)^{(\omega_1)} \subset S_\alpha \setminus S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}.$$

Значит, $x \notin S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}$, что противоречит тому, что $x = \omega_1 \cdot k + \lambda$.

Предположим теперь, что для всех ординалов $\delta$, $\omega_1 \leq \delta < \xi$, справедливо включение $L^{(\delta)} \subset [1, \alpha]^{(\delta)}$. Докажем, что утверждение выполнено для ординала $\xi$. Пусть $\alpha = \omega^\xi \cdot n + \rho$, где $\rho < \omega^\xi$. Допустим, что существует $x \in L^{(\xi)}$, но $x \notin [1, \alpha]^{(\xi)} = \{\omega^\xi \cdot 1, \omega^\xi \cdot 2, \ldots, \omega^\xi \cdot n\}$. Тогда $x = \omega^\xi \cdot k + \lambda$, где $k = 0, \ldots, n-1$, $0 < \lambda < \omega^\xi$ и $\lambda$ – предельный ординал. Заметим, что пространства $S_{[\omega^\xi \cdot k+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}$ и $S_{[1,\lambda]}$ являются гомеоморфными, и, следовательно, компактное подмножество $L \cap S_{[\omega^\xi \cdot k+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}$ гомеоморфно подмножеству $K \subset S_{[1,\lambda]}$. Представим ординал $\lambda$ в виде $\lambda = \omega^\mu \cdot m + r$, где

$r < \omega^\mu$ и $\mu < \xi$. Тогда, по предположению индукции

$$K^{(\mu)} \subset [1, \lambda]^{(\mu)} = \{\omega^\mu \cdot 1, \omega^\mu \cdot 2, \ldots, \omega^\mu \cdot m\},$$

т.е. $K^{(\mu)}$ – конечное множество. Поэтому множество $(L \cap S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})^{(\mu)}$ также является конечным и, так как $\mu < \xi$, то $(L \cap S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})^{(\xi)} = \emptyset$. Пользуясь равенством (2.1), получаем

$$L^{(\xi)} = \big(L \cap S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}\big)^{(\xi)} \bigsqcup \big(L \cap (S_\alpha \backslash S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})\big)^{(\xi)}$$

$$= \big(L \cap S_\alpha \backslash S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}\big)^{(\xi)} \subset S_\alpha \backslash S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}.$$

Следовательно, $x \notin S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}$, что противоречит тому, что $x = \omega^\xi \cdot k + \lambda$.

□

**Теорема 2.1.** *Пусть $\lambda$ – регулярный начальный ординал и $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Тогда пространства $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ и $C_p(S_{\lambda \cdot m})$ не являются линейно гомеоморфными.*

**Доказательство.** Предположим, что $n > m$ и существует линейный гомеоморфизм $T$ пространства $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ на пространство $C_p(S_{\lambda \cdot m})$. Поскольку пространства $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ и $C_p(S_{\lambda \cdot m})$ всюду плотны в пространствах $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}}$ и $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot m}}$ соотвественно, то линейный гомеоморфизм $T$ может быть продолжен до линейного гомеморфизма $\widetilde{T}$ пространства $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}}$ на пространство $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot m}}$ [[17], стр. 654]

$$\widetilde{T} : \mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}} \longrightarrow \mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot m}}.$$

Известно [2], что сопряженным к пространствам $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ и $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}}$ является пространство $L_p(S_{\lambda \cdot n})$, состоящее из всех функционалов вида

$$f = p_1 \cdot \delta_{t_1} + p_2 \cdot \delta_{t_2} + \ldots + p_n \cdot \delta_{t_n},$$

где $p_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\delta_{t_k}(x) = x(t_k)$ для любого $x \in C_p(S_{\lambda\cdot n})$, $k = 1, \ldots, n$. Множество точек $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset S_{\lambda\cdot n}$ называется носителем функционала $f$ и обозначается $\mathrm{supp} f$. Рассмотрим линейное подпространство

$$M_{\lambda\cdot n} = C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_n}\},$$

где $\chi_{\lambda_l} \subset \mathbb{R}^{\lambda\cdot n}$ – характеристическая функция одноточечного множества $\{\lambda \cdot l\}$, $l = 1, \ldots, n$.

Докажем, что

$$\widetilde{T}(M_{\lambda\cdot n}) = M_{\lambda\cdot m} = C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_m}\}. \tag{2.5}$$

Для этого покажем, что пространство $M_{\lambda\cdot n}$ можно определить, другим способом с помощью семейства функционалов $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset L_p(S_{\lambda\cdot n})$ мощности меньшей, чем $|\lambda|$.

А именно, покажем, что $M_{\lambda\cdot n} = E$, где

$$E = \{y \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot n} : \forall \{f_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset L_p(S_{\lambda\cdot n})\,\text{такого, что}$$

$$|\mathcal{I}| < |\lambda|\,, \exists\, x \in C_p(S_{\lambda\cdot n})\,\text{такой, что}\, f_i(x) = f_i(y)\ \forall i \in \mathcal{I}\}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим множество

$$A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \left(\mathrm{supp} f_i \setminus \{\lambda \cdot 1, \ldots, \lambda \cdot n\}\right).$$

Поскольку для любого $i$ множество $\mathrm{supp} f_i \subset S_{\lambda\cdot n}$ является конечным, то $|A| < |\lambda|$. Так как ординал $\lambda$ является регулярным, существует ординал $\gamma < \lambda$ такой, что $A \subset \bigsqcup\limits_{l=0}^{n-1} S_{[\lambda\cdot l+1, \lambda\cdot l+\gamma]}$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{supp} f_i \setminus \bigsqcup_{l=0}^{n-1} S_{[\lambda\cdot l+1, \lambda\cdot l+\gamma]} \subset \{\lambda, \lambda\cdot 2, \ldots, \lambda\cdot n\}$$

для любого $i \in \mathcal{I}$. Рассмотрим функцию $x_l \in \mathbb{R}^{S_{\lambda\cdot n}}$, определенную формулой

$$x_l(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in S_{[\lambda\cdot(l-1)+\gamma+1,\lambda\cdot l]}; \\ 0, & \text{если} \quad t \notin S_{[\lambda\cdot(l-1)+\gamma+1,\lambda\cdot l]}. \end{cases}$$

Функция $x_l$ является непрерывной. Для каждого $i \in \mathcal{I}$ функционал $f_i$ имеет вид

$$f_i = \alpha_1 \cdot \delta_{t_1} + \alpha_2 \cdot \delta_{t_2} + \ldots + \alpha_j \cdot \delta_{t_j} + \alpha_0 \cdot \delta_{\lambda\cdot l},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ отличны от нуля, а $\alpha_0$ может равняться нулю. Так как

$$\mathrm{supp} f_i \cap S_{[\lambda\cdot(l-1)+\gamma+1,\lambda\cdot l]} \subset \{\lambda \cdot l\},$$

то $f_i(x_l) = \alpha_0 \cdot x_l(\lambda \cdot l) = \alpha_0$ и $f_i(\chi_{\lambda\cdot l}) = \alpha_0 \cdot \chi_{\lambda\cdot l}(\lambda \cdot l) = \alpha_0$ для любого $i \in I$. Следовательно, $\chi_{\lambda\cdot l} \in E$. Включение $C_p(S_{\lambda\cdot n}) \subset E$ очевидно. Следовательно,

$$M_{\lambda\cdot n} = C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \mathrm{span}\{\chi_{\lambda\cdot 1}, \ldots, \chi_{\lambda\cdot n}\} \subset E.$$

Для доказательства обратного включения предположим, что существует $g \in E$, но $g \notin C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_n}\}$. В этом случае функция $g$ разрывна в некоторой точке $t \notin \{\lambda, \lambda \cdot 2, \ldots, \lambda \cdot n\}$. Значит, либо $t \in Y_\gamma = (0, 1]$ либо $t = \lambda \cdot l + \gamma$, где $l = 0, \ldots, n-1$ и $\gamma < \lambda$ – предельный ординал. Если $t \in Y_\gamma = (0, 1]$, то существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $t_n \to t$ такие, что

$$|g(t_n) - g(t)| \geq \varepsilon_0. \tag{2.7}$$

Если $t = \lambda \cdot l + \gamma$, то в любой окрестности $O_\xi(t) = (\xi, \lambda \cdot l + \gamma]$, где $\xi < \lambda \cdot l + \gamma$ найдется точка $t_\xi \in O_\xi(t)$ такая, что

$$|g(t_\xi) - g(t)| \geq \varepsilon_0 \tag{2.8}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим последовательность функционалов

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\ f_n = \delta_{t_n} - \delta_t,\ \text{если}\, t \in Y_\gamma = (0,1]$$

и семейство функционалов

$$\{f_\xi : \xi < \lambda \cdot l + \gamma\},\ f_\xi = \delta_{t_\xi} - \delta_t,\ \text{если}\, t = \lambda \cdot l + \gamma.$$

Для любой непрерывной функции $x \in C_p(S_{\lambda \cdot n})$ выполнены условия $|x(t_n) - x(t)| < \varepsilon_0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ или $|x(t_\xi) - x(t)| < \varepsilon_0$ для некоторого $\xi < \lambda \cdot l + \gamma$, т. е. $|f_n(x)| < \varepsilon_0$ или $|f_\xi(x)| < \varepsilon_0$. Так как $|f_n(g)| \geq \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $|f_\xi(g)| \geq \varepsilon_0$ для всех $\xi < \lambda \cdot l + \gamma$, то в силу неравенств (2.7) и (2.8) функция $g \notin E$. Таким образом, равенство (2.19) доказано.

Докажем равенство (2.5). Пусть $y \in M_{\lambda \cdot n}$. Рассмотрим произвольное семейство функционалов $\{g_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset L_p(S_{\lambda \cdot m})$, $|\mathcal{I}| < |\lambda|$. Поскольку $y \in M_{\lambda \cdot n}$, то для семейства функционалов $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}} = \{\widetilde{T}^* g_i\}_{i \in \mathcal{I}} \in L_p(S_{\lambda \cdot n})$ существует непрерывная функция $x \in C_p(S_{\lambda \cdot n})$ такая, что

$$(\widetilde{T}^* g_i)(x) = (\widetilde{T}^* g_i)(y)$$

для любого $i \in \mathcal{I}$. Отсюда, по определению отображения $T^*$ получаем, что

$$g_i(\widetilde{T} x) = g_i(\widetilde{T} y)$$

для любого $i \in \mathcal{I}$. Так как $\widetilde{T} x = T x \in C_p(S_{\lambda \cdot m})$, то $\widetilde{T} y \in M_{\lambda \cdot m}$. Значит, $\widetilde{T}(M_{\lambda \cdot n}) \subset M_{\lambda \cdot m}$. Аналогично доказывается обратное включение, если в доказательстве вместо отображения $\widetilde{T}^*$ рассмотреть отображение

$$(\widetilde{T}^*)^{-1} = (\widetilde{T}^{-1})^* : L_p(S_{\lambda \cdot n}) \longrightarrow L_p(S_{\lambda \cdot m}).$$

Из равенства (2.5) имеем

$$M_{\lambda\cdot m} = \widetilde{T}(M_{\lambda\cdot n}) = \widetilde{T}(C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_n}\})$$

$$= \widetilde{T}(C_p(S_{\lambda\cdot n})) \oplus \widetilde{T}(\mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_n}\}) \sim C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \widetilde{T}(\mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_n}\})$$

$$= C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \mathrm{span}\{\widetilde{T}(\chi_{\lambda_1}), \dots, \widetilde{T}(\chi_{\lambda_n})\}.$$

С другой стороны, по определению

$$M_{\lambda\cdot m} = C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_m}\}.$$

Из последних двух равенств, учитывая, что все дополнения к пространству $C_p(S_{\lambda\cdot m})$ в пространстве $M_{\lambda\cdot m}$ являются алгебраически изоморфными, заключаем что

$$\mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_m}\} \sim \mathrm{span}\{\widetilde{T}(\chi_{\lambda_1}), \dots, \widetilde{T}(\chi_{\lambda_n})\}.$$

Но это невозможно, так как $n > m$ и функции $\widetilde{T}(\chi_{\lambda_1}), \dots, \widetilde{T}(\chi_{\lambda_n})$ линейно независимы в $m$–мерном пространстве $\mathrm{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_m}\}$.

