Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Зад

Задиранова Любовь Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОТОКОВ В БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СМО С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Моисеева Светлана Петровна

Томск – 2015

Содержание

Введение

Актуальность работы. Теория массового обслуживания (ТМО) считается одной из стандартных методик (вместе с линейным программированием, моделированием и т.д.) исследования операций в промышленном строительстве, обрабатывающей технике, а также в области телекоммуникаций, компьютерной техники и информатики. В настоящее время диапазон применения моделей массового обслуживания вырос, и стал включать в себя не только телекоммуникационные и информационные системы, в том числе проблемы перегруженности телетрафика, но и производство, управление воздушным движением, военную логистику, супермаркеты, запасы, плотины, больницы, а также многие другие области, которые связаны обслуживанием случайных требований. Цель анализа систем массового обслуживания – понять поведение основных процессов, что позволит принимать осознанные и интеллектуальные решения в их управлении.

Становление ТМО (1908 г.) связывают с именем датского ученого Агнера Крарупа Эрланга, который впервые вывел уравнения, называемые сейчас стационарной формой уравнений Колмогорова для марковских процессов со счетным числом состояний. В середине 30-х годов В. Феллер ввел понятие процесса гибели и размножения. В то же время фундаментальные основы ТМО были заложены советскими математиками А.Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным [76].

В работах по потокам без последействия А. Я. Хинчиным определены достаточные условия, при которых поток, являющийся суммой большого числа независимых между собой случайных потоков, каждый из которых «мал» по сравнению с суммой остальных, был бы близок к простейшему [78].

Тогда же было доказано, что простейший поток появляется и в качестве предельного для некоторых последовательностей потоков.

Всестороннее изучение условий, при которых поток приближается к пуассоновскому, было предметом работ A. Renyi [131], Ю.К. Беляева [6], Р. Л. Добрушина [15], L. Breiman и др. Оказалось, что пуассоновский поток появляется не только при суммировании большого числа независимых стационарных равноправных, в некотором смысле, потоков, но и при других операциях. Так, A. Renyi рассматривал процесс прореживания потока, которому соответствуют удаление с некоторой вероятностью событий из рассматриваемого потока и одновременное сжимание времени, при многократных повторениях которых поток сходится к простейшему.

В своих работах L. Breiman и Р.Л. Добрушин показали, что при случайном блуждании частиц в пространстве при весьма общих условиях также получается пуассоновское распределение.

В теории массового обслуживания классическими являются задачи исследования числа заявок в системах. В случае систем с большим числом обслуживающих приборов при дополнительном ограничении, состоящем в том, что либо поток является простейшим, либо время обслуживания распределено согласно показательного закона распределения, серьезные результаты были получены Д. Коксом [39], Б. А. Севастьяновым [69, 70], L. Takács [136].

При решении конкретных задач ТМО используются специальные математические методы. Во-первых, следует отметить метод вложенных цепей Кендалла, намеченный А. Я. Хинчиным еще в 1932 г. и получивший свое развитие в работах D. M. G. Wishart [138], D. G. Kendall [113, 114], T. A. Kawata [112], T. Homma [104-106] и F. G. Foster [100]. Другим широко распространенным методом является метод дополнительных переменных Кокса, заключающийся в расширении фазового пространства состояний. Примеры применения данного метода можно увидеть в работах [68, 9, 91, 92, 103, 109]. Кроме того, известны метод интегро-дифференциальных уравнений Линдли-Такача-Севастьянова [8], а также матрично-аналитические методы [127, 87, 88, 75, 61, 108, 97, 101], получившие свое развитие в настоящее время.

Аналитическое решение обладает рядом положительных качеств: оно не привязано к определенным числовым значениям параметров потока системы и системы обслуживания, позволяет находить оптимальные решения и делать общие заключения. Однако во многих случаях аналитическое решение получить затруднительно, поскольку задача настолько сложна, что составление уравнений, к которым сводится задача, представляет практически неразрешимую задачу, в таких случаях применяют асимптотические методы [107], дающие приемлемые для применения на практике результаты. Так А.А. Боровков [7] разработал общий подход исследования СМО, суть которого заключается в предельных переходах в последовательностях случайных процессов, определяющих состояния систем при некоторых асимптотических условиях относительно длительностей обслуживания, потока требований и структуры системы. Кроме того, отметим метод асимптотического анализа, предложенный А. А. Назаровым [60]. Применение данного метода к СМО различных конфигураций изложено в работах И. Л. Лапатина [41], Е. А. Судыко [74], С. В. Лопуховой [49], И. А. Семеновой [71, 73, 72, 133] и других.

Первые исследования выходящих потоков, то есть потоков событий, закончивших свое обслуживание в СМО, были проведены E. Reich [130], P. D. Finch [98] и P. J. Burke [89], которые независимо друг от друга показали, что выходящий поток в системах, на вход которых поступает пуассоновский поток, и время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, также является пуассоновским. Исследованию выходящих потоков для СМО различного вида посвящены работы Н. В. Яровицкого [80, 79], Н. М. Акулиничева, Л. К. Горского [1], А. М. Александрова [2], D. J. Dalay [94, 95] и других. Для систем массового обслуживания с непуассоновским входящим потоком можно использовать методы имитационного моделирования или асимптотические методы. Например, в работах А. А. Назарова, И. Л. Лапатина [41-46] по исследованию выходящих потоков, определены условия, при которых выходящие потоки в бесконечнолинейных СМО с непуассоновскими входящими потоками являются пуассоновскими.

Системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов часто используют в качестве математических моделей социально-экономических и демографических процессов [58, 11, 55]. Как правило, в таких системах число потенциальных клиентов (страховых и торговых компаний, пенсионных фондов, банков и т.д.) считается неограниченным. Так, например, в своих работах А. С. Морозова [58], И. Р. Гарайшина [11], М. Г. Носова [63] использовали системы массового обслуживания с бесконечным числом обслуживающих устройств для описания математических моделей торговых компаний, процесса изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде и описания демографических процессов.

В реальных технических системах число обслуживающих приборов конечно, но в случае, когда вероятностью потери заявки можно пренебречь, такие системы можно аппроксимировать бесконечнолинейными СМО. В монографиях российских ученых Г. П. Башарина , П. П. Бочарова К. Е. Самуйлова [5], а также зарубежных специалистов E. Gelenbe [102], G. Pujolle [129], L. Kleinrock [38], A. Z. Melikov [50], M. Schneps-Schneppe, V. B. Iversen [135], дается подробный обзор современных приложений моделей СМО в области телекоммуникаций, современных компьютерных сетей и информационных систем.

Кроме классических систем массового обслуживания в качестве математических моделей реальных информационных, телекоммуникационных систем используются различные модификации, учитывающие специфику их работы, такие как пульсирующий трафик, параллельное обслуживание заявок [134, 124, 110, 116, 81, 86, 96], необходимость в повторном обслуживании [52, 56, 57] и т.д.

Одной из модификаций систем массового обслуживания являются системы с повторным обслуживанием заявок или системы с обратной связью [122]. Такие системы можно применять, как для описания социально-экономических процессов [58, 34], так и для описания процессов дообслуживания в информационных системах [128, 99, 126].

Среди моделей систем массового обслуживания с обратной связью различают два вида: модели с мгновенной обратной связью; модели с запаздывающей обратной связью.

В доступной литературе оба вида моделей были исследованы отдельно.

В работах И.С. Зарядова [33, 139] приводится исследование однолинейной СМО с рекуррентным входящим потоком заявок, время обслуживания заявки на приборе является случайной величиной, распределеннйо согласно экспоненциального закона распределения, накопителем неограниченной ёмкости и механизмом обновления с повторным обслуживанием – заявка, находящаяся на приборе, в момент окончания обслуживания с вероятностью p покидает систему, либо, с вероятностью $1–p$, остаётся в йен, при этом сбрасывая из накопителя все находящиеся в нём другие заявки.