$\square$

Пусть $Y_\gamma$ – семейство попарно непересекающихся топологических пространств и $Y = \bigoplus\limits_{\gamma\in A} Y_\gamma$ – их топологическая сумма. Тогда известно, что

$$C_p(\bigoplus_{\gamma\in A} Y_\gamma) \sim \prod_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma).$$

**Определение 2.1.** *Произведением пространств $C_p(Y_\gamma)$ по типу $c_0$ называется подпространство*

$$\left\{ g = \{g_\gamma\}_{\gamma\in A} \in \prod_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma) : \forall\epsilon > 0 \text{ мн-во } \{\gamma : \sup_{t\in Y_\gamma} |g_\gamma(t)| \geq \epsilon\} \text{ конечно} \right\}$$

*в произведении $\prod\limits_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma)$. Будем обозначать его через $(\prod\limits_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma))_{c_0}$.*

Из этого определения следует, что для любого элемента $g \in (\prod\limits_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma))_{c_0}$ множество $\{\gamma : \sup\limits_{t\in Y_\gamma} |g_\gamma(t)| \neq 0\}$ счетно.

Нетрудно видеть также, что $(\prod\limits_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma))_{c_0}$ – линейное подпространство в $\prod\limits_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma)$ и

$$(\prod_{\gamma\in A} C_p(Y_\gamma))_{c_0} \sim \left\{ g \in C_p(\bigoplus_{\gamma\in A} Y_\gamma) : \forall\epsilon > 0 \ \{\gamma : \sup_{t\in Y_\gamma} |g(t)| \geq \epsilon\} \text{ конечно} \right\}.$$

Если $M_\gamma \subset C_p(X)$ для любого $\gamma \in A$, то произведение $(\prod_{\gamma\in A} M_\gamma)_{c_0}$ определяется аналогично 2.1.

Отметим некоторые свойства пространства $S_\alpha$ и $C_p(S_\alpha)$.

**Предложение 2.1.** *Для пространств $S_\alpha$ и $C_p(S_\alpha)$ справедливы следующие свойства:*

*1. Любой компакт в пространстве $S_\alpha$ подобен некоторому отрезку ординалов $[1, \eta]$ и отображение подобия является гомеоморфизмом;*

*2. Если $K$ – непустой компакт в пространстве $S_\alpha$, то существует непрерывная ретракция $r : S_\alpha \to K$;*

*3. Если $X$ – дополняемое подпространство в $C_p(S_\alpha)$, то все дополнения к пространству $X$ линейно гомеоморфны.*

**Доказательство.** Докажем, первое свойство. Пусть $K$ – компакт в $S_\alpha$. Поскольку $S_\alpha$ – линейно упорядоченное множество, то и $K \subset S_\alpha$ также является линейно упорядоченным множеством. Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset K$ и покажем, что $A$ имеет минимальный элемент. Положим $\gamma_0 = min\{\gamma \in [1, \alpha] : A \cap Y_\gamma \neq \varnothing\}$. Если $\gamma_0$ – предельный ординал из отрезка $[1, \alpha]$, то $Y_{\gamma_0} = \gamma_0$ и $\gamma_0$ – минимальный элемент множества $A$. Если $\gamma_0$ – непредельный ординал, то есть $\gamma_0 = \xi + 1$ для некоторого $\xi \in [1, \alpha]$, то $Y_{\xi+1} = (0, 1]$ и $K \cap Y_{\xi+1}$ – счетный компакт. Если множество $A \cap Y_{\xi+1}$ не имеет минимального элемента, то существует последовательность $t_1 > t_2 > \ldots > t_n > \ldots$, $t_n \in A \cap Y_{\xi+1}$, не имеющая предельной точки в $K$, что противоречит компактности $K$. Таким образом $K$ – вполне упорядоченное подмножество линейно упорядоченного множетства $S_\alpha$ и, значит, существует отображение подобия $\varphi : K \to [1, \eta]$, где $\eta$ – некоторый ординал. Отображение $\varphi$ является непрерывным. Действительно, если точка $t_0 \in K$ и $t_0$ не является изолированной в $K$, то существует последовательность $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$, $t_n \in K$, $t_n \to t_0$. Поскольку $\varphi$ – подобие, то $\varphi(t_1) < \varphi(t_2) < \ldots < \varphi(t_n) < \ldots < \varphi(t_0)$. Если $\gamma_0 = \sup_n \varphi(t_n) < \varphi(t_0)$, то мы получаем противоречие с тем, что отрезок $[\varphi^{-1}(\gamma_0), t_0]$ содержит точку $t_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, но $\varphi(t_n) \notin [\gamma_0, \varphi(t_0)]$. Следовательно, $\sup_n \varphi(t_n) = \varphi(t_0)$, то есть $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$ в пространстве $[1, \eta]$. Поскольку $K$ – компакт и отображение $\varphi$ – непрерывная биекция, то $\varphi$ – гомеоморфизм $K$ на отрезок ординалов $[1, \eta]$.

Докажем свойство 2. Для произвольного непустого компакта $K \subset S_\alpha$ определим ретракцию $r : S_\alpha \to K$ по формуле

$$r(t) = \begin{cases} t, \text{ если } t \in K; \\ \min\{k \in K : k >_\alpha t\}, \text{ если } t \notin K \text{ и } t < k_0 = \max\{k : k \in K\}; \\ k_0, \text{ если } t \notin K \text{ и } t > k_0 = \max\{k : k \in K\}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что отображение $r$ – непрерывно и $r^2 = r$.

Докажем свойство 3.

Рассмотрим операторы $(I - P)|_M : M \to N$ и $(I - Q)|_N : N \to M$ и покажем, что

$$((I - P) \circ (I - Q))|_N = I_N$$

и

$$((I - P) \circ (I - Q))|_M = M.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(I-P)|_M \circ (I-Q)|_N(n) = (I-P)(n-Q_n) = n-Qn-Pn+(P \circ Q)n = n-Qn.$$

Так как $P_n = 0, Q_n \in X$ и, значит, $P(Q_n) = Q_n$, получаем, что

$$((I - P) \circ (I - Q))(n) = n.$$

Второе равенство доказывается аналогично. Из этих равенств следует, что отображение $(I - P)|_M$ является непрерывной линейной биекцией подпространства $M$ на подпространство $N$ и $((I - P)|_M)^{-1} = (I - Q)|_N$, то есть пространства $M$ и $N$ линейно гомеоморфны.

$\square$

**Теорема 2.2.** *Пусть $\omega_1 \leq \alpha < \beta$. Пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.*

**Доказательство.** `Необходимость.` Пусть $T$ – линейный гомеоморфизм пространства $C_p(S_\alpha)$ на пространство $C_p(S_\beta)$, где $\alpha < \beta$. Предположим, что пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ не являются линейно гомеоморфными. Отождествляя точку $t = 1 \in Y_\gamma$ с точкой $\gamma$, можно считать, что компакт $[1, \beta] \subset S_\beta$. Положим $L = \overline{\mathrm{supp}[1, \beta]} \subset S_\alpha$, где $\mathrm{supp}[1, \beta] = \bigcup\limits_{\gamma \in [1, \beta]} \mathrm{supp} T^* \delta_\gamma$. Известно [3], что подмножество $L \subset S_\alpha$ является компактом и обладает свойством:

$$\text{если } f\Big|_L = 0, \text{то } Tf\Big|_{[1,\beta]} = 0. \tag{2.9}$$

Поскольку компакт $L$ является вполне упорядоченным множеством в пространстве $S_\alpha$ и, значит, подобен некоторому отрезку ординалов $[1, \eta]$. В силу компактности $L$, отображение подобия является гомеоморфизмом компакта $L$ и отрезка ординалов $[1, \eta]$, наделенного порядковой топологией. Следовательно,

$$C_p[1, \eta] \sim C_p(L). \tag{2.10}$$

Поскольку компакты в пространстве $S_\alpha$ являются ретрактами, то существует непрерывный оператор продолжения $U : C_p(L) \to C_p(S_\alpha)$, действующий по формуле $Ux = x \circ r$ для любого $x \in C_p(L)$. Это означает, что пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ можно представить в виде

$$C_p(S_\alpha) = C_p^0(S_\alpha, L) \times C_p(L) \text{ и } C_p(S_\beta) = C_p^0(S_\beta, [1, \beta]) \times C_p[1, \beta],$$

где $C_p^0(S_\alpha, L)$ – подпространство всех непрерывных функций $x \in C_p(S_\alpha, L)$ таких, что $x\big|_L \equiv 0$. В силу свойства (2.9), пространство $T(C_p^0(S_\alpha, L))$ содержится в пространстве $C_p^0(S_\beta, [1, \beta])$. Кроме того, отображение $P : C_p(S_\alpha) \to C_p^0(S_\alpha, L)$, действующее по формуле $Px = x - U(x|_L) = x - x|_L \circ r$ является непрерывным проектором. Следовательно, пространство $C_p^0(S_\alpha, L)$ является дополняемым в пространстве $C_p(S_\alpha)$, а, значит, и пространство $T(C_p^0(S_\alpha, L))$ является дополняемым в пространстве $C_p^0(S_\beta, [1, \beta])$. Следовательно, существует замкнутое подпространство $Z \subset C_p^0(S_\beta, [1, \beta])$ такое, что

$$C_p^0(S_\beta, [1, \beta]) \sim T(C_p^0(S_\alpha, L)) \times Z.$$

Отсюда получаем, что

$$C_p(S_\beta) \sim C_p^0(S_\beta, [1, \beta]) \times C_p[1, \beta] \sim T(C_p^0(S_\alpha, L)) \times Z \times C_p[1, \beta]. \quad (2.11)$$

С другой стороны

$$C_p(S_\beta) = T(C_p(S_\alpha)) \sim T(C_p^0(S_\alpha, L)) \times T(C_p(L)). \quad (2.12)$$

Поскольку все дополнения к пространству $T(C_p^0(S_\alpha, L))$ в $C_p(S_\beta)$ линейно гомеморфны, из формул (2.10), (2.11) и (2.12) получаем

$$C_p[1, \eta] \sim C_p(L) \sim T(C_p(L)) \sim Z \times C_p[1, \beta]. \quad (2.13)$$

Таким образом, пространство $C_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфно дополняемому подпространству в $C_p[1, \eta]$.

Докажем, что если $L \subset S_\alpha$ и $L$ гомеоморфно $[1,\eta]$, то $C_p[1,\eta]$ дополняемо вкладывается в $C_p[1,\alpha]$. Действительно, согласно [7] ординалы $\alpha$ и $\eta$ можно представить в виде

$$\alpha = \omega^\delta \cdot n + \rho,\ \text{где}\, \rho < \omega^\delta \,\text{и}\ \eta = \omega^\xi \cdot k + r,\ \text{где}\, r < \omega^\xi.$$

По лемме 1

$$L^{(\delta)} \subset [1,\alpha]^{(\delta)} = \{\omega^\delta, \omega^\delta \cdot 2, \dots, \omega^\delta \cdot n\}, \tag{2.14}$$

т.е. $L^{(\delta)}$ – конечное подмножество, состоящее не более чем из $n$ точек, возможно пустое. Поскольку $\eta = \omega^\xi \cdot k + r$, то $[1,\eta]^{(\xi)} = \{\omega^\xi, \omega^\xi \cdot 2, \dots, \omega^\xi \cdot k\}$. Отсюда, если $[1,\eta]^{(\delta)} = \emptyset$, то $\xi < \delta$ и, следовательно, $\eta < \alpha$ и, значит, $C_p[1,\eta]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p[1,\alpha]$.

Если же $[1,\eta]^{(\delta)}$ состоит из конечного числа точек, то это означает, что $\delta = \xi$. Поскольку $[1,\eta]^{(\delta)} = [1,\eta]^{(\xi)}$ состоит из $k$ точек и $L^{(\delta)} \sim [1,\eta]^{(\delta)}$, то из равенства (2.14) получаем, что $k \le n$. Следовательно, пространство $C_p[1,\omega^\xi \cdot k]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p[1,\alpha]$. Поскольку $C_p[1,\omega^\xi \cdot k] \sim C_p[1,\eta]$, то получаем, что $C_p[1,\eta]$ дополняемо вкладывается в $C_p[1,\alpha]$.

Таким образом, учитывая формулу (2.13), получаем, что пространство $C_p[1,\beta]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p[1,\alpha]$. Поскольку $\alpha < \beta$, пространство $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфно дополняемому подпространству в $C_p[1,\beta]$.