В статье G.R. D’Avignon, R.L. Disney [93] рассматривается система массового обслуживания с одним обслуживающим устройством, двумя независимыми входящими потоками Пуассона, дающие два типа заявок, и мгновенной обратной связью. Каждый тип заявок имеет свое распределение времени обслуживания. Решение об обратной связи (получения повторного обслуживания) или ее отсутствии принимается в зависимости от типа заявки. В работе получены условия существования стационарного режима, найдены совместные и маргинальное распределения длины очереди.

СМО с неограниченным числом приборов, пуассоновским входящим потоком и повторными обращениями рассмотрены в работах [57, 52, 53]. Для аналогичных систем с произвольным временем обслуживания в работах [3, 56] предложен метод предельной декомпозиции, позволяющий свести исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания к исследованию совокупности однолинейных систем. К сожалению, данный метод можно применить только для исследования систем с пуассоновским входящим потоком [16].

Однако для описания информационных потоков в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах, как приведено в исследованиях W.E. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, D.V. Wilson, A. Klemm, C. Lindemann, M. Lohmann и других [119, 115], использование пуассоновского потока в качестве входящего дает большую погрешность при расчете характеристик качества обслуживания и рекомендуется использовать модели модулированных потоков [60, 12].

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию потоков в бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием требований и входящими *MMPP* и рекуррентным потоками заявок, а именно, развитию асимптотических методов исследования потоков обращений (повторных, суммарных) в рассматриваемых системах.

Цель и задачи исследования.

Цель работы – построение математических моделей суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований и разработка асимптотических методов их исследования.

В рамках поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

– построить математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований;

– разработать модификацию метода асимптотического анализа: для исследования потока повторных обращений и суммарного потока в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$, при предельном условии растущего времени обслуживания; для исследования суммарного потока обращений в системе $MMPP|M|\infty$, при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменениях состояний входящего потока;

– разработать комплекс проблемно-ориентированных программ для имитационного моделирования и численного анализа потоков в исследуемых системах.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем:

– впервые предложены математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, получены выражения для определения точных вероятностных характеристик числа занятых приборов в рассматриваемых системах;

– с помощью метода асимптотического анализа доказано, что при условии растущего времени обслуживания число занятых приборов в рассматриваемых системах можно аппроксимировать гауссовским распределением, за счет нахождения вида асимптотической характеристической функции третьего порядка удалось повысить точность аппроксимации и увеличить область применимости асимптотического метода в 2 раза;

– предложена модификация метода асимптотического анализа для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, доказано, что исследуемые потоки обращений при условии растущего времени обслуживания заявок в системе, а также при условии предельно частых изменений состояний входящего потока, является пуассоновскими с параметрами $\frac{r\lambda t}{1-r}$, $\frac{\lambda t}{1-r}$ соответственно, где параметр λ определяет интенсивность входящего потока;

– разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, при помощи которого проведена оценка области применимости полученных асимптотических результатов.

Положения и результаты, выносимые на защиту, состоят в следующем:

– математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований;

– модификация метода асимптотического анализа: для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$, при предельном условии растущего времени обслуживания; для исследования суммарного потока обращений в системе $MMPP|M|\infty$, при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменениях состояний входящего потока;

– единый вид характеристической функции распределения вероятностей числа заявок суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$, при предельном условии растущего времени обслуживания, а также при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменениях состояний входящего потока;

– оригинальный комплекс программ, для проведения численного анализа и имитационного моделирования потоков в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Методы исследования. Исследования, предложенные в настоящей диссертационной работе, проводились с использованием аппарата теории вероятностей и случайных процессов, дифференциальных уравнений и теории массового обслуживания.

Для исследования числа занятых приборов были использованы: метод начальных моментов; метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

Для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием заявок применяется метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

Для исследования суммарного потока в системе $MMPP|M|\infty$ был использован метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока.

Имитационное моделирование, как метод, позволяющий определить область применимости используемого метода асимптотического анализа.

С помощью методов математической статистики проводилась обработка результатов имитационного моделирования.

Результаты, представленные в работе, имеют как теоретическое, так и практическое значение.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии асимптотических методов для исследования потоков обращений в системах вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием. Доказано, что характеристическая функция числа заявок суммарного потока и потока повторных обращений в систему при условии растущего времени обслуживания имеет вид характеристической функции для распределения Пуассона и зависит только от интенсивности входящего потока, инвариантна по отношению к его типу. Полученные результаты можно отнести к теоремам о предельных пуассоновских потоках, что является вкладом в развитие теории массового обслуживания и позволяет расширить круг решаемых практических задач.

Практическая значимость работы. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для анализа характеристик и управления объектами, связанных с обслуживанием случайных требований. Полученные результаты могут быть применены для расчета вероятностно-временных характеристик телекоммуникационных и информационных систем, подсистем компьютерных сетей с целью повышения их производительности, а также для описания экономико-математических моделей торговых, страховых систем с целью определения оптимального режима их функционирования и максимизации дохода.

Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением математических выкладок, осуществленных с использованием аппарата теории вероятностей, корректностью методов исследования, что подтверждается согласованностью результатов работы с результатами, полученными ранее другими учеными, статистическими экспериментами, проведенными на основе имитационного моделирования исследуемых систем с помощью разработанного комплекса программ.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Задачи, изложенные в диссертационной работе, были поставлены научным руководителем. Автор лично участвовала в получении теоретических результатов, численном анализе и разработке комплекса проблемно-ориентированных программ.

Связь работы с крупным научным проектом. Значительная часть результатов, представленных в данной работе, была получена в рамках выполнения следующих научных проектов:

1) научный проект АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы)» Федерального агентства по образованию, проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи»;

2) научно-исследовательская работа в рамках госзадания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012 – 2013 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации» № 8.4055.2011;

3) научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (2014 – 2015г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 17 работ, в том числе

5 статей в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий и рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министер-

стве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций:

1. **Жидкова, Л. А. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17) . – С. 49–54.**
2. **Жидкова, Л. А. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322, № 5. – С. 5–9.**
3. **Жидкова, Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1 (26). – С. 53–62.**
4. **Задиранова, Л. А. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2 (31). – С. 26–34.**
5. **Задиранова, Л. А. Сравнение асимптотик второго и третьего порядка числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева – // Известия высших учебных заведений. Физика. –2015.–Т.11 (№60). – С. 172-177.**

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее вопросы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

- XV Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г. Анжеро-Судженск, 28-29 апреля 2011 г.

- X Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование», г. Анжеро-Судженск, 25-26 ноября 2011 г.

- XLIX Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, 16-20 апреля 2011 г.

- XII-XIV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование» г. Анжеро-Судженск, 2013-2015 гг.

- 52-й Международная научная студенческая конференция МНСК-2014. Математика, г. Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г.

- XVIII Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г. Анжеро-Судженск, 25-25 апреля 2014 г.

- 10 Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», г. Горно-Алтайск, 9-11 июня 2014 г.

- II-III Всероссийская молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», г. Томск, 2014-2015 гг.

- Международная научная конференция, посвященная 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева «Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения», г. Минск, 2014-2015 гг.

- 2-ая Международная школа молодых ученых «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», г. Анапа, 8-12 июня 2015 г.

- 18-я международная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь», г. Москва, 2015 г.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы (139 наименований). Общий объем работы – 150 страниц.

Во **введении** описаны актуальность, теоретическая и практическая значимость работы, цель и основные задачи исследования, а также приведено краткое изложение диссертации.

В **первой главе** исследуются математические модели суммарного потока и потока повторных обращений в марковских СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием требований.

В **параграфе 1.1.** исследуется математическая модель двумерного суммарного потока обращений к обслуживающим блокам в бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием кратных заявок пуассоновского с параметром λ потока, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки. Одна из заявок поступает в первый, а другая во второй обслуживающие блоки. Время обслуживания является случайной величиной, распределенной согласно экспоненциального закона с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. После обслуживания, заявка k-го блока, k=1, 2 с вероятностью $1-r_k$ покидает систему или с вероятностью r_k возвращается в нее для повторного обслуживания.

Состояние системы определяется вектором $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$, где $i_k(t)$ – число занятых приборов в k-ом блоке обслуживания в момент времени t, $m_k(t)$ – число заявок суммарного потока, обратившихся k - му блоку за время t.

Для распределения вероятностей четырехмерного процесса $P(i_1, i_2, m_1, m_2, t)=P\{i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2, m_1(t)=m_1, m_2(t)=m_2\}$ записана система дифференциальных уравнений Колмогорова, решение которой находится с помощью производящей функции вида

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}y_1^{m_1}y_2^{m_2}P(i_1,i_2,m_1,m_2,t).$$

Доказана теорема о том, что четырехмерная производящая функция $F\left(x_1, x_2, y_1, y_2, t\right)$ числа занятых приборов и суммарного числа заявок в блоках имеет вид

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$

$$+\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-$$

$$-\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-$$

$$-\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)}-\frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_2(1-r_2)}-$$

$$\left.-\lambda\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}+\lambda(y_1y_2-1)t\right\}.$$

Найдены основные вероятностные характеристики суммарного потока в рассматриваемой системе:

- математическое ожидание числа суммарных обращений к блокам

$$m_1(t)=\frac{\lambda}{1-r_1}t,\ \ m_2(t)=\frac{\lambda}{1-r_2}t\ .$$

- дисперсия числа суммарных обращений к блокам определяется выражениями

$$D_1\left(t\right)=\frac{\lambda\left(1+r_1\right)}{\left(1-r_1\right)^2}t-2\frac{\lambda r_1}{\mu_1\left(1-r_1\right)^3}\left(1-e^{-\mu_1\left(1-r_1\right)t}\right),$$

$$D_2\left(t\right)=\frac{\lambda\left(1+r_2\right)}{\left(1-r_2\right)^2}t-2\frac{\lambda r_2}{\mu_2\left(1-r_2\right)^3}\left(1-e^{-\mu_2\left(1-r_2\right)t}\right).$$

Кроме того, проведено исследование математической модели дохода многопродуктовой торговой компании при наличии маркетинговой политики. В качестве математической модели случайного процесса – изменения числа клиентов компании используется вышеприведенная СМО. На основании численных примеров определены условия, при которых доход торговых компаний достигает максимума.

В **параграфе 1.2.** предложен метод асимптотического анализа для исследования потока повторных обращений в системе $M|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Рассматривается двумерный марковский процесс $\{i(t), n(t)\}$, где $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $n(t)$ – число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного обслуживания.

Для распределений вероятностей $P(i,n,t) = P\{i(t) = i, n(t) = n\}$ записана система дифференциальных уравнений Колмогорова и для характеристических функций вида $H(u,w,t) = \sum_i \sum_n e^{jui} e^{jwn} P(i,n,t)$ получено дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial t} = \lambda(e^{ju} - 1)H(u,w,t) + j\mu(1 - re^{jw} - (1-r)e^{-ju})\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial u}.$$

Доказано, что асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок потока повторных обращений в рассматриваемую систему за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид

$$h(w,t) = M\{e^{jwn(t)}\} = \exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw} - 1)}{1-r}\right\}.$$

Аналогичные исследования проведены для суммарного потока обращений в систему – $m(t)$. Показано, что асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока в рассматриваемую систему за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид

$$h(v,t) = M\{e^{jvm(t)}\} = \exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv} - 1)}{1-r}\right\}.$$

Вторая глава посвящена исследованию бесконечнолинейных СМО с марковским модулированным пуассоновским, рекуррентным входящими потоками и повторным обслуживанием требований. А именно, разработке модификации метода асимптотического анализа для исследования потоков обращений в рассматриваемые системы.

Время обслуживания в указанных системах будем считать случайной величиной, имеющей экспоненциальный закон распределения вероятностей с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью 1–*r* покидает систему или с вероятностью *r* возвращается для повторного обслуживания.

В **параграфе 2.1.** исследуется число занятых приборов в системе с входящим *MMPP*-потоком, заданным управляющей цепью Маркова $k(t)=\overline{1,K}$ с матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=[q_{\nu k}],\, \nu,k=\overline{1,K}$, матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=diag[\lambda_k],\, k=\overline{1,K}$.

Доказана теорема о выражениях для моментов 1–3 порядка процесса *i*(*t*) – числа занятых приборов в рассматриваемой системе ($i(t)=0,1,2,...$).

Далее для исследования числа занятых приборов в рассматриваемой системе применяется метод асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания, то есть $\frac{1}{\mu}\to\infty$, или $\mu\to 0$.

Доказано, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе *MMPP*|*M*|∞, можно аппроксимировать гауссовским распределением со следующими параметрами

$$a=M\{i\}=\frac{\kappa_1}{\mu(1-r)},\; \sigma^2=M\left\{(i-a)^2\right\}=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\mu(1-r)},$$

где $\kappa_1=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}$, $\kappa_2=\mathbf{f}_2\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}$, вектор $\mathbf{f}_2$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}_2\mathbf{E}=0$ и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I})+\mathbf{f}_2\mathbf{Q}=0$.

На численных примерах, показано, что при уменьшении значения параметра μ, точность гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа занятых приборов в системе увеличивается. Отмечено, что при увеличении вероятности возвращения заявки в систему, точность аппроксимации также увеличивается.

Кроме того, доказана теорема о виде асимптотического приближения характеристической функции третьего порядка.

С помощью численных примеров, доказано, что применение асимптотики третьего порядка расширяет область применимости данного метода в два раза.

В **параграфе 2.2.** проводится исследование аналогичной системы массового обслуживания, на вход которой поступает рекуррентный поток (GI) заявок, заданный функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Доказана теорема, определяющая начальные моменты случайного процесса $i(t)$ – числа занятых приборов в системе.

С помощью метода асимптотического анализа, для характеристической функции числа занятых приборов построена гауссовская аппроксимация.

С помощью проведенного численного анализа, доказано, что в системах с повторным обслуживанием требований на область применимости асимптотического метода влияет не только время обслуживания заявок, но и вероятность их возвращения в систему, а именно, при увеличении вероятности возврата, область применимости увеличивается.

Результаты параграфов 2.1., 2.2. согласуются с известными результатами, что при высокой загрузке системы число занятых приборов имеет гауссовское распределение вероятностей, что показано в работах [73, 62, 60].

В параграфах 2.3.–2.4. изложены одни из главных результатов диссертационной работы, а именно, разработаны асимптотические методы исследования потоков повторных обращений в описанных системах.

В **параграфе 2.3.** проведено исследование потока повторных обращений в систему $MMPP|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Рассматривается трехмерная цепь Маркова $\{k(t), i(t), n(t)\}$, где $k(t)=\overline{1,K}$, $i(t), n(t)=0,1,2,...$ Для распределения вероятностей $P(k,i,n,t)=P\{k(t)=k, i(t)=i, n(t)=n\}$ записана система дифференциальных уравнений Колмогорова и осуществлен переход к частичным характеристическим функциям вида $H(k,u,w,t)=\sum\limits_i\sum\limits_n e^{jui}e^{jwn}P(k,i,n,t)$, для которых записано дифференциальное матричное уравнение вида

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}=\mathbf{H}(u,w,t)[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}],$$

где

$$\mathbf{H}(u,t)=[H(1,u,t),H(2,u,t),...,H(K,u,t)] \text{ – вектор-строка,}$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & \lambda_K\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK}\end{bmatrix}.$$

С помощью метода начальных моментов получены выражения, характеризующие математическое ожидание числа заявок потока повторных обращений в систему за время t, при её стационарном функционировании

$$M\{n(t)\}=rt\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)},$$

и второй момент числа заявок потока повторных обращений

$$M\{n^2(t)\}=r\mu[\mathbf{m}_1\mathbf{E}+2\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}]t,$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец.