Поскольку каждое из пространств $C_p[1,\alpha]$ и $C_p[1,\beta]$ гомеоморфмно подпространству другого, то

$$|[1,\alpha]| = w(C_p[1,\alpha]) = w(C_p[1,\beta]) = |[1,\beta]|. \tag{2.15}$$

Обозначим через $\lambda$ – начальный ординал, для которого $|\lambda| = |\alpha|$. Тогда, $\lambda \le \alpha < \beta < \lambda_+$, где $\lambda_+$ – наименьший начальный ординал, превосходящий $\lambda$. Далее рассмотрим три возможных случая.

1. $\lambda$ – сингулярный ординал. В этом случае, как доказано в работе [5], пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфны своим квадратам. Отсюда следует

$$C_p[1,\alpha] \sim C_p[1,\beta] \times N \sim C_p[1,\beta] \times C_p[1,\beta] \times N \sim C_p[1,\beta] \times C_p[1,\alpha]$$

и

$$C_p[1,\beta] \sim C_p[1,\alpha] \times M \sim C_p[1,\alpha] \times C_p[1,\alpha] \times M \sim C_p[1,\beta] \times C_p[1,\alpha].$$

Применяя схему разложения Пелчинского [10], получаем, что пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ являются линейно гомеоморфными.

2. $\lambda$ – регулярный ординал и $\beta \geq \lambda \cdot \omega$. Тогда из результатов работы [5] следует, что

$$C_p[1,\beta] \sim C_p[1,\beta \cdot \omega] \sim (\prod_{\aleph_0} C_p[1,\beta])_{c_0}.$$

Поскольку $C_p[1,\beta \cdot \omega]$ линейно гомеоморфно своему счетному $c_0$–произведению $(\prod_{\aleph_0} C_p[1,\beta])_{c_0}$, которое мы обозначаем $c_0(C_p[1,\beta])$, следовательно, изоморфно своему квадрату.

$$C_p[1,\beta] \sim c_0(C_p[1,\beta]) \sim (C_p[1,\alpha] \times M) \sim c_0(C_p[1,\alpha]) \times c_0(M).$$

Значит,

$$C_p[1,\beta] \sim c_0(C_p[1,\beta]) \sim (C_p[1,\alpha] \times M)$$
$$\sim C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p[1,\alpha]) \times c_0(M) \sim C_p[1,\beta] \times C_p[1,\alpha]$$

С другой стороны,

$$C_p[1,\alpha] \sim C_p[1,\beta] \times N \sim C_p[1,\beta] \times C_p[1,\beta] \times N \sim C_p[1,\beta] \times C_p[1,\alpha]$$

Получаем, что пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ являются линейно гомеоморфными.

3. $\lambda$ – регулярный ординал и $\beta < \lambda \cdot \omega$, т.е. $\beta = \lambda \cdot k + \rho$, $\rho < \lambda$. Поскольку $\lambda \leq \alpha < \beta$, то $\alpha = \lambda \cdot m + r$, где $m < k$ или $m = k$ и $r < \rho$. Так как

$$C_p(S_\alpha) = C_p(S_{\lambda \cdot m + r}) \sim C_p(S_{\lambda \cdot m}) \text{ и } C_p(S_\beta) = C_p(S_{\lambda \cdot k + \rho}) \sim C_p(S_{\lambda \cdot k})$$

и по условию теоремы $C_p(S_\alpha) \sim C_p(S_\beta)$, то по теореме 2 получаем, что $k = m$. Следовательно, пространства $C_p[1, \beta]$ и $C_p[1, \alpha]$ являются линейно гомеоморфными.

`Достаточность.` Пусть пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ являются линейно гомеоморфными. Ранее доказано, что

$$C_p(S_\alpha) \sim C_p[1, \alpha] \times C_p^0(S_\alpha, [1, \alpha]) \sim C_p[1, \alpha] \times \left( \prod_{0 \leq \gamma < \alpha} C_p^0(Y_{\gamma+1}) \right)_{c_0},$$

где

$$C_p^0(Y_{\gamma+1}) = \{x \in C_p(Y_{\gamma+1}) : x(1) = 0\}.$$

Аналогично

$$C_p(S_\beta) \sim C_p[1, \beta] \times \left( \prod_{0 \leq \delta < \beta} C_p^0(Y_{\delta+1}) \right)_{c_0}.$$

Так как по условию пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны и в силу (2.15)

$$\left( \prod_{0 \leq \gamma < \alpha} C_p^0(Y_{\gamma+1}) \right)_{c_0} = \left( \prod_{0 \leq \delta < \beta} C_p^0(Y_{\delta+1}) \right)_{c_0},$$

то получаем, что пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ являются линейно гомеоморфными.

□

**Теорема 2.3.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ счетные или конечные ординалы. Тогда пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ являются линейно гомеоморфными.*

**Доказательство.** Пусть $\alpha$ – счетный ординал. Разложим пространство $C_p(S_\alpha)$ следующим образом:

$$C_p(S_\alpha) \sim C_p[1,\alpha] \times \left\{ \prod_{0\le\gamma<\alpha} C_p^0(Y_{\gamma+1}) \right\}_{c_0} = C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p^0(0,1]),$$

где $C_p^0(0,1] = \{x \in C_p(0,1] : x(1) = 0\}$ и $c_0(C_p^0(0,1]) = (C_p^0(0,1] \times C_p^0(0,1] \times \ldots \times C_p^0(0,1] \times \ldots)_{c_0}$.

Пространство $c_0(C_p^0(0,1])$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(S_\alpha)$. Для любого счетного ординала $\alpha$ отрезок ординалов $[1,\alpha]$ гомеоморфен некоторому компакту $K_\alpha$ на отрезке $(0,1]$ с топологией Зоргенфрея и существует ретракция $r : [1,\alpha] \to K_\alpha$. Отсюда следует, что пространство $C_p[1,\alpha]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(0,1]$, то есть

$$C_p(0,1] \sim C_p[1,\alpha] \times C_p^0((0,1],K_\alpha), \tag{2.16}$$

где $C_p^0((0,1],K_\alpha) = \{x \in C_p(0,1] : x|_{K_\alpha} = 0\}$.

Значит,

$$c_0(C_p^0(0,1]) \sim c_0(C_p[1,\alpha]\times C_p^0((0,1],K_\alpha)) = c_0(C_p[1,\alpha])\times c_0(C_p^0((0,1],K_\alpha))$$

$$\sim C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p[1,\alpha]) \times c_0(C_p^0((0,1],K_\alpha)) \sim C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p(0,1])$$

$$\sim C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p(0,1]) \times c_0(C_p(0,1]) \sim C_p(S_\alpha) \times c_0(C_p(0,1].$$

С другой стороны

$$C_p(S_\alpha) \sim C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p(0,1]) \sim C_p[1,\alpha] \times c_0(C_p(0,1]) \times c_0(C_p(0,1])$$

$$\sim C_p(S_\alpha) \times c_0(C_p(0,1])$$

Таким образом, пространства $C_p(S_\alpha)$ и $c_0(C_p^0(0,1])$ линейно гомеоморфны.

Аналогично, $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфно $c_0(C_p^0(0,1])$. Следовательно, $C_p(S_\alpha) \sim C_p(S_\beta) \sim C_p(S_\omega)$.

Нетрудно видеть, что пространство $S_\omega$ гомеоморфно полуинтервалу $(0,1]$ с топологией Зоргенфрея и в силу [20] получаем, что $S_\alpha$ гомеоморфно $S$. Отсюда следует, что для произвольного счетного ординала $\alpha$ пространства $C_p(S_\alpha)$, $C_p(S_\omega)$ и $C_p(S)$ линейно гомеоморфны.

Если $\alpha$ – конечный ординал, то пространства $S_\alpha$ и $(0,1]$ гомеоморфны и в силу [20] получаем, что $S_\alpha$ гомеоморфно $S$. Отсюда следует, что пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S)$ линейно гомеоморфны.

$\square$

**Теорема 2.4.** *Пусть $\omega_1 \le \alpha < \beta$. Пространства $S_\alpha$ и $S_\beta$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны отрезки ординалов $[1,\alpha]$ и $[1,\beta]$.*

**Доказательство.** Если отрезки ординалов $[1,\alpha]$ и $[1,\beta]$ гомеоморфны, то нетрудно видеть, что пространства $S_\alpha$ и $S_\beta$ гомеоморфны.

Пусть $S_\alpha$ и $S_\beta$ гомеоморфны и $\varphi : S_\alpha \to S_\beta$ – гомеоморфизм. Предположим, что отрезки ординалов $[1,\alpha]$ и $[1,\beta]$ не гомеоморфны. В силу предложения 1.1 можно считать, что $\alpha = \omega^\delta \cdot n$, $\beta = \omega^\gamma \cdot m$, $\gamma \ge \delta$. Если $\gamma > \delta$, то производная порядка $\gamma$, $[1,\beta]^{(\gamma)} = \{\omega^\gamma, \dots, \omega^\gamma \cdot m\}$ в $(\varphi[1,\beta])^{(\gamma)}$ конечна и не пуста. С другой стороны по лемме 2.1 $(\varphi[1,\beta])^{(\gamma)} \subset [1,\alpha]^{(\gamma)} = [1,\omega^\delta \cdot n]^{(\gamma)} = \emptyset$. Таким образом, получили противоречие. Если $\delta = \gamma$ и $m > n$, то

$$(\varphi[1,\beta])^{(\gamma)} \subset [1,\alpha]^{(\gamma)} = [1,\alpha]^{(\delta)} = \{\omega^\delta, \dots, \omega^{\cdot} n\},$$

но это невозможно, так как $(\varphi[1,\beta])^{(\gamma)} = \varphi[1,\beta]^{(\gamma)}$ – это множество, состоящее из $m$ точек.

$\square$

Рассмотрим теперь пространства непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» $S_\alpha$ с топологией компактной сходимости. База окрестностей нуля в пространстве $C_c(S_\alpha)$ задается следующим образом:

$$U(0, K, \varepsilon) = \{x \in C(S_\alpha) : |x(t)| < \varepsilon, \forall t \in K\}.$$

Как следует из следующей теоремы, классификация пространств $C_c(S_\alpha)$ совпадает с классификацией нормированных пространств $C[1, \alpha]$ с нормой $\|y\| = \max_{t \in [1,\alpha]} |y(t)|$. Заметим, что если $K$ – компакт, то вместо обозначения $C_c(K)$ используют обозначение $C(K)$.

**Теорема 2.5.** *Пусть $\omega_1 \le \alpha < \beta$. Тогда пространства $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S_\beta)$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $C[1, \alpha]$ и $C[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.*

**Доказательство.** Предположим, что пространства $C[1, \alpha]$ и $C[1, \beta]$ линейно гомеоморфны. Тогда,

$$C_c(S_\alpha) \sim C[1, \alpha] \times C_c^0(S_\alpha, [1, \alpha]) \sim C[1, \alpha] \times (\prod_{0 \le \gamma < \alpha} C_c(Y_\gamma))_{c_0}$$

и

$$C_c(S_\beta) \sim C[1, \beta] \times C_c^0(S_\alpha, [1, \beta]) \sim C[1, \beta] \times (\prod_{0 \le \gamma < \beta} C_c(Y_\gamma))_{c_0}.$$

Так как пространства $C[1, \alpha]$ и $C[1, \beta]$ линейно гомеоморфны, то $|\alpha| = |\beta|$ и, следовательно,

$$(\prod_{0 \le \gamma < \beta} C_c(Y_\gamma))_{c_0} = (\prod_{0 \le \gamma < \alpha} C_c(Y_\gamma))_{c_0}.$$

Таким образом, пространства $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S_\beta)$ линейно гомеоморфны.