Доказана теорема о том, что поток повторных обращений в рассматриваемой системе при условии растущего времени обслуживания имеет распределение Пуассона с параметром $\frac{r\kappa t}{1-r}$.

Аналогичные теоремы доказаны в **параграфе 2.4.** для системы $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

В **третьей главе** выполнено исследование суммарного потока обращений в системах $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Совокупность заявок, обратившихся в систему для повторного и первичного обслуживания, будем называть суммарным потоком обращений, далее – суммарный поток. Такие потоки могут быть использованы при проведении анализа потоков различных социально-экономических систем, где наблюдается эффект повторного обращения, например, потоков клиентов в различных торговых сетях, страховых компаний, справочных службах и т.д. [34]

Параграф 3.1. посвящен разработке асимптотических методов исследования суммарного потока в бесконечнолинейной системе с входящим *MMPP*-потоком и повторным обслуживанием требований.

Предлагается проводить исследование потока при асимптотическом условии растущего времени обслуживания, то есть $\frac{1}{\mu}\to\infty$, или $\mu\to 0$.

Доказано, что асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид характеристической функции для распределения Пуассона с параметром $\frac{\kappa t}{1-r}$.

В **параграфе 3.2.** проводится аналогичное исследование с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока.

Параграф 3.3. посвящен исследованию суммарного потока в системе $GI|M|\infty$ методом асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

В **четвертой главе** приводится описание комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения численного анализа и имитационного моделирования потоков в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Были разработаны численные алгоритмы для реализации методов нахождения начальных моментов и асимптотического анализа бесконечнолинейных систем с повторным обслуживанием требований.

Кроме того, для определения области применимости метода асимптотического анализа, был разработан программный модуль имитационного моделирования рассматриваемых систем и потоков. Представлен анализ численных и статистических результатов проведенного имитационного моделирования.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе настоящей диссертационной работы.

Глава 1

Математические модели потоков в марковских СМО с повторным обслуживанием требований

СМО с неограниченным числом приборов и повторным обращением требований, применяются для описания процессов различных социально-экономических систем. В частности, для описания процесса, описывающего изменение числа клиентов торговой компании [55].

Клиенты любой торговой компании можно разбить на два типа: впервые обратившиеся в компанию и постоянные покупатели, то есть повторно совершающие покупки. Так как решение посетить магазин покупатели принимают независимо друг от друга и, в общем случае, интенсивность посещения постоянна, то поток первичных клиентов можно считать стационарно пуассоновским, то есть простейшим.

При возникновении потребности в очередной покупке (через некоторые промежутки времени, которые являются случайными величинами) клиент по каким-либо причинам обращается в эту же торговую компанию или выбирает другую. Потенциальное число клиентов, которые могут обратиться в магазин практически неограниченно.

Заметим, что вероятность возвращения клиентов в торговую компанию зависит от многих факторов, в том числе – проведение различных акций по стимулированию продаж (скидки, подарки, распродажи,).

Таким образом, в качестве математической модели торговой компании можно использовать бесконечнолинейные СМО с повторным обслуживанием требований.

В настоящей главе приведено исследование потоков в марковской системе вида $M|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований. Также построена и исследована математическая модель изменения числа клиентов двухпродуктовой торговой компании в виде бесконечнолинейной СМО с двумя блоками обслуживания.

1.1 Исследование марковских СМО с повторным обслуживанием требований

1.1.1 Основные результаты исследования системы M|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств, на вход которой поступает простейший поток с параметром λ.

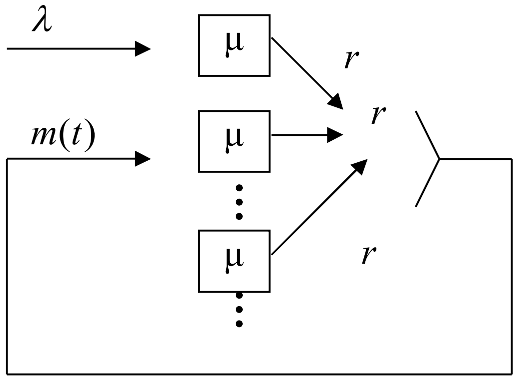


Рисунок 1.1. – СМО с повторным обслуживанием требований

Время обслуживания на каждом приборе является случайной величиной, распределенной согласно экспоненциального закона с параметром μ, одинаковым для всех приборов. Заявка, завершившая обслуживание, с вероятностью $1-r$ покидает систему, или, с вероятностью r, обращается в неё для повторного обслуживания.

Обозначим:

$i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t;

$n(t)$ – число заявок потока повторных обращений в систему за время t;

$m(t)$ – число заявок суммарного потока обращений в систему за время t.

В работе [55] получены аналитические выражения производящей функции для каждого из потоков.

Замечание 1.1. *Производящая функция* $G(x,t)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x^i P(i,t)$ *распределение вероятностей* $P(i,t)=P\{i(t)=i\}$ *случайного процесса* $i(t)$ *– числа приборов, занятых в момент времени t в системе M|M|∞ с повторным обслуживанием требований, имеет вид*

$$G(x,t)=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu(1-r)}(x-1)(1-e^{-\mu(1-.r)t}\right\}. \qquad (1.1)$$

Замечание 1.2. *Производящая функция* $G(y,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^n P(n,t)$ *распределения вероятностей* $P(n,t)$ *случайного процесса* $n(t)$ *– числа заявок потока повторных обращений в систему M|M|∞ с повторным обслуживанием требований за время* t*, имеет вид*

$$G(y,t)=\exp\left\{\lambda r\frac{y-1}{1-ry}t-\frac{\lambda r^2}{\mu(1-r)}\frac{(y-1)^2}{(1-ry)^2}\left(1-e^{-\mu(1-ry)t}\right)\right\}. \qquad (1.2)$$

Замечание 1.3. *Производящая функция* $G(y,t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}y^m P(m,t)$ *распределения вероятностей* $P(m,t)$ *случайного процесса* $m(t)$ *– числа заявок суммарного потока обращений в СМО вида M|M|∞ с повторным обслуживанием требований за время* t*, имеет вид*

$$G_0(y,t)=\exp\left\{\lambda\frac{y-1}{1-ry}t-\frac{\lambda r}{\mu(1-r)}\left(\frac{y-1}{1-ry}\right)^2\left(1-e^{-\mu(1-ry)t}\right)\right\}. \qquad (1.3)$$

1.1.2 Исследование суммарного потока в системе $M^{(2)}|M^{(2)}|\infty$ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с двумя блоками обслуживания, состоящими из неограниченного числа обслуживающих устройств

(Рисунок 1.2.). На вход системы поступает простейший с параметром λ поток сдвоенных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки.

Одна из заявок поступает в первый, а другая во второй обслуживающие блоки. Время обслуживания является случайной величиной, распределенной согласно экспоненциального закона с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. После обслуживания, заявка k-го блока, k=1, 2 с вероятностью $1-r_k$ покидает систему, или, с вероятностью r_k, возвращается в нее для повторного обслуживания.

Обозначим $i_k(t)$ – число занятых приборов в k-ом (k=1, 2) блоке в момент времени t, $m_k(t)$ – число заявок суммарного потока, обратившихся k-му (k=1, 2) блоку за время t, как из внешнего источника, так и для повторного обслуживания. Полученный четырехмерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$ является марковским.