Пусть теперь существует гомеоморфизм $\varphi : C_c(S_\alpha) \to C_c(S_\beta)$. В пространстве $C_c(S_\beta)$ для любой окрестности

$$U = U(0, [1, \beta], \varepsilon) = \{x \in C_c(S_\beta) : |x(t)| < \varepsilon, \forall t \in [1, \beta]\}$$

существует окрестность $V = V(0, L, \delta) \subset C_c(S_\alpha)$ такая, что $\varphi(V) \subset U$. Нетрудно видеть,что если $x \in C_c(S_\alpha)$ и $x|_L \equiv 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ $n \cdot x \in V$. Следовательно, $\varphi(n \cdot x) \in U$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, значит, $\varphi x|_{[1,\beta]} \equiv 0$. Отсюда следует, что

$$\varphi(C_c^0(S_\alpha, L)) \subset C_c^0(S_\beta, [1, \beta]) \tag{2.17}$$

В силу того, что пространство $L$ является ретрактом и, значит, существует отператор продолжения $T : C(L) \to C_c(S_\alpha)$, пространство $C_c(S_\alpha)$ можно представить в следующем виде

$$C_c(S_\alpha) \sim C(L) \times C_c^0(S_\alpha, L). \tag{2.18}$$

Из 2.17 и 2.18 следует, что пространство $\varphi(C_c^0(S_\alpha, L))$ является дополняемым подпространством в $C_c^0(S_\beta, [1, \beta])$, то есть

$$C_c^0(S_\beta, [1, \beta]) \sim \varphi(C_c^0(S_\alpha, L)) \times Z$$

и

$$C_c(S_\beta) \sim C[1, \beta] \times C_c^0(S_\beta, [1, \beta]) \sim C[1, \beta] \times \varphi(C_c^0(S_\alpha, L)) \times Z$$

То есть $C[1, \beta] \times Z$ – дополнение к $\varphi(C_c^0(S_\alpha, L))$ и, следовательно, $\varphi^{-1}(C[1, \beta] \times Z)$ дополнение к $C_c^0(S_\alpha, L)$. Так как все дополнения к пространству $C_c^0(S_\alpha, L)$ линейно гомеоморфны, то $C(L) \sim \varphi^{-1}(C[1, \beta] \times Z)$. Отсюда следует, что прострaство $\varphi^{-1}(C[1, \beta])$ дополняемо в пространстве $C(L)$. Поскольку компакт $L$ гомеоморфен отрезку ординалов $[1, \eta]$ и пространство $C[1, \eta]$ дополняемо в пространстве $C[1, \alpha]$. Следовательно, пространство $C(L)$ дополняемо в пространстве $C[1, \alpha]$. Таким образом пространство $C[1, \beta]$ дополняемо вкладывается в пространство $C[1, \alpha]$, $\alpha < \beta$. Но это в силу [6] возможно лишь в случае если пространства $C[1, \alpha]$ и $C[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.

$\square$

**Теорема 2.6.** *Пусть $\alpha < \omega_1 \leq \beta$. Тогда пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ не являются линейно гомеоморфными.*

**Доказательство.** Предположим, что существует линейный гомеоморфизм $T : C_p(S_\beta) \to C_p(S_\alpha)$.

Поскольку пространства $C_p(S_\beta)$ и $C_p(S_\alpha)$ всюду плотны в пространствах $\mathbb{R}^{S_\beta}$ и $\mathbb{R}^{S_\alpha}$ соотвественно, то линейный гомеоморфизм $T$ может быть продолжен до линейного гомеморфизма $\widetilde{T}$ пространства $\mathbb{R}^{S_\beta}$ на пространство $\mathbb{R}^{S_\alpha}$ [[17], стр. 654]

$$\widetilde{T} : \mathbb{R}^{S_\beta} \longrightarrow \mathbb{R}^{S_\alpha}.$$

Пусть

$$M_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^\beta : \forall \{f_i\}_{i=1}^\infty \subset L_p(S_\beta)$$
$$\exists\, x \in C_p(S_\beta)\,\text{такой, что}\, f_i(x) = f_i(y)\ \forall i \in \mathbb{N}\}. \quad (2.19)$$

Поскольку $S_\alpha$ – пространство с первой аксиомой счетности, то $M_\alpha = C_p(S_\alpha)$, а $M_\beta \supsetneqq C_p(S_\beta)$. Так как при линейном гомеоморфизме пространство $\widetilde{T}(M_\beta)$ переходит на пространство $M_\alpha = C_p(S_\alpha)$, то получаем противоречие с иньективностью оператора $\widetilde{T}$, так как $\widetilde{T}(C_p[1,\beta]) = T(C_p[1,\beta]) = C_p(S_\alpha)$.

□

Из теорем 2.2, 2.3, 2.6 получаем теорему о линейной гомеоморфной классификации пространств $C_p(S_\alpha)$.

**Теорема 2.7.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ – произвольные ординалы. Тогда*

*1. если $\alpha < \beta < \omega_1$, то пространства $C_p(S_\alpha) \sim C_p(S_\beta) \sim C_p(S)$;*

*2. если $\alpha < \omega_1 \leq \beta$, то пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ не являются линейно гомеоморфными;*

*3. если $\omega_1 \leq \alpha < \beta$. Тогда пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.*

# Глава 3

# Пространства непрерывных функций, заданные на «длинных прямых»

В данной главе проводится частичная линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых» $L_\alpha$, где $\alpha$ – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций наделяются топологией поточечной сходимости и обозначаются $C_p(L_\alpha)$.

Результаты этой главы опубликованы в [15].

Определим «длинные прямые».

**Определение 3.1.** *Пусть $\alpha$ – произвольный ординал. Рассмотрим линейное упорядочение $\leq$ на множестве $L_\alpha = [1, \alpha) \times [0, 1) \cup \{(\alpha, 0)\}$, определенное так: $(\mu_1, t_1) \leq (\mu_2, t_2)$, если $\mu_1 < \mu_2$ или $\mu_1 = \mu_2$ и $t_1 < t_2$, либо $\mu_1 = \mu_2$ и $t_1 = t_2$. Будем называть «длинной прямой» множество $L_\alpha$ с топологией, порожденной линейным упорядочением $\leq$.*

Запись $(\mu_1, t_1) < (\mu_2, t_2)$ означает, что $(\mu_1, t_1) \leq (\mu_2, t_2)$, но $(\mu_1, t_1) \neq (\mu_2, t_2)$.

Заметим, что топологическое пространство $L_\alpha$ является компактным.

**Определение 3.2.** *Будем говорить, что точка $u = (\xi, t) \subset L_\alpha$ конфи-*

*нальна ординалу $\eta$, если в интервале $((1,0),(\xi,t))$ существует конфинальное подмножество, подобное отрезку ординалов $[0,\eta)$.*

Очевидно, что если $t \neq 0$ или $\xi$ – непредельный ординал, то точка $u$ конфинальна $\omega$.

**Определение 3.3.** *Ординал $\alpha$ называется начальным, если $\alpha$ – наименьший среди всех ординалов $\lambda$ таких, что $|\lambda| = |\alpha|$.*

**Определение 3.4.** *Начальный ординал $\alpha$ называется регулярным, если не существует $\lambda < \alpha$, конфинального $\alpha$.*

**Теорема 3.1.** *Пусть $\tau$ – регулярный начальный несчетный ординал и $\alpha$, $\beta$ – начальные ординалы, такие, что $\alpha < \beta \leq \tau$. Тогда пространства $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ не линейно гомеоморфны.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

**Предложение 3.1.** *Пусть $\tau$ – регулярный начальный несчетный ординал, $\alpha \leq \tau$. Точка $u \in L_{\tau\cdot\alpha}$ конфинальна ординалу $\tau$ тогда и только тогда, когда $u$ имеет следующий вид: $u = (\tau\cdot(\gamma+1), 0)$, $0 \leq \gamma < \alpha$, если $\alpha < \tau$ и $u = (\tau\cdot\tau, 0)$ или $u = (\tau(\gamma+1), 0)$, $0 \leq \gamma < \alpha$, если $\alpha = \tau$.*

**Доказательство.** Если $0 < t < 1$, то точка $(\xi, t)$ конфинальна $\omega$ при любом $\xi$, так как $\lim_{n\to\infty}(\xi, t-\frac{1}{n}) = (\xi, t)$. Если $t = 0$, а $\xi$ – непредельный ординал, то $\lim_{n\to\infty}(\xi - 1, 1 - \frac{1}{n}) = (\xi, 0)$, значит, точка $(\xi, 0)$ также конфинальна $\omega$. Рассмотрим теперь точки вида $(\xi, 0)$, где $\xi$ – предельный ординал.

Согласно [7], ординал $\xi$ можно представить в виде $\xi = \tau\cdot\eta + \rho$, где $0 \leq \rho < \tau$, $0 \leq \eta < \alpha$ или $\xi = \tau\cdot\alpha$. Если $\rho > 0$, то ординал $\xi$ конфинален ординалу $\rho < \tau$ и, следовательно, точка $u$ конфинальна ординалу $\rho$. Если $\rho = 0$ и $\xi = \tau \cdot \eta$, где $\eta$ – предельный ординал, то $\xi$ конфинален $\eta$, где $\eta \leq \alpha < \tau$. Если $\eta$ – непредельный ординал, то есть $\eta = \gamma + 1$, то точка $u = (\tau \cdot \gamma + \tau, 0)$ конфинальна $\tau$. Итак множество точек, конфинальных $\tau$, это в точности все точки вида $(\tau \cdot (\gamma + 1), 0)$, $0 \leq \gamma < \alpha$.

Пусть теперь $\alpha = \tau$. Аналогично доказывается, что если точка $u < (\tau \cdot \tau, 0)$ и конфинальна $\tau$, то $u = (\tau \cdot (\gamma + 1), 0)$. Но в этом случае точка $u = (\tau \cdot \tau, 0)$ также конфинальна $\tau$.

$\square$

Положим $\Gamma_\alpha = \{(\tau \cdot (\gamma + 1), 0), \gamma \in [0, \alpha)\}$, если $\alpha < \tau$, $\Gamma_\tau = \{(\tau \cdot (\gamma + 1), 0), \gamma \in [0, \tau)\} \cup \{(\tau \cdot \tau, 0)\}$. Пространство $c_0(\Gamma_\alpha)$ определяется следующим образом

$$c_0(\Gamma_\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^{\Gamma_\alpha} : \{t \in \Gamma_\alpha \text{ таких, что } |x(t)| \geq \varepsilon\} \text{конечно} \, \forall \varepsilon > 0\}$$

В пространстве $\mathbb{R}^{L_{\tau \cdot \alpha}}$ рассмотрим линейное подпространство

$$M_\alpha = \Big\{ y \in \mathbb{R}^{L_{\tau \cdot \alpha}} : \forall \{f_i\}_{i \in \mathcal{I}} \in L_p(L_{\tau \cdot \alpha}) \text{ такого, что } |\mathcal{I}| < |\tau| \\ \exists x \in C_p(L_{\tau \cdot \alpha}) \text{ такой, что } f_i(x) = f_i(y) \forall i \in \mathcal{I} \Big\}.$$

Очевидно, что все непрерывные функции на $L_{\tau \cdot \alpha}$ принадлежат $M_\alpha$. Кроме того, пространству $M_\alpha$ принадлежат те разрывные функции $y$, для которых любого семейства функционалов мощности меньшей $|\tau|$, недостаточно для разделения функции $y$ и точек пространства $C_p(L_{\tau \cdot \alpha})$.

**Предложение 3.2.** *Пусть функция $y \in \mathbb{R}^{L_{\tau \cdot \alpha}}$. Следующие условия эквивалентны:*

*(1) $y \in M_\alpha$;*

*(2) функция $y$ непрерывна во всех точках $u \notin \Gamma_\alpha$ и непрерывна справа в точке $u \in \Gamma_\alpha$*

**Доказательство.** (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $y \in M_\alpha$. Предположим, что условие (2) не выполнено. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $y$ разрывна в точке $u_0 \notin \Gamma_\alpha$ и $u_0 = (\xi, 0)$. Так как $u_0 \notin \Gamma_\alpha$, то либо $\xi = \tau \cdot \gamma_0$, $\gamma_0 \leq \alpha$ и $\gamma_0$ – предельный ординал (если $\alpha = \tau$, то $\gamma_0 < \alpha$), либо $\xi = \tau \cdot \eta_0 + \gamma_0$, где $\eta_0 < \alpha$ и $0 < \gamma_0 < \tau$. В этом случае существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой окрестности $V_{\gamma,n}(u_0) = ((\tau \cdot \gamma, 0), (\tau \cdot \gamma_0, \frac{1}{n}))$, $\gamma < \gamma_0$, $n \in \mathbb{N}$ (либо $V_{\gamma,n}(u_0) = ((\tau \cdot \eta_0 + \gamma, 0), (\tau \cdot \eta_0 + \gamma_0, \frac{1}{n}))$, $1 \leq \gamma < \gamma_0$, $n \in \mathbb{N}$ в случае $\xi = \tau \cdot \eta_0 + \gamma_0$) найдется точка $u_{\gamma,n} \in V_{\gamma,n}(u_0)$ такая, что

$$|y(u_{\gamma,n}) - y(u_0)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим множество функционалов вида $f_{\gamma,n} = \delta_{u_{\gamma,n}} - \delta_{u_0}$, $\gamma < \gamma_0$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $\tau$ – начальный ординал и $\gamma_0 < \tau$, то $|\{f_{\gamma,n}, \gamma < \gamma_0, n \in \mathbb{N}\}| < \tau$ и $|f_{\gamma,n}(y)| \geq \varepsilon_0$ для всех $\gamma < \gamma_0$ и $n \in \mathbb{N}$. Если же $x$ – непрерывная функция, то существует $\gamma < \gamma_0$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $|f_{\gamma,n}(x)| < \varepsilon_0$. Следовательно, $y \notin M_\alpha$ вопреки предположению.