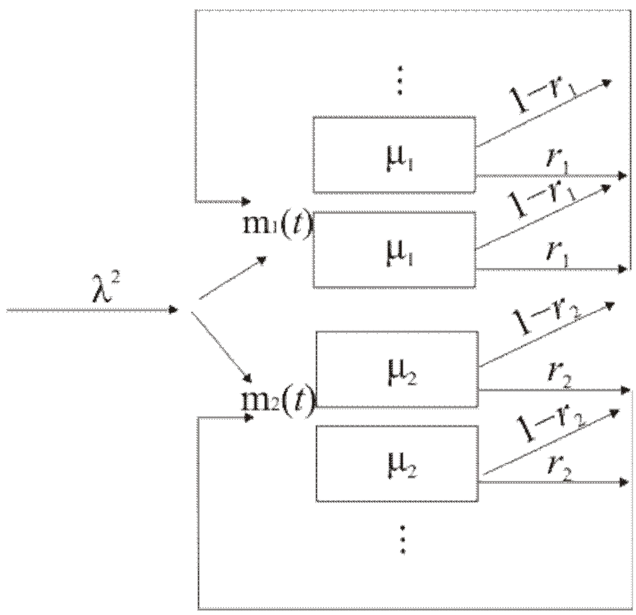


Рисунок 1.2. – СМО с параллельным обслуживанием сдвоенных заявок и повторными обращениями к блокам

Ставится задача исследования двумерного суммарного потока обращений к каждому блоку обслуживания.

Для решения поставленной задачи, сформулируем и докажем вспомогательное утверждение касательно производящей функции числа занятых приборов в момент времени t в системе $M^{(2)}|M^{(2)}|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Лемма 1.1. *Производящая функция* $G(x_1,x_2,t)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}P(i_1,i_2,t)$ *двумерного процесса* $\{i_1(t), i_2(t)\}$ *– числа занятых приборов в системе* $M^{(2)}|M^{(2)}|\infty$ *с повторным обслуживанием требований в момент времени t, имеет вид*

$$G(x_1,x_2,t)=\exp\left\{\lambda(x_1-1)(x_2-1)\frac{(1-e^{-[\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)]t})}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-\right.$$

$$\left.-\lambda(x_1-1)\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1)t})}{\mu_1(1-r_1)}-\lambda(x_2-1)\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2)t})}{\mu_2(1-r_2)}\right\}. \qquad (1.4)$$

Доказательство.

Рассмотрим двумерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$, характеризующий число занятых приборов в системе в момент времени t. Для его распределения вероятностей $P(i_1, i_2, t)=P\{i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2,\}$, $i_1=0, 1, \ldots, i_2=0, 1, \ldots$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(i_1,i_2,t)}{\partial t}+(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2)P(i_1,i_2,t)=\lambda P(i_1-1,i_2-1,t)+i_2\mu_2r_2P(i_1,i_2,t)+$$
$$+i_1\mu_1r_1P(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\mu_1(1-r_1)P(i_1+1,i_2,t).+(i_2+1)\mu_2(1-r_2)P(i_1,i_2+1,t).$$

Определим производящую функцию вида

$$G(x_1,x_2,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}P(i_1,i_2,t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции $G(x_1, x_2, t)$

$$\frac{\partial G(x_1,x_2,t)}{\partial t}+\mu_1(x_1-1)(1-r_1)\frac{\partial G(x_1,x_2,t)}{\partial x}+$$

$$+\mu_2(x_2-1)(1-r_2)\frac{\partial G(x_1,x_2,t)}{\partial x}=\lambda(x_1x_2-1)G(x_1,x_2,t). \qquad (1.5)$$

Запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1(1-r_1)(x_1-1)}=\frac{dx_2}{\mu_2(1-r_2)(x_2-1)}=\frac{dG(x_1,x_2,t)}{\lambda(x_1x_2-1)G(x_1,x_2,t)}.$$

Решая два первых интеграла этой системы, получим следующие выражения

$$x_1-1=C_1e^{\mu_1(1-r_1)t},$$

$$C_1=\left(x_1-1\right)e^{-\mu_1(1-r_1)t},$$

$$x_2-1=C_2e^{\mu_2(1-r_2)t},$$

$$C_2=\left(x_2-1\right)e^{-\mu_2(1-r_2)t}.$$

Последний интеграл найдем из уравнения

$$dt=\frac{dG(x_1,x_2,t)}{\lambda(x_1x_2-1)G(x_1,x_2,t)}.$$

Тогда общее решение $G(x_1,x_2,t)$ запишем в виде

$$G(x_1,x_2,t)=\Phi(C_1,C_2)\exp\left\{\lambda C_1C_2\frac{(e^{[\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)]t}-1)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-\lambda C_1\frac{(e^{\mu_1(1-r_1)t}-1)}{\mu_1(1-r_1)}-\lambda C_2\frac{(e^{\mu_2(1-r_2)t}-1)}{\mu_2(1-r_2)}\right\}.$$

Для определения частного решения уравнения (1.5) воспользуемся начальными условиями

$$G(x_1,x_2,0)=\begin{cases}1,\ i_1=i_2=0\\0,\ \textit{иначе}\end{cases}.$$

Учитывая которые, имеем

$$\Phi(x_1-1_1,x_2-1)=1,$$

тогда функция $G(x_1,x_2,t)$ принимает вид

$$G(x_1,x_2,t)=\exp\left\{\lambda(x_1-1)(x_2-1)\frac{(1-e^{-[\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)]t})}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-\right.$$

$$-\lambda(x_1-1)\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1)t})}{\mu_1(1-r_1)}-\lambda(x_2-1)\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2)t})}{\mu_2(1-r_2)}\Bigg\}.$$

Теорема доказана.

Из выражения для функции $G(x_1,x_2,t)$ нетрудно получить вид производящей функции для стационарного распределения вероятностей двумерного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$

$$g(x_1,x_2)=\exp\left\{\lambda\left[\frac{(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-\frac{(x_1-1)}{\mu_1(1-r_1)}-\frac{(x_2-1)}{\mu_2(1-r_2)}\right]\right\}. \qquad (1.6)$$

На основе леммы 1.1. докажем теорему о виде производящей функции четырехмерного процесса $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$.

Теорема 1.1. *Производящая функция $F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)$ четырехмерного процесса $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$ числа занятых приборов и заявок суммарного потока обращений к каждому блоку обслуживания системы $M^{(2)}|M^{(2)}|\infty$ за время t имеет вид*

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$

$$+\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-$$

$$-\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-$$

$$-\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)}-\frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_2(1-r_2)}-$$

$$\left.-\lambda\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}+\lambda(y_1y_2-1)t\right\}. \quad (1.7)$$

Доказательство.

Для распределения вероятностей $P(i_1, i_2, m_1, m_2, t)=P\{i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2, m_1(t)=m_1, m_2(t)=m_2\}$ четырехмерного процесса $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$, где i_1, i_2, m_1, m_2 = 0, 1, …, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(i_1,i_2,m_1,m_2,t)}{\partial t} = -(\lambda + i_1\mu_1 + i_2\mu_2)P(i_1,i_2,m_1,m_2,t) +$$

$$+i_1\mu_1 r_1 P(i_1,i_2,m_1-1,m_2,t) + i_2\mu_2 r_2 P(i_1,i_2,m_1,m_2-1,t) +$$

$$+\lambda P(i_1-1,i_2-1,m_1-1,m_2-1,t) + \mu_1(i_1+1)(1-r_1)P(i_1+1,i_2,m_1,m_2,t) +$$

$$+\mu_2(i_2+1)(1-r_2)P(i_1,i_2+1,m_1,m_2,t).$$

Определим производящую функцию распределения вероятностей $P(i_1, i_2, m_1, m_2, t)$ в виде

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} P(i_1,i_2,m_1,m_2,t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции $F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_1}\big(\mu_1 x_1(1-r_1 y_1) - \mu_1(1-r_1)\big) +$$

$$+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_2}\big(\mu_2 x_2(1-r_2 y_2) - \mu_2(1-r_2)\big) =$$

$$= \lambda(x_1 x_2 y_1 y_2 - 1)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t).$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\mu_1 x_1(1-r_1 y_1) - \mu_1(1-r_1)} = \frac{dx_2}{\mu_2 x_2(1-r_2 y_2) - \mu_2(1-r_2)} =$$

$$= \frac{dF(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\lambda(x_1 x_2 y_1 y_2 - 1)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}.$$