2. Функция $y$ разрывна в точке $u_0 \notin \Gamma_\alpha$ и $u_0 = (\xi_0, t_0)$, где $0 < t_0 < 1$. В этом случае существует последовательность точек $0 < t_n < 1$ такая, что $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, а

$$\lim_{n\to\infty} y(\xi_0, t_n) \neq y(u_0). \tag{3.1}$$

Рассмотрим счетное множество функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty = \{\delta_{(\xi_0,t_n)} - \delta_{u_0}, n \in \mathbb{N}\}$. В силу (3.1) $\lim_{n\to\infty} f_n(y) \neq 0$. Тогда как для непрерывной функции $x$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty} x(\xi_0, t_n) = x(u_0)$, то есть $f_n(x) = 0$. Это противоречит условию $y \in M_\alpha$.

3. Функция $y$ разрывна справа в точке $u_0 \in \Gamma_\alpha$, то есть $u_0 = (\tau \cdot (\gamma_0 + 1), 0)$. В этом случае найдется последовательность точек $t_n > 0$ такая,

что $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, а $\lim_{n\to\infty} y(\tau\cdot(\gamma_0+1), t_n) \neq y(u_0)$. Как и в предыдущем случае нужно рассмотреть последовательность функционалов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\delta_{(\tau\cdot(\gamma_0+1),t_n)} - \delta_{u_0},\ n \in \mathbb{N}\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Рассмотрим множество функционалов $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}} \in L_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ для которого $|\mathcal{I}| < |\tau|$. Так как $|suppf_i| < \aleph_0$ для любого $i \in \mathcal{I}$, то

$$|\bigcup_{i\in\mathcal{I}} suppf_i| < |\tau|.$$

Поскольку ординал $\tau$ неконфинален никакому ординалу, меньшему чем $\tau$, то для каждого $\gamma < \alpha$ существует ординал $\delta_\gamma$, $\tau\cdot\gamma < \delta_\gamma < \tau\cdot(\gamma+1)$ такой, что

$$((\delta_\gamma, 0), (\tau\cdot(\gamma+1), 0)) \cup (\cup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{supp} f_i) = \varnothing. \tag{3.2}$$

Рассмотрим открытое множество $G \subset L_{\tau\cdot\alpha}$,

$$G = \bigcup_{\gamma<\alpha} ((\delta_\gamma, 0), (\tau\cdot(\gamma+1), 0)).$$

Тогда на замкнутом множестве $L_{\tau\cdot\alpha} \setminus G$ функция $y|_{L_{\tau\cdot\alpha}\setminus G}$ непрерывна. Следовательно, по теореме Титце-Урысона функцию существует непрерывная функция $x \in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ такая, что $x(u) = y(u)$ для всех $u \in L_{\tau\cdot\alpha} \setminus G$.

Тогда в силу (3.2) $f_i(x) = f_i(y)$ для любого $i \in \mathcal{I}$, то есть $y \in M_\alpha$.

$\square$

Отметим некоторые свойства функций $x \in M_\alpha$

**Предложение 3.3.** *Пусть $x \in M_\alpha$. Тогда*

1. *если $u_0 = (\tau\cdot(\gamma+1), 0) \in \Gamma_\alpha$, то сущестует ординал $\eta$, $0 < \eta < \tau$ такой, что функция $x$ постоянна на интервале $((\tau\cdot\gamma+\eta, 0), (\tau\cdot(\gamma+1), 0))$ и, следовательно, существует $\lim_{u\to u_0-0} x(u) = x(u_0-0)$;*

2. *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует лишь конечное число точек* $u_0 \in \Gamma_\alpha$ *таких, что*

$$|x(u_0) - \lim_{u \to u_0 - 0} x(u)| \geq \varepsilon$$

*и, следовательно, функция* $x$ *может быть разрывна не более чем в счетном числе точек.*

**Доказательство.** Утверждение (1) следует из того, что точка $(\tau \cdot (\gamma + 1), 0) = (\tau \cdot \gamma + \tau, 0)$ не конфинальна $\omega$.

Для доказательства утверждения (2) предположим, что существует счетное число точек $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma_\alpha$ таких, что

$$|x(u_n) - \lim_{u \to u_n - 0} x(u_n)| \geq \varepsilon. \tag{3.3}$$

Пусть $u_n = (\tau \cdot (\gamma_n + 1), 0)$, $\gamma_n < \alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Так как отрезок ординалов $[1, \alpha]$ компактен, то множество ординалов $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [1, \alpha]$ имеет предельную точку $\gamma_0$, которая конфинальна $\omega$. Но тогда точка $(\tau \cdot \gamma_0, 0) \notin \Gamma_\alpha$, но функция $x$ будет в этой точке разрывна в силу неравенства (3.3). В силу предложения (3.2) это противоречит тому, что функция $x \in M_\alpha$.

□

Далее, для доказательства теоремы 3.1 мы построим подпространство $E_\alpha \subset M_\alpha$ такое, что $E_\alpha \cap C_p(L_{\tau \cdot \alpha}) = \{0\}$ и $E_\alpha$ линейно гомеоморфно $c_0(\Gamma_\alpha)$. Для этого рассмотрим функции $l_\gamma \in \mathbb{R}^{L_{\tau \cdot \alpha}}$

$$l_\gamma(u) = \begin{cases} 1 - 2t, \text{ если } u = (\tau \cdot (\gamma + 1), t) \text{ и } 0 \leq t \leq 1; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция $l_\gamma$ непрерывна во всех точках $u \in L_{\tau \cdot \alpha}$, кроме точки $u_\gamma = (\tau \cdot (\gamma + 1), 0)$ и

$$1 = l_\gamma(u_\gamma) = \lim_{u \to u_\gamma + 0} l_\gamma(u) \neq \lim_{u \to u_\gamma - 0} l_\gamma(u) = 0,$$

В сиду предложения (3.2) функции $l_\gamma \in M_\alpha$ для любого $\gamma < \alpha$. (В случае $\alpha = \tau$, $l_\tau = \chi_{(\tau\cdot\tau,0)}$.)

Для любой последовательности вещественных чисел $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$ и любой последовательности функций $\{l_\gamma\}_{i=1}^{\infty} \subset M_\alpha$ рассмотрим функцию

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot l_{\gamma_i}. \tag{3.4}$$

Так как функции

$$z_N = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot l_{\gamma_i} \in M_\alpha$$

равномерно сходятся к функции $z$, то функция $z$ непрерывна во всех точках $u \in L_{\tau\cdot\alpha}$, за исключением точек $u_{\gamma_i} = (\tau \cdot (\gamma_i + 1), 0)$, а в точках $u_{\gamma_i}$ функция $z$ непрерывна справа. Следовательно, по предложению (3.2) $z \in M_\alpha$. Поскольку точки $u_{\gamma_n}$ неконфинальны $\omega$, то

$$\lim_{u \to u_{\gamma_n} - 0} (\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot l_{\gamma_i}(u)) = \lim_{u \to u_{\gamma_n} - 0} \lambda_n \cdot l_{\gamma_n}(u) = 0 \tag{3.5}$$

Положим

$$E_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot l_{\gamma_i} : \lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0, \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [1, \alpha) \right\}.$$

(В случае $\alpha = \tau$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [1, \tau]$.) Нетрудно видеть, что $E_\alpha \subset M_\alpha$ – линейное подпространство, $E_\alpha \cap C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) = \{0\}$ и отображение $\Phi : c_0(\Gamma_\alpha) \to E_\alpha$, определенное формулой

$$\Phi(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot \chi_{u_{\gamma_i}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot l_{\gamma_i} \tag{3.6}$$

является линейным гомеоморфизмом пространства $c_0(\Gamma_\alpha)$ на $E_\alpha$.

**Предложение 3.4.** $M_\alpha = C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) \oplus E_\alpha$.

**Доказательство.** Включение $C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) \oplus E_\alpha \subset M_\alpha$ очевидно, так как оба пространства входят в $M_\alpha$.

Пусть теперь функция $x \in M_\alpha$. По предложению (3.3) существует лишь счетное число точек $u_{\gamma_i}$, в которых функция $x$ не является непрерывной, причем $u_{\gamma_i} \in \Gamma_\alpha$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и в этих точках функция $x$ непрерывна справа. Положим $\omega(x, u_{\gamma_i}) = x(u_{\gamma_i}) - \lim_{u \to u_{\gamma_i} - 0} x(u)$. Тогда по предложению (3.3) $\lim_{i\to\infty} \omega(x, u_{\gamma_i}) = 0$ и, следовательно, функция $z = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(x, u_{\gamma_i}) \cdot l_{\gamma_i} \in M_\alpha$. Рассмотрим функцию

$$y = x - \sum_{i=1}^{\infty} \omega(x, u_{\gamma_i}) \cdot l_{\gamma_i} = x - z$$

В силу равенства (3.5)

$$\lim_{u \to u_{\gamma_n} - 0} y(u) = \lim_{u \to u_{\gamma_n} - 0} x(u),$$

а

$$y(u_{\gamma_n}) = x(u_{\gamma_n}) - \omega(x, u_{\gamma_n}) l_{\gamma_n}(u_{\gamma_n})$$

$$= x(u_{\gamma_n}) - (x(u_{\gamma_n}) - \lim_{u \to u_{\gamma_n} - 0} x(u)) = \lim_{u \to u_{\gamma_n} - 0} x(u),$$

то есть функция $y$ непрерывна слева в точках $u_{\gamma_n}$. Поскольку функция $y \in M_\alpha$ и непрерывна слева в точках $u_{\gamma_n}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что $y \in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$. Итак, $x = y + z$, где $y \in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, а $z \in E_\alpha$. Единственность такого представления следует из того, что $C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) \cap E_\alpha = \{0\}$.

□

Далее перейдем к доказательству теоремы 3.1.

**Доказательство.** Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует линейный гомеоморфизм $T$ пространства $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ на пространство $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, $\beta > \alpha$. Поскольку пространства $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ и $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ всюду плотны в пространствах $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ и $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\beta}}$ соответственно, то линейный гомеоморфизм $T$ может быть продолжен до линейного гомеоморфизма $\tilde{T}$ пространства $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\beta}}$ на пространство $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$

[17]. Известно [2], что сопряженным к пространствам $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и $\mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$ является пространство $L_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ состоящее из функционалов вида

$$f = p_1 \cdot \delta_{t_1} + p_2 \cdot \delta_{t_2} + \ldots + p_n \cdot \delta_{t_n},$$

где $p_k \in \mathbb{R} \setminus 0$ и $\delta_{t_k}(x) = x(t_k)$ для любого $x \in \mathbb{R}^{L_{\tau\cdot\alpha}}$, $k = 1, \ldots, n$. Покажем, что $\tilde{T}(M_\beta) = M_\alpha$. Пусть функция $y \in M_\beta$. Рассмотрим произвольное семейство функционалов $\{g_i\}_{i\in I} \in L_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, где $|\mathcal{I}| < |\tau|$. По определению множества $M_\beta$ для семейства функционалов $\{f_i\}_{i\in\mathcal{I}} = \{\tilde{T}^* g_i\}_{i\in\mathcal{I}} \in L_p(L_{\tau\cdot\beta})$ существует непрерывная функция $x \in C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ такая, что

$$(\{\tilde{T}^* g_i\})(x) = (\{\tilde{T}^* g_i\})(y)$$

для любого $i \in \mathcal{I}$. Отсюда, по определению отображения $\tilde{T}^* : L_p(L_{\tau\cdot\alpha}) \to L_p(L_{\tau\cdot\beta})$ получаем, что $g_i(\tilde{T}(x)) = g_i(\tilde{T}(y))$ для любого $i \in \mathcal{I}$. Поскольку $\tilde{T}(x) \in C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, то функция $\tilde{T}(y) \in M_\alpha$. Таким образом, $\tilde{T}(M_\beta) \subset M_\alpha$. Аналогично доказывается обратное включение, если вместо отображения $\tilde{T}^*$ рассмотреть отображение

$$(\tilde{T}^*)^{-1} : L_p(L_{\tau\cdot\beta}) \to L_p(L_{\tau\cdot\alpha}).$$

Рассмотрим пространство $E_\beta \subset M_\beta$. Поскольку $E_\beta$ гомеоморфно $c_0(\Gamma_\beta)$ (3.6), то отображение $U = \widetilde{T} \circ \Phi$ является линейным гомеоморфизмом пространства $c_0(\Gamma_\beta)$ в $M_\alpha$, причем $U(\Gamma_\beta) \cap C_p(L_{\tau\cdot\alpha}) = \{0\}$.