Найдем два первых интеграла этой системы. Один из них найдем из уравнения

$$dt = \frac{dx_1}{\mu_1 x_1\left(1 - r_1 y_1\right) - \mu_1\left(1 - r_1\right)},$$

очевидно, имеем

$$\mu_1(1 - r_1 y_1)dt = \frac{dx_1}{x_1 - \dfrac{1 - r_1}{1 - r_1 y_1}},$$

откуда получим выражения

$$x_1 = \frac{1 - r_1}{1 - r_1 y_1} - C_1 e^{\mu_1(1 - r_1 y_1)t},$$

$$C_1 = \left(\frac{1 - r_1}{1 - r_1 y_1} - x_1\right) e^{-\mu_1(1 - r_1 y_1)t}.$$

Следующий интеграл найдем из уравнения

$$dt = \frac{dx_2}{\mu_2 x_2\left(1 - r_2 y_2\right) - \mu_2\left(1 - r_2\right)},$$

решая которое, имеем

$$\mu_1(1 - r_1 y_1)dt = \frac{dx_1}{x_1 - \dfrac{1 - r_1}{1 - r_1 y_1}},$$

откуда получим выражения

$$x_2 = \frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} - C_2 e^{\mu_2(1 - r_2 y_2)t},$$

$$C_2 = \left(\frac{1 - r_2}{1 - r_2 y_2} - x_2\right) e^{-\mu_2(1 - r_2 y_2)t}.$$

Последний интеграл найдем из уравнения

$$dt = \frac{dF(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\lambda\left(x_1 x_2 y_1 y_2 - 1\right) F\left(x_1, x_2, y_1, y_2, t\right)},$$

для удобства перепишем данное уравнение в следующем виде

$$\lambda dt = \frac{dF(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{[(x_1 - 1)(x_2 - 1)y_1 y_2 + (x_1 - 1)y_1 y_2 + (x_2 - 1)y_1 y_2 + (y_1 y_2 - 1)]F\left(x_1, x_2, y_1, y_2, t\right)}.$$

Тогда

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=C_3\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$
$$+\lambda C_1C_2\frac{(\mathrm{e}^{[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-\lambda C_1\frac{(e^{\mu_1(1-r_1y_1)t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)}\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)-$$
$$\left.-\lambda C_2\frac{(e^{\mu_2(1-r_2y_2)t}-1)}{\mu_2(1-r_2y_2)}\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)+\lambda(y_1y_2-1)t\right\},$$

где $C_3=\Phi(C_1,C_2)$– произвольная дифференцируемая функция.

Общее решение $F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$ перепишем в виде

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\Phi(C_1,C_2)\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$
$$+\lambda C_1C_2\frac{(\mathrm{e}^{[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-\lambda C_1\frac{(e^{\mu_1(1-r_1y_1)t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)}\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)-$$
$$\left.-\lambda C_2\frac{(e^{\mu_2(1-r_2y_2)t}-1)}{\mu_2(1-r_2y_2)}\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)+\lambda(y_1y_2-1)t\right\}.$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2, общее решение уравнения можно записать следующим образом

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\Phi\left(\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t},\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$
$$+\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\frac{(\mathrm{e}^{[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-$$
$$-\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\frac{(e^{\mu_1(1-r_1y_1)t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)}\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)-$$
$$\left.-\lambda\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\frac{(e^{\mu_2(1-r_2y_2)t}-1)}{\mu_2(1-r_2y_2)}\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)+\lambda(y_1y_2-1)t\right\}. \quad (1.8)$$

Вид функции $\Phi(u_1,u_2)$ определим из начального условия

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,0)=g(x_1,x_2),$$

где $g(x_1, x_2)$ – производящая функция стационарного двумерного распределения числа занятых приборов в блоках обслуживания.

Из (1.8) имеем

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, 0) = \Phi\left(\frac{1-r_1}{1-r_1 y_1} - x_1, \frac{1-r_2}{1-r_2 y_2} - x_2\right).$$

Отсюда получим

$$\Phi\left(\frac{1-r_1}{1-r_1 y_1} - x_1, \frac{1-r_2}{1-r_2 y_2} - x_2\right) = \exp\left\{\frac{\lambda(1-x_1)(1-x_2)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} - \frac{\lambda(1-x_1)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda(1-x_2)}{\mu_2(1-r_2)}\right\}.$$

Обозначим

$$\frac{1-r_1}{1-r_1 y_1} - x_1 = u_1,$$

$$\frac{1-r_2}{1-r_2 y_2} - x_2 = u_2,$$

откуда

$$\frac{1-r_1}{1-r_1 y_1} - u_1 = x_1, \qquad \frac{1-r_2}{1-r_2 y_2} - u_2 = x_2.$$

Следовательно, функция $\Phi(u_1, u_2)$ имеет следующий вид

$$\Phi(u_1,u_2) = \left\{\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1 y_1} - u_1\right)\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2 y_2} - u_2\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} - \frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1 y_1} - u_1\right)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2 y_2} - u_2\right)}{\mu_2(1-r_2)}\right\},$$

тогда

$$\Phi\left(\left(\frac{1-r_1}{1-r_1 y_1} - x_1\right) e^{-\mu_1(1-r_1 y_1)t}, \left(\frac{1-r_2}{1-r_2 y_2} - x_2\right) e^{-\mu_2(1-r_2 y_2)t}\right) =$$

$$=\left\{\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)}-\frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_2(1-r_2)}\right\}.$$

Подставив выражение для функции $\Phi(u_1,u_2)$ в (1.8), получим производящую функцию числа занятых приборов и числа заявок суммарного потока к блокам в виде

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right)y_1y_2t+\right.$$

$$+\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-$$

$$-\lambda\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-$$

$$-\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{1-r_1y_1}-\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\right)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\right)}{\mu_1(1-r_1)}-\frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{1-r_2y_2}-\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\right)}{\mu_2(1-r_2)}-$$

$$\left.-\lambda\left(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\right)\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}+\lambda(y_1y_2-1)t\right\}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Производящая функция $F(y_1,y_2,t)$ двумерного процесса $\{m_1(t), m_2(t)\}$ числа заявок суммарного потока обращений к каждому блоку обслуживания системы $M^{(2)}|M^{(2)}|\infty$ за время t имеет вид*

$$
\begin{aligned}
F(y_1,y_2,t) = \exp\Bigg\{ & \lambda\left(\frac{r_1 r_2 (y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} + \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1} + \frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right) y_1y_2 t + \\
& +\lambda \frac{r_1r_2(1-y_1)(1-y_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} \frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{(\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2))} - \\
& -\lambda \frac{r_1(1-y_1)}{(1-r_1y_1)}\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)+ \\
& +\frac{\lambda\left(\frac{r_1r_2(1-y_1)(1-y_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}(1+e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})(1+e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} - \\
& -\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{(1-r_1y_1)}(1+e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})\right)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{(1-r_2y_2)}(1+e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})\right)}{\mu_2(1-r_2)} - \\
& -\lambda\frac{r_2(1-y_2)}{(1-r_2y_2)}\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)+\lambda(y_1y_2-1)t\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Доказательство.

Учитывая $F(y_1,y_2,t) = F(1,1,y_1,y_2,t)$, получим производящую функцию суммарного числа заявок суммарного потока обращений в рассматриваемой системе вида

$$
\begin{aligned}
F(y_1,y_2,t) = \exp\Bigg\{ & \lambda\left(\frac{r_1 r_2 (y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} + \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1} + \frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\right) y_1y_2 t + \\
& +\lambda \frac{r_1r_2(1-y_1)(1-y_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} \frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{(\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2))} - \\
& -\lambda \frac{r_1(1-y_1)}{(1-r_1y_1)}\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)+ \\
& +\frac{\lambda\left(\frac{r_1r_2(1-y_1)(1-y_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}(1+e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})(1+e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} - \\
& -\frac{\lambda\left(\frac{r_1(1-y_1)}{(1-r_1y_1)}(1+e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})\right)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda\left(\frac{r_2(1-y_2)}{(1-r_2y_2)}(1+e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})\right)}{\mu_2(1-r_2)} -
\end{aligned}
$$

$$-\lambda\frac{r_2(1-y_2)}{(1-r_2y_2)}\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)+\lambda(y_1y_2-1)t\Bigg\}.$$

Следствие доказано.

Выражение для производящей функции позволяет получить основные вероятностные характеристики, рассматриваемых процессов. Например, математическое ожидание числа заявок суммарного потока обращений к блокам определяется выражениями

$$m_1(t)=\frac{\lambda}{1-r_1}t,$$

$$m_2(t)=\frac{\lambda}{1-r_2}t,$$

дисперсия числа заявок суммарного потока обращений к блокам определяется выражениями

$$D_1(t)=\frac{\lambda(1+r_1)}{(1-r_1)^2}t-2\frac{\lambda r_1}{\mu_1(1-r_1)^3}\left(1-e^{-\mu_1(1-r_1)t}\right),$$

$$D_2(t)=\frac{\lambda(1+r_2)}{(1-r_2)^2}t-2\frac{\lambda r_2}{\mu_2(1-r_2)^3}\left(1-e^{-\mu_2(1-r_2)t}\right).$$

1.1.3 Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде СМО с повторным обслуживанием требований

В настоящее время разработаны экономико-математические модели торговых компаний, учитывающих различные методы стимулирования, но, как правило, для однопродуктовых компаний не учитывается возможность приобретения товаров различных типов (продовольственные и непродовольственные).

В данном параграфе предлагается экономико-математическая модель торговой компании в виде системы массового обслуживания с двумя блоками обслуживания для различных видов товаров (продовольственные и непродовольственные).

Всех покупателей торговой компании можно разделить на два вида:

- покупатели, впервые обратившиеся в торговую компанию;
- покупатели, повторно обратившиеся в торговую компанию (постоянные клиенты).

Пусть поток клиентов впервые обращающиеся в торговую компанию является простейшим. Будем считать, что каждый покупатель, впервые обращающийся в торговую компанию, покупает оба вида товара. Число потенциальных клиентов компании можно считать неограниченным. Каждый клиент совершает покупки через некоторые промежутки времени, продолжительности которых являются значениями случайной неотрицательной величиной, которая имеет экспоненциальное распределение. После совершения покупки клиент в течение некоторого случайного времени не нуждается в товарах того или иного типа, а при необходимости выбирает возвратиться ему в ту же торговую компанию или обратиться в другую.

Очевидно, что возвращение покупателей в торговую компанию зависит от многих факторов, например, от расположения, наличия конкурентов, эксклюзивности товара и др. Все вышеуказанные факторы являются постоянными, поэтому вероятность возврата клиентов можно рассчитать для каждой торговой компании. В тоже время различные мероприятия по стимулированию продаж способствуют увеличению числа потенциальных покупателей, обращающихся в торговую компанию, то есть вероятность возврата клиентов будет зависеть от различных факторов, например скидки, рекламы, распродажи, подарка и т.д.

Рассматривается торговая компания, которая в целях привлечения клиентов проводит акцию «подарок за покупку». При этом преследуются следующие цели:

- дать потребителю дополнительное количество товара, что принципиально отличается от снижения цен, целью которого является экономия денег;
- придать более разносторонний и предметный характер контактам между производителем и потребителем.

Ставится задача увеличения дохода торговой компании в результате проведения маркетинговой акции «подарок за покупку».

Определим влияние наличия маркетинговой программы на прибыль компании.

Рассмотрим торговую компанию (магазин), в которой продаются две группы товаров (продовольственные и не продовольственные). Число клиентов практически неограниченно. Кроме этого, предоставляемые компанией подарки при совершении покупки, обеспечивают возможное повторное обращение клиента в эту компанию (магазин). Для таких компаний определяющее значение имеет процесс изменения числа клиентов с учетом повторных обращений. В качестве математической модели поставленной задачи будем рассматривать СМО с двумя блоками обслуживания и повторным обращением.

Поток клиентов – случайный двумерный процесс $\{m_1(t), m_2(t)\}$, где $m_1(t)$ характеризует суммарное число клиентов, обратившихся в первый блок, а $m_2(t)$ во второй блок.

Определение основных характеристик дохода компании.

Пусть компания при каждом первичном обращении и совершении покупки первого типа получает доход в размере значения неотрицательной случайной величины ξ_1 с функцией распределения $A_1(x) = P\{\xi_1 < x\}$, и конечными моментами первого и второго порядка, а при совершении покупки второго типа компания получает доход в размере значения неотрицательной случайной величины ξ_2 с функцией распределения $A_2(x) = P\{\xi_2 < x\}$. Обозначим $S(t)$ – суммарный доход, получаемый компанией за время t. Пусть $(1-\delta_i)$, i=1, 2 – отношение стоимости подарка к средней стоимости покупки в каждом блоке

$$S(t)=\sum_{k=1}^{m_1(t)}\xi_1\delta_1+\sum_{l=1}^{m_2(t)}\xi_2\delta_2\,.$$

Рассмотрим функцию $H(\alpha,t)=Me^{-\alpha S(t)}$, тогда

$$H(\alpha,t)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\left(Me^{-\alpha\xi_1\delta_1}\right)^{m_1}\times\left(Me^{-\alpha\xi_2\delta_2}\right)^{m_2}P(m_1,m_2,t)\,.$$

Обозначив $Me^{\alpha\xi_1\delta_1}=\varphi_1(\delta_1\alpha)$ и $Me^{\alpha\xi_2\delta_2}=\varphi_2(\delta_2\alpha)$, получим

$$H(\alpha,t)=M\left\{\varphi_2(\delta_1\alpha)^{m_1(t)}\varphi_2(\delta_2\alpha)^{m_2(t)}\right\}.$$

Учитывая (1.7)

$$\begin{aligned}H(\alpha,t)=F(\varphi_1(\delta_1\alpha),\varphi_2(\delta_2\alpha),t)=\exp\Bigg\{\lambda\Bigg(&\frac{r_1r_2(\varphi_1(\delta_1\alpha)-1)(\varphi_2(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi_1(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi_2(\delta_2\alpha))}+\\
&+\frac{r_1(\varphi_1(\delta_1\alpha)-1)}{1-r_1\varphi_1(\delta_1\alpha)}+\frac{r_2(\varphi_2(\delta_2\alpha)-1)}{1-r_2\varphi_2(\delta_2\alpha)}\Bigg)\varphi_1(\delta_1\alpha)\varphi_2(\delta_2\alpha)t+\\
&+\lambda\frac{r_1r_2(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-\exp^{-[\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))]t})}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)))}+\\
&+\lambda\frac{r_1r_2(\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))(\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2))}+\\
&+\lambda\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}\left(\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+\\
&+\lambda\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}\left(\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+\\
&+\lambda\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{\mu_1(1-r_1)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}+\\
&+\lambda\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{\mu_2(1-r_2)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\lambda(\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)-1)t\Bigg\}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Для нахождения числовых характеристик S(t), воспользуемся свойствами характеристической функции $\frac{\partial H(\alpha,t)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = -M\{S(t)\}$.