Обозначим через $\chi_\gamma$, $0 \le \gamma < \beta$ характеристическую функцию точки $u_\gamma = (\tau(\gamma+1), 0) \in \Gamma_\beta$. Заметим, что для любой последовательности различных точек $\gamma_n \subset [0, \beta)$ и для любой последовательности скаляров $c_n \in \mathbb{R}$ последовательность функций $c_n \cdot \chi_{\gamma_n} \in c_0(\Gamma_\beta)$ поточечно сходится к нулю. Следовательно, и последовательность $U(c_n \cdot \chi_{\gamma_n}) \to 0$ поточечно. Для любого $0 \le \eta < \alpha$ рассмотрим точку $u_\eta = (\tau(\eta+1), 0) \in \Gamma_\alpha$ и множество

$$A_\eta = \{\gamma :\ (U(\chi_\gamma))(u_\eta) \ne 0\},$$

$0 \leq \eta < \alpha$. Нетрудно видеть, что множество $A_\eta$ является конечным для любого $\eta \in [0, \alpha)$. Далее рассмотрим множество $A_0 = \bigcup_{\eta\in[0,\alpha)} A_\eta \subset [0, \beta)$. Ясно, что $|A_0| = |\alpha|$. Так как $\alpha$ и $\beta$ – начальные ординалы и по предположению $|\beta| > |\alpha|$, то $|[0, \beta) \setminus A_0| = |\beta|$. Если $\gamma \in [0, \beta) \setminus A_0$, то $U(\chi_\gamma)|_{\Gamma_\alpha} \equiv 0$. Так как $U(\chi_\gamma) \in M_\alpha \setminus C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$, то для любого $\gamma \in [0, \beta) \setminus A_0$ функция $U(\chi_\gamma)$ разрывна слева хотя бы в одной точке $u_\eta$ из множества $\Gamma_\alpha$. Для каждой точки $u_\eta \in \Gamma_\alpha$ определим множество $B_\eta = \{\gamma \in [0, \beta) \setminus A_0 : U(\chi_\gamma)$ разрывна слева в точке $u_\eta\}$. Ясно, что

$$\bigcup_{\eta\in[0,\alpha)} B_\eta = [0, \beta) \setminus A_0. \tag{3.7}$$

Если все множества $B_\eta$ конечны, то

$$|\bigcup_{\eta\in[0,\alpha)} B_\eta| \leq |\alpha| \cdot \aleph_0 = |\alpha| < |\beta| = |[0, \beta) \setminus A_0|,$$

что противоречит 3.7. Следовательно, существует ординал $\eta_0 \in [0, \alpha)$ такой, что $|B_{\eta_0}| \geq \aleph_0$. Пусть $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset B_{\eta_0}$. По определению $B_{\eta_0}$, все функции $U(\chi_{\gamma_n})$ разрывны слева в точке $u_{\eta_0}$ и $U(\chi_{\gamma_n})(u_{\eta_0}) = 0$. Так как функции $U(\chi_{\gamma_n})$ непрерывны на промежутке $((\tau \cdot \eta_0, 0), (\tau(\eta_0 + 1), 0))$ и точка $u_{\eta_0} = (\tau(\eta_0+1), 0) = (\tau\cdot\eta_0+\tau, 0)$ не конфинальна $\omega$, то существует точка $(\tau \cdot \eta_0 + \delta_n, 0) \in ((\tau \cdot \eta_0, 0), (\tau(\eta_0 + 1), 0))$, $\delta_n < \tau$, такая, что

$$U(\chi_{\gamma_n})((\tau \cdot \eta_0, 0), (\tau(\eta_0 + 1), 0)) = U(\chi_{\gamma_n})(\tau \cdot \eta_0 + \delta_n, 0).$$

Так как функция $U(\chi_{\gamma_n})$ разрывна в точке $(\tau(\eta_0 + 1), 0)$, то $U(\chi_{\gamma_n})(\tau \cdot \eta_0 + \delta_n, 0) \neq 0$. Подберем константы $c_n$ так, что

$$U(c_n \cdot \chi_{\gamma_n})(\tau \cdot \eta_0 + \delta_n, 0) = 1.$$

Пусть $\delta_0 = \sup_n \delta_n$. Поскольку точка $(\tau(\eta_0 + 1), 0)$ не конфинальна $\omega$, то $\tau\cdot\eta_0+\delta_0 < \tau(\eta_0+1)$ и, следовательно, $(\tau\cdot\eta_0+\delta_0, 0) < (\tau(\eta_0+1), 0)$. Отсюда следует, что $U(c_n \cdot \chi_{\gamma_n})(\tau \cdot \eta_0 + \delta_0, 0) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что функции $c_n \cdot \chi_{\gamma_n}$ поточечно сходятся к нулю. Таким образом, пространства $C_p(L_{\tau\cdot\alpha})$ и $C_p(L_{\tau\cdot\beta})$ не являются линейно гомеоморфны. $\square$

**Теорема 3.2.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ счетные или конечные ординалы. Тогда пространства $C_p(L_\alpha)$ и $C_p(L_\beta)$ являются линейно гомеоморфными.*

Утверждение этой теоремы следует из того факта, что для любого счетного ординала $\alpha$ пространство $L_\alpha$ гомеоморфно отрезку $[0, 1]$ с естественной топологией.

# Глава 4

# Общий вид функционалов на пространствах $C_c(S_\alpha)$ и $C_c(S \times [1, \alpha])$

В настоящей главе доказываются теоремы об общем виде функционалов на пространствах непрерывных функций $C_c(S \times [1, \alpha])$ и $C_c(S_\alpha)$ в топологии компактной сходимости. Здесь $S$ – прямая Зоргенфрея, $S_\alpha$ – «длинная прямая Зоргенфрея», $\alpha$ – произвольный ординал.

При изучении пространств непрерывных функций важную роль играет задача об общем виде функционалов. Для пространства $C_p(S)$ общий вид функционала хорошо известен [2]. Любой линейный непрерывный функционал $\varphi : C_p(S) \to \mathbb{R}$ имеет следующий вид

$$\varphi = \lambda_1 \delta_{t_1} + \ldots + \lambda_n \delta_{t_n},$$

где функционалы $\delta_{t_i}(x) = x(t_i)$ для любой функции $x \in C_p(S)$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Сопряженное пространство к пространству $C_p(S)$ обозначается через $L_p(S)$. Опираясь на теорему, доказанную в работе [24], мы докажем теорему об общем виде функционала для пространства $C_c(S)$.

**Замечание 4.1.** *[17] На прямой Зоргенфрея все компакты являются счетными.*

**Определение 4.1.**

$$l_1(X) = \left\{ a : X \to \mathbb{R} : \sum_{t \in X} |a(t)| < \infty \right\}. \tag{4.1}$$

*Запись* $\sum_{t \in X} |a(t)| < \infty$ *означает, что множество* $X_a = \{t \in X : a(t) \neq 0\}$ *не более чем счетно и ряд* $\sum_{t \in X_a} |a(t)| < \infty$ *сходится.*

**Определение 4.2.** *Определим пространство* $\tilde{l}_1(X) \subset l_1(X)$ *следующим образом*

$$\tilde{l}_1(X) = \{a \in l_1(X) : \overline{X}_a \text{ – компакт}\}. \tag{4.2}$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{l}_1(X)$ – линейное подпространство в $l_1(X)$.

**Теорема 4.1.** *Для любого элемента* $a \in \tilde{l}_1(S)$ *формула*

$$f(x) = \sum_{t \in S} a(t)x(t) \tag{4.3}$$

*задает линейный непрерывный функционал на линейном топологическом пространстве* $C_c(S)$. *Верно и обратное: если* $f : C_c(S) \to \mathbb{R}$ *— линейный непрерывный функционал, то существует единственный элемент* $a \in \tilde{l}_1(S)$ *такой, что для любого* $x \in C_c(S)$

$$f(x) = \sum_{t \in S} a(t)x(t) \tag{4.4}$$

**Доказательство.** Обозначим через $K_a = \overline{\{t \in S : a(t) \neq 0\}}$. Пусть $a \in \tilde{l}_1(S)$ и $y \in C_c(S)$. Тогда

$$\left| \sum_{t \in S} a(t)y(t) \right| \leq \left| \sum_{t \in K} a(t)y(t) \right| \leq \sum_{t \in K} |a(t)y(t)| \leq L \sum_{t \in K} |a(t)|.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $|y(t)| \leq L$ для любого $t \in K_a$. Так как $a \in \tilde{l}_1(S)$, то

$$L \sum_{t \in S} |a(t)| < \infty.$$

В силу того, что ряд сходится, определение функционала

$$f(x) = \sum_{t \in S} a(t)x(t)$$

является корректным. Линейность функционала $f$ очевидна. Докажем его непрерывность. Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим окрестность

$$O(0, K_a, \delta) = \{y \in C_c(S) : |y(t)| < \delta, \forall t \in K_a\},$$

где $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{t \in K_a} |a(t)|}$. Тогда, для любой функции $y \in O(0, K_a, \delta)$ получаем, что

$$|f(y)| = \left|\sum_{t \in K_a} a(t)y(t)\right| \leq \sum_{t \in K_a} |a(t)y(t)| < \delta \sum_{t \in K_a} |a(t)| = \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon.$$

Поскольку $f : C_c(S) \to \mathbb{R}$ — линейный непрерывный функционал, то существует окрестность окрестность $O(0, K_f, \delta) = \{x \in C_c(S) : |x(t)| < \delta, \forall t \in K_f\}$ такая, что для любой функции $x \in O(0, K_f, \delta)$,

$$|f(x)| < 1, \tag{4.5}$$

где $K_f$ – счетный компакт в силу 4.1. Если функция $x\Big|_{K_f} = 0$, то $|f(x)| < 1$. Для $n \in \mathbb{N}$ функция $n \cdot x\Big|_{K_f} = 0$. В силу линейности функционала $f$ получаем, что

$$|f(nx)| = n|f(x)| < 1.$$

Следовательно, $f(x) = 0$. Это означает, что если для функций $x, x^{'} \in C_c(S)$ выполнено равенство $x|_{K_f} = x^{'}|_{K_f}$, то

$$f(x) = f(x^{'}). \tag{4.6}$$

Для произвольного компакта $K \subset S$ определим ретракцию $r : S \to K$ по формуле

$$r(t) = \begin{cases} \inf\{k \in K, k > t\}, \text{если}\, t \in S \backslash K; \\ t, \text{если}\, t \in K; \\ k_m = \sup\{k \in K : k < t\}, \text{если}\, t \in (k_m, +\infty). \end{cases}$$

Из определения ясно, что для всех точек $t \in S$ справедливо неравенство $t \leq r(t)$, за исключением случая $t < k_m$, и $r^2 = r$. Если $\inf\{k \in K, k > t\} = s \notin K$, то существует последовательность $k_n \in K$ такая, что $k_n \to s$ в топологии $\tau_E$, $k_1 > k_2 > \ldots, > k_n > \ldots > s$. В этом случае множество $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предельных точек в $K$, что противоречит компактности $K$. Таким образом, $s \in K$ и отображение $r$ определено корректно. Нетрудно видеть, что отображение $r$ возрастающее и $r(t) \geq t$ для любой точки $t \in S$.

Покажем непрерывность отображения $r$. Если $t \notin K$, то $(t-\varepsilon, t] \cap K = \varnothing$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $r(t^{'}) = r(t)$ для любой точки $t^{'} \in (t-\varepsilon, t]$. Следовательно, функция $r$ – постоянная на интервале $(t-\varepsilon, t]$ и, значит, $r$ – непрерывна. Пусть теперь $t \in K$. Поскольку отображение $r$ возрастающее, то для любой точки $t^{'} \in (t-\varepsilon, t]$ справедливо

$$t - \varepsilon < t^{'} \leq r(t^{'}) \leq r(t) = t,$$

то есть $r((t-\varepsilon, t]) \subset (t-\varepsilon, t]$.

Рассмотрим нормированное пространство $(C(K_f), \|.\|)$ с нормой $\|y\| = \max_{t \in K} |y(t)|$. Пусть $f^{'}$ – функционал, определенный на пространстве $C(K_f)$ и действующий по правилу $f^{'}(y) = f(y \circ r)$ для $y \in C(K_f)$. Нетрудно видеть, что функционал $f^{'}$ – линейный. Покажем, что $f^{'}$ – непрерывный функционал на пространстве $(C(K_f)$. Поскольку функционал $f^{'}$ является линейным, то достаточно показать его ограниченность. Пусть $y \in C(K_f)$ и $\|y\| \leq 1$. Тогда $|(y \circ r)(t)| \leq 1$ для любой точки $t \in S$ и, следовательно, $|\frac{\delta}{2}(y \circ r)(t)| < \delta$, то есть $\frac{\delta}{2}(y \circ r) \in O(0, K_f, \delta)$.Тогда по (4.5) $|f(\frac{\delta}{2}(y \circ r)(t))| < 1$ для любой точки $t \in S$. Следовательно, по формуле 4.16

$$|f^{'}(y)| = |f(y \circ r)(t)| < \frac{2}{\delta}.$$

Значит, функционал $f^{'}$ является ограниченным и $\|f\| \leq \frac{2}{\delta}$.

Так как все компакты на прямой Зоргенфрея являются счетными, то по теореме Семадени [23] пространства $C^{*}(K_f)$ и $l_1(K_f)$ являются алгебраически изоморфными, где

$$l_1(K_f) = \left\{ \alpha : K_f \to \mathbb{R} \, : \, \sum_{t \in K_f} |\alpha(t)| < \infty \right\}.$$

Это означает, что каждому элементу $\alpha \in l_1(K_f)$ ставится в соотвествие функционал $f^{'} \in C^{*}(K_f)$ следующим образом

$$f^{'}(y) = \sum_{t \in K_f} \alpha(t) y(t) \tag{4.7}$$

для любого $\alpha \in l_1(K_f)$.

В силу условия 4.7 для любой функции $y \in C_c(S)$

$$f(y) = f(y \circ r).$$

В свою очередь,

$$f(y \circ r) = f(y|_K \circ r) = f^{'}(y|_K).$$

Из последних равенств следует, что

$$f(y) = f^{'}(y|_{K_f}) = \sum_{t \in K} \alpha(t) y|_{K_f}(t) = \sum_{t \in K_f} \alpha(t) y(t).$$

Положим

$$a(t) = \begin{cases} \alpha(t), \quad t \in K_f; \\ 0, \quad t \notin K_f. \end{cases}$$

Очевидно, что $a \in \tilde{l}_1(S)$. Тогда

$$f(y) = \sum_{t \in S} a(t) y(t).$$

Докажем единственность элемента $a$. Предположим, что существует $b \in \tilde{l}_1(S)$ такой, что

$$f(y) = \sum_{t \in S} b(t) y(t)$$

для любой фуннкции $y \in C_c(S)$. Тогда,

$$\sum_{t\in S}(a(t)-b(t))y(t)=0 \tag{4.8}$$

для любой фуннкции $y \in C_c(S)$. Рассмотрим множество $T=\{t:(a(t)-b(t))\neq 0\}\subset S$. Поскольку это множество является счетным, то $T=\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд (4.8) принимает следующий вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a(t_n)-b(t_n))y(t_n).$$

Предположим, что существует номер $k$ такой, что $a(t_k)-b(t_k)\neq 0$. Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(a(t_n)-b(t_n))y(t_n)|.$$

сходится, то существует номер $n_0>k$ такой, что

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|(a(t_n)-b(t_n))y(t_n)|<\frac{|a(t_k)-b(t_k)|}{2}.$$

Рассмотрим окрестность $U(t_k)$ такую, что

$$U(t_k)\cap\{t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1}\ldots,t_{n_0}\}=\emptyset.$$

Так как $S$ – вполне реглярное пространство, то существует непрерывная функция

$$x_0(t)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad t=t_k;\\ 0, & \text{если} \quad t\notin U(t_k)\end{cases}$$

и $|x_0(t)|\leq 1$ для любого $t\in S$. По предположению

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a(t_n)-b(t_n))x_0(t_n)=0.$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a(t_n)-b(t_n))x_0(t_n)=(a(t_k-b(t_k)x_0(t_k)+\sum_{n=1,n_0\neq k}^{n_0-1}((a(t_n)-b(t_n)))x_0(t_n)$$

$$+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}((a(t_n)-b(t_n))x_0(t_n) \tag{4.9}$$

Так как
$$\sum_{n=1}^{n_0-1}((a(t_n)-b(t_n)))x_0(t_n)=0,$$
то

$$|(a(t_k)-b(t_k))x_0(t_k)|=|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}((a(t_n)-b(t_n)))x_0(t_n)|.$$

Но это невозможно, так как с одной стороны
$$|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}((a(t_n)-b(t_n)))x_0(t_n)|\leq\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|((a(t_n)-b(t_n)))x_0(t_n)|$$
$$\leq\frac{|a(t_k)-b(t_k)|}{2}; \quad (4.10)$$

а с другой стороны
$$|(a(t_k)-b(t_k))x_0(t_k)|=|(a(t_k)-b(t_k))|.$$

□

**Следствие 4.1.** *Сопряженное пространство к линейному топологическому пространству $C_c(S)$ имеет вид*
$$C_c^*(S)=\{a\in l_1(S):\ \exists\ \text{компакт}\ K\subset S,\ X_a\subset K\}.$$

**Следствие 4.2.** *Пространства $C_c^*(S)$ и $\tilde{l}_1(S)$ алгебраически изоморфны, то есть существует линейная биекция пространства $C_c^*(S)$ на $\tilde{l}_1(S)$.*

Заметим, что в пространстве $S^n$, также как и в пространстве $S$ все компакты являются счетными ретрактами. Пусть компакт $K\subset S^n$. При проекции компакта $K$ на прямые Зоргенфрея, мы получим счетные компакты $K_i$, $i=1,\ldots,n$. Произведение счетных компатов $K_i$ снова является счетным компактом, следовательно, подобно и гомеоморфно некоторому отрезку ординалов $[1,\alpha]$. Отсюда получаем, что $K\subset K_1\times\ldots\times K_n\sim$

$[1,\alpha]$. Поскольку каждое компактное подмножество в отрезке ординалов является ретрактом, а произведение $K_1 \times \ldots \times K_n \sim [1,\alpha]$ – ретракт в $S_n$, то $K$ – ретракт в $S_n$. Таким образом, теорема 4.1 справедлива для пространств $S^n$.

**Теорема 4.2.** *Для любого элемента $a \in \tilde{l}_1(S^n)$ формула*

$$f(x) = \sum_{t \in S^n} a(t)x(t) \tag{4.11}$$

*задает линейный непрерывный функционал на линейном топологическом пространстве $C_c(S^n)$. Верно и обратное: если $f : C_c(S^n) \to \mathbb{R}$ — линейный непрерывный функционал, то существует единственный элемент $a \in \tilde{l}_1(S^n)$ такой, что для любого $x \in C_c(S^n)$*

$$f(x) = \sum_{t \in S^n} a(t)x(t) \tag{4.12}$$

**Следствие 4.3.** *Пространства $C_c^*(S)$ и $\tilde{l}_1(S^n)$ алгебраически изоморфны.*

Далее рассмотрим общий вид функционала на пространстве непрерывных функций $C_c(S \times [1,\alpha])$ с топологией компактной сходимости. Здесь $\alpha$ – произвольный ординал и отрезок ординалов $[1,\alpha]$ наделен стандартной порядковой топологией. В доказательстве предыдущей теоремы мы использовали тот факт, что все компакты на прямой Зоргенфрея являются счетными ретрактами. Если $\alpha$ – счетный ординал, то в пространстве $S \times [1,\alpha]$ все компакты также являются счетными ретрактами, и, значит, теорема 4.1 верна для пространства $C_c(S \times [1,\alpha])$. Если $\alpha$ – несчетный ординал, то компакт $K \subset S \times [1,\alpha]$ не обязательно является ретрактом.

Пример. *Пусть $K_0 = \{(-\frac{1}{n}, \omega_1)\}_{n=1}^{\infty} \subset S \times \{\omega_1\}$. Тогда $K = K_0 \bigcup (\{0\} \times [1,\omega_1]) \subset S \times [1,\omega_1]$ не является ретрактом.*

Действительно, предположим, что существует ретракция $r : S \times [1, \omega_1] \to K$. Тогда в силу непрерывности $r$ для точек $k_n = (\frac{-1}{n}, \omega_1) \subset K$ существует окрестность $((\frac{-1}{n-1}, \frac{-1}{n}] \times (\alpha_n, \omega_1])$ такая, что

$$r(\{\frac{-1}{n}\} \times (\alpha_n, \omega_1]) = k_n.$$

Пусть $\alpha_0 = \sup \alpha_n$. Тогда

$$r(\frac{-1}{n}, \alpha_0 + 1) = k_n.$$

В силу непрерывности ретракции

$$r(\frac{-1}{n}, \alpha_0 + 1) \to r(0, \alpha_0 + 1) = (0, \alpha_0 + 1).$$

с другой стороны $r(\frac{-1}{n}, \alpha_0 + 1) = k_n$. Таким образом, получили противоречие.

Докажем аналогичную теорему об общем виде функционала пространства $S \times [1, \alpha]$ на компакт $K$, не опираясь на существование ретракции.

**Теорема 4.3.** *Для любого элемента $a \in \tilde{l}_1(S \times [1, \alpha])$ формула*

$$f(x) = \sum_{t \in S \times [1, \alpha]} a(t)x(t) \tag{4.13}$$

*задает линейный непрерывный функционал на линейном топологическом пространстве $C_c(S \times [1, \alpha])$. Верно и обратное: если $f : C_c(S \times [1, \alpha]) \to \mathbb{R}$ — линейный непрерывный функционал, то существует единственный элемент $a \in \tilde{l}_1(S \times [1, \alpha])$ такой, что для любого $x \in C_c(S \times [1, \alpha])$*

$$f(x) = \sum_{t \in S \times [1, \alpha]} a(t)x(t) \tag{4.14}$$

**Доказательство.** Пусть $a \in \tilde{l}_1(S \times [1, \alpha])$ и $y \in C_c(S \times [1, \alpha])$. Тогда

$$\left|\sum_{t \in S} a(t)y(t)\right| \leq \left|\sum_{t \in K} a(t)y(t)\right| \leq \sum_{t \in K} |a(t)y(t)| \leq L \sum_{t \in K} |a(t)|.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $|y(t)| \leq L$ для любого $t \in K$. Так как $a \in \tilde{l}_1(S \times [1, \alpha])$, то

$$L \sum_{t \in S} |a(t)| < \infty.$$

В силу того, что ряд сходится, определение функционала является корректным. Линейность функционала $f$ очевидна. Докажем его непрерывность. Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим окрестность

$$O(0, K_f, \delta) = \{y \in C_c(S \times [1, \alpha]) : |y(t)| < \delta, \forall t \in K\},$$

где $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a(t)|}$. Тогда, для любой функции $y \in O(0, K_f, \delta)$ получаем, что

$$|f(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a(t)y(t)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a(t)y(t)| < \delta \sum_{n=1}^{\infty} |a(t)| = \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon.$$

Пусть теперь $f : C_c(S \times [1, \alpha]) \to \mathbb{R}$ — линейный непрерывный функционал. Для $\varepsilon = 1$ существует окрестность окрестность $O(0, K_f, \delta) = \{x \in C_c(S \times [1, \alpha]) : |x(t)| < \delta, \forall t \in K_f\}$ такая, что для любой функции $x \in O(0, K_f, \delta)$,

$$|f(x)| < 1. \tag{4.15}$$

Если функция $x\big|_{K_f} \equiv 0$, то $|f(x)| < 1$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $n \cdot x\big|_{K_f} \equiv 0$, то в силу линейности функционала $f$ получаем, что

$$|f(nx)| = n|f(x)| < 1.$$

Следовательно, $f(x) \equiv 0$. Это означает, что если функции $x, x^{'} \in C_c(S \times [1, \alpha])$, то

$$x|_K = x^{'}|_K \Rightarrow f(x) = f(x^{'}). \tag{4.16}$$

Рассмотрим нормированное пространство $(C(K_f), \|.\|)$ с нормой $\|y\| = \max_{t\in K} |y(t)|$. Поскольку прямая Зоргенфрея $S$ – паракомпактное пространство [17] и отрезок ординалов $[1, \alpha]$ – компакт, то $S \times [1, \alpha]$ – паракомпактное пространство [17]. Все паракомпактные пространства являются нормальными [17]. Тогда по теореме Титце-Урысона [17], существует непрерывное продолжение $\tilde{y}$. Для любой функции $y \in C(K_f)$ определим функционал $f^{'} : C(K_f) \to \mathbb{R}$ по правилу $f^{'}(y) = f(\tilde{y})$. В силу формулы 4.16 это определение является корректным. Покажем, что Функционал $f^{'}$ – линейный:

$$f^{'}(\alpha y_1 + \beta y_2) = f^{'}(\alpha \widetilde{y_1 + \beta} y_2) = f(\alpha\tilde{y}_1 + \beta\tilde{y}_2)$$
$$= \alpha f(\tilde{y}_1) + \beta f(\tilde{y}_2) = \alpha f^{'}(y_1) + \beta f^{'}(y_2).$$

Второе равенство выполено в силу формулы 4.16. Покажем, что $f^{'}$ – непрерывный на пространстве $(C(K_f), \|.\|)$. Поскольку функционал $f^{'}$ является линейным, то достаточно показать его ограниченность. Пусть $y \in C(K_f)$ и $\|y\| \leq 1$. Нетрудно видеть, что существует непрерывное продолжение $\tilde{y} \in C(S \times [1, \alpha])$ такое, что $|(\tilde{y})(t)| \leq 1$ для любой точки $t \in S \times [1, \alpha]$. Функция $|\frac{\delta}{2}(\tilde{y})(t)| < \delta$ и, следовательно, эта функция $\frac{\delta}{2}(\tilde{y})(t) \in O(0, K_f, \delta)$.Тогда по (4.15) $|f(\frac{\delta}{2}(\tilde{y})(t))| < 1$ и, следовательно, $|f^{'}(y) = f(\tilde{y})| < \frac{2}{\delta}$. Таким образом, функционал $f^{'}$ является ограниченным.

Заметим, что компакт $K_f \subset S \times [1, \alpha]$ является разреженным. Действительно, если мы рассмотрим произвольное подмножество $A \subset K_f$ и его проекцию $P|_{[1,\alpha]} : A \to [1, \alpha]$, то множество $P|_{[1,\alpha]}(A)$ имеет изолированную точку $\gamma_0$. Так как $K_f \cap S \times \{\gamma_0\}$ счетный, то существует изолированная точка $(k, \gamma_0)$. Нетрудно видеть, что эта точка является изолированной в множестве $A$.

Так как компакты $K_f$ являются разреженными в пространстве $S \times$

$[1,\alpha]$, то по теореме Семадени [23] пространства $C^*(K_f)$ и $l_1(K_f)$ являются изоморфными, где

$$l_1(K_f)=\left\{\alpha : K_f\to\mathbb{R} \,:\, \sum_{t\in K_f}|\alpha(t)|<\infty\right\}.$$

Это означает, что каждому элементу $\alpha\in l_1(K_f)$ ставится в соотвествие функционал $f^{'}\in C^*(K_f)$ следующим образом

$$f^{'}(y)=\sum_{t\in K_f}\alpha(t)y(t) \tag{4.17}$$

для любого $y\in C(K_f)$.

Положим

$$a(t)=\begin{cases}\alpha(t), & t\in K;\\ 0, & t\notin K.\end{cases}$$

Очевидно, что $a\in\tilde{l}_1(S\times[1,\alpha])$. Тогда

$$f(y)=\sum_{t\in S\times[1,\alpha]}a(t)y(t). \tag{4.18}$$

Докажем единственность элемента $a$. Предположим, что существует $b\in\tilde{l}_1(S\times[1,\alpha])$ такой, что

$$f(y)=\sum_{t\in S}b(t)y(t)$$

для любой фуннкции $y\in C_c(S)$. Следовательно,

$$\sum_{t\in S\times[1,\alpha]}(a(t)-b(t))y(t)=0 \tag{4.19}$$

для любой функции $y\in C_c(S\times[1,\alpha])$. Рассмотрим множество $T=\{t : (a(t)-b(t))\neq 0\}\subset S\times[1,\alpha]$. Поскольку это множество является счетным, то $T=\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд (4.19) принимает следующий вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a(t_n)-b(t_n))y(t_n).$$

Предположим, что существует номер $k$ такой, что $a(t_k) - b(t_k) \neq 0$. Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(a(t_n) - b(t_n))y(t)|.$$

сходится, то существует номер $n_0 > k$ такой, что

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(a(t_n) - b(t_n))y(t_n)| < \frac{k}{2}.$$

Рассмотрим окрестность $U(t_k)$ такую, что $U(t_k) \cap \{t_1, \ldots, t_{n_0}\} = \emptyset$. Пусть

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t = t_k; \\ 0, & \text{если} \quad t \notin U(t_k) \end{cases}$$

и $|x(t)| \leq 1$ для любого $t \in S \times [1, \alpha]$. Тогда, по предположению

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a(t_n) - b(t_n))x_0(t_n) = 0.$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a(t_n) - b(t_n))x_0(t_n) = (a(t_k - b(t_k)x_0(t_k) + \sum_{n=1}^{n_0-1} ((a(t_n) - b(t_n)))x_0(t_n)$$
$$+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} ((a(t_n) - b(t_n))x_0(t_n) \quad (4.20)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} ((a(t_n) - b(t_n)))x_0(t_n) = 0,$$

то

$$|(a(t_k) - b(t_k))x_0(t_k)| = |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} ((a(t_n) - b(t_n)))x_0(t_n)|.$$

Но это невозможно, так как с одной стороны

$$|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} ((a(t_n) - b(t_n)))x_0(t_n)| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |((a(t_n) - b(t_n)))x_0(t_n)| \leq \frac{k}{2}, \quad (4.21)$$

а с другой стороны

$$|(a(t_k) - b(t_k))x_0(t_k)| = k.$$

$\square$

**Следствие 4.4.** *Сопряженное пространство к линейному топологическому пространству $C_c(S \times [1,\alpha])$ имеет вид*

$$C_c^*(S \times [1,\alpha]) =$$
$$\{a \in l_1(S \times [1,\alpha]) : \exists \text{ счетный компакт } K \subset S \times [1,\alpha],\ X_a \subset K\}.$$

**Следствие 4.5.** *Пространства $C_c^*(S \times [1,\alpha])$ и $\tilde{l}_1(S \times [1,\alpha])$ алгебраически изоморфны.*

**Определение 4.3.** *Пусть $X$ – линейное топологическое пространство. Система $\{x_j\}_{j \in J}$ называется обобщенным базисом Шаудера, если любой элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде суммы*

$$x = \sum_{j \in J} \alpha_j x_j, \tag{4.22}$$

*где $\alpha_j \in \mathbb{R}$ и $|\{j : \alpha_j \neq 0\}| \leq \aleph_0$ и ряд сходится безусловно.*

Определение базиса Шаудера для нормированных пространств хорошо известно [8].

В пространстве $\tilde{l}_1(S \times [1,\alpha])$ рассмотрим топологию, в которой базу окрестностей нуля образуют множества вида

$$U(a_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) =$$
$$\{a \in \tilde{l}_1(S \times [1,\alpha]) : |a_0(x_i) - a(x_i)| < \varepsilon,\ x_i \in C_c(S \times [1,\alpha]),\ i = 1 \ldots n\}.$$

Топологию, порожденную этой базой окрестностей, обозначим через $\tau_c$.

Если под $\delta_t$, $t \in S \times [1, \alpha]$, мы будем понимать точечные функционалы в пространстве $(\tilde{l}_1(S \times [1, \alpha]), \tau_c)$, то учитывая формулу (4.14), справедлив следующий результат.

**Теорема 4.4.** *Система* $\{\delta_t\}_{t \in S \times [1, \alpha]}$ *в пространстве* $(\tilde{l}_1(S \times [1, \alpha]), \tau_c)$ *образует обобщенный базис Шаудера.*

# Заключение

Перечислим основные результаты выполненных диссертационных исследований, выносимые на защиту:

- Проведена гомеоморфная классификация произведений отрезков ординалов и прямой Зоргенфрея.

- Проведена гомеоморфная классификация «длинных прямых Зоргенфрея».

- Проведена линейная гомеоморфная классификация постранств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея». Пространства непрерывных функций рассматриваются в топологии поточечной и компактной сходимости;

- Проведена частичная линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых». Пространства непрерывных функций рассматриваются в топологии поточечной сходимости.

- Получен общий вид функционала на пространствах непрерывных функций, наделенных топологией компактной сходимости и заданных на произведениях прямой Зоргенфрея на отрезки ординалов $[1, \alpha]$, на «длинных прямых Зоргенфрея» и на произведениях прямой Зоргенфрея $S^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Полученные результаты могут использоваться в научных исследованиях и спецкурсах для студентов и аспирантов механико-математических факультетов, специализирующихся по функционально-му анализу и топологии.

# Список литературы


[1] *Александров П.С., Урысон П.С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971, 144 с.

[2] *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Издательство МГУ, 1989, 222 с.

[3] *Архангельский А.В.* О линейных гомеоморфизмах пространств функций//ДАН СССР. 1982. Т. 264, № 6. С. 1289 – 1292.

[4] *Гулько С.П., Оськин А.В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах. Функциональный анализ и его приложения // 1975. Т. 9. № 1. С. 61-62.

[5] *Гулько С.П.* Свободные топологические группы и пространства непрерывных функций на ординалах // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 34 – 38.

[6] *Кисляков С.В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // Сиб. мат. журнал. 1975. Т. 16. С. 293-300.

[7] *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970, 416 с.

[8] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа // М.: Высшая школа, 1982, 271 с.

[9] *Милютин А.А.* Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1966. Вып. 2. С. 150-156.

[10] *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применение к линейной топлогической классификации пространств непрерывных функций. М.: Мир, 1979, 143 с.

[11] *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу // Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. М.: Мир, 1979, 580 с.

[12] *Трофименко Н. Н., Хмылева Т.Е.* О линейном гомеоморфизме пространств непрерывных функций на подмножествах прямой Зоргенфрея // Вестник Томского государственного университета. Матем. и мех. 2012. № 2(18). С. 29–32.

[13] *Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е.* О гомеоморфизмах пространств $I \times [1, \alpha]$ // Вестник Томского государственного университета. Матем. и мех. 2013. №. 5 (25). С. 40-44.

[14] *Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е.* О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых Зоргенфрея» // Сиб.Мат.жур. 2016. Т.57.№ 3. С. 709-711.

[15] *Трофименко Н.Н.* О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1(39). С. 36–41;

[16] *Федорчук В. В.* О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Доклады АН СССР. 1968. Т. 182. № 2. С. 229–308.

[17] *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986, 752 с.

[18] *Bessaga C., Pelczynski A.* On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. Vol. 19. P. 53–62.

[19] *Burke D.K., Lutzer J.T.* On powers of certain lines // Topology and its applications. 1987. Vol, 26. P. 251-261.

[20] *Burke D.K., Moore J.T.* Subspaces of the Sorgenfrey line//Topology and its applications. 1988. Vol. 90. P. 57-68.

[21] *Lutzer D.* Another property of the sorgenfrey line // Compositio Math. 1972. Vol. 24. № 3. P. 359-363.

[22] *Van Douwen E., Pfeffer W.* Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces // Pacific J. Math. 1971. Vol. 80. P. 371-377.

[23] *Semadeni Z.* Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian product // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Stron. et Phys. 1960. Vol. 8. P. 81–84.

[24] *Semadeny Z., Pelczynski A.* Spaces of continuous functions // Studia Math. 1959. Vol. 18. P. 211-222.

[25] *Sorgenfrey R.H.* On the topological product of paracompact spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 53. P. 631-632.