Дифференцируем (1.9) по α

$$\frac{\partial H(\alpha,t)}{\partial\alpha} = \lambda\Bigg[\Bigg(\frac{r_1 r_2\{[\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(\varphi(\delta_1\alpha)-1)]\times}{}$$

$$\frac{\times(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+[r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\varphi)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}$$

$$\frac{+r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))](\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)\}}{}+$$

$$+\frac{r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+r_1^2\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}+$$

$$+\frac{r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+r_2^2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}\Bigg)\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)t+$$

$$+\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\left(\frac{r_1r_2(\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{1-r_1\varphi(\delta_1\alpha)}+\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)}\right)+$$

$$+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)\varphi(\delta_1\alpha)\left(\frac{r_1r_2(\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{1-r_1\varphi(\delta_1\alpha)}+\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)}\right)+$$

$$+r_1r_2\Bigg(\Bigg(\frac{-[\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-\varphi(\delta_2\alpha))+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-\varphi(\delta_1\alpha))](1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+}{}$$

$$\frac{+[r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\varphi)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))](1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}\Bigg)\times$$

$$\times\frac{(1-e^{-[\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))]t})}{\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\frac{(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_1\alpha))}\times$$

$$\times\frac{-e^{-[\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))]t}(\mu_1r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)+\mu_2r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha))\times}{(\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)))^2}$$

$$\frac{\times(\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)))t+(1-e^{-[\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))]t})\times}{}$$

$$\left.\frac{\times(\mu_1 r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)+\mu_2 r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha))t}{}\right)+$$

$$+\frac{r_1[\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t}-1)-\mu_1 r_1^2\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-\varphi(\delta_1\alpha))\cdot t\cdot e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t}]\times}{\mu_1^2(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^4}$$

$$\frac{\times\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2+2\mu_1 r_1^2\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{}\times$$

$$\times\left(\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))})}{\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}\times$$

$$\times\left(\frac{r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+r_2^2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}+\right.$$

$$\left.+\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)\varphi(\delta_1\alpha)\right)+$$

$$+\frac{r_1 r_2}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}\left[\left(\frac{(\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(\varphi(\delta_1\alpha)-1))\times}{}\right.\right.$$

$$\frac{\times(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+[r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))+}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}$$

$$\left.\frac{+r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))](1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha)))}{}\right)\times$$

$$\times(1-e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})(1-e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})+\frac{(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}\times$$

$$\times\Big(\mu_1 r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))})+$$

$$\left.\left.+\mu_2 r_2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))})\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\mu_1(1-r_1)}\left(\frac{\delta_1\mathrm{r}_1\varphi'(\delta_1\alpha)(\mathrm{r}_1\varphi(\delta_1\alpha)-1)+r_1^2\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-\varphi(\delta_1\alpha))}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}\times\right.$$

$$\left.\times(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})+\mu_1 r_1^2\delta_1\varphi'(\varphi(\delta_1\alpha))\frac{(1-\varphi(\delta_1\alpha))t}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}\right]+$$

$$+\frac{1}{\mu_2(1-r_2)}\left(\frac{\delta_2\mathrm{r}_2\varphi'(\delta_2\alpha)(\mathrm{r}_2\varphi(\delta_2\alpha)-1)+r_2^2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-\varphi(\delta_2\alpha))}{(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}\times\right.$$

$$\times(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})+\mu_2 r_2^2\delta_2\varphi'(\varphi(\delta_2\alpha))\frac{(1-\varphi(\delta_2\alpha))t}{(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}\Bigg]+$$

$$+\frac{r_2[\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t}-1)-\mu_2 r_2^2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-\varphi(\delta_2\alpha))\cdot t\cdot e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t}]\times}{\mu_2^2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^4}$$

$$\frac{\times\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2+2\mu_2 r_2^2\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{}\times$$

$$\times\left(\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{1-r_1\varphi(\delta_1\alpha)}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))})}{\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}\times$$

$$\times\left(\frac{r_1\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+r_1^2\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}+\right.$$

$$\left.+\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)\varphi(\delta_1\alpha)\right)+(\delta_1\varphi'(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)+\delta_2\varphi'(\delta_2\alpha)\varphi(\delta_1\alpha))t\Bigg]\times$$

$$\times\exp\left\{\lambda\left(\frac{r_1r_2(\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{1-r_1\varphi(\delta_1\alpha)}+\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)}\right)\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)t+$$

$$+\lambda\frac{r_1r_2(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-\exp^{-[\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))]t})}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)))}+$$

$$+\lambda\frac{r_1r_2(\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))(\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2))}+$$

$$+\lambda\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}\left(\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+$$

$$+\lambda\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}\left(\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+$$

$$+\lambda\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{\mu_1(1-r_1)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}+$$

$$\left.+\lambda\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{\mu_2(1-r_2)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\lambda(\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)-1)t\right\}.$$

Учитывая что

$$\varphi_1(0)=1,\ \varphi_1'(0)=a_1,$$

$$\varphi_2(0)=1,\ \varphi_2'(0)=a_2,$$

получим

$$\frac{\partial H(\alpha,t)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\lambda t\left(\frac{r_1\delta_1 a_1}{1-r_1}+\frac{r_2\delta_2 a_2}{1-r_2}+a_1\delta_1+a_2\delta_2\right).$$

Следовательно, математическое ожидание дохода торговой компании имеет вид

$$MS(t)=\lambda t\left(a_1\delta_1\left(\frac{r_1}{1-r_1}+1\right)+a_2\delta_2\left(\frac{r_2}{1-r_2}+1\right)\right). \qquad (1.10)$$

Исследование влияния наличия маркетинговой программы (предоставление подарка) на доход торговой компании.

Определим оптимальное отношение стоимости к средней стоимости покупки для получения максимального дохода компании.

Разложим выражение (1.10) на две части

$$MS(t)=\lambda t(a_1\delta_1+a_2\delta_2)+\lambda t\left(\frac{a_1\delta_1 r_1(\delta_1)}{1-r_1(\delta_1)}+\frac{a_2\delta_2 r_2(\delta_2)}{1-r_2(\delta_2)}\right).$$

Так как интенсивность входящего потока задана изначально и фиксирована, рассмотрим функцию

$$f(\delta_1,\delta_2)=a_1\delta_1+a_2\delta_2+\frac{a_1\delta_1 r_1(\delta_1)}{1-r_1(\delta_1)}+\frac{a_2\delta_2 r_2(\delta_2)}{1-r_2(\delta_2)}. \qquad (1.11)$$

Очевидно, что вероятность возвращения в магазин зависит от предоставляемых премий, т.е. $r_1=r_1\left(\delta_1\right)$ и $r_2=r_2\left(\delta_2\right)$.

Чтобы найти максимум функции $f(\delta_1,\delta_2)$, находим ее частные производные по δ_1 и δ_2.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(\delta_1,\delta_2)}{\partial\delta_1}=a_1\dfrac{1-r_1(\delta_1)+\delta_1 r_1'(\delta_1)}{(1-r_1(\delta_1))^2},\\[2ex] \dfrac{\partial f(\delta_1,\delta_2)}{\partial\delta_2}=a_2\dfrac{1-r_2(\delta_2)+\delta_2 r_2'(\delta_2)}{(1-r_2(\delta_2))^2}.\end{cases}$$

Находим критические точки из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\delta_1,\delta_2)}{\partial \delta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f(\delta_1,\delta_2)}{\partial \delta_2} = 0. \end{cases}.$$

Решая полученную систему относительно $r_1'(\delta_1)$ и $r_2'(\delta_2)$, имеем

$$\begin{cases} r_1'(\delta_1) = \dfrac{r_1(\delta_1) - 1}{\delta_1} \\ r_2'(\delta_2) = \dfrac{r_2(\delta_2) - 1}{\delta_2} \end{cases}. \tag{1.12}$$

Рассмотрим случай, когда $\delta_1 \neq \delta_2$, то есть стоимость подарков в первом и втором блоках различна.

Предположим, что вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно

$$r_1(\delta) = r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n_1}},$$

$$r_2(\delta) = r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n_2}},$$

где r_0 - вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta = 1$, r_1 - вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta = 0$.

Учитывая (1.12), имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta_1}{n_1}(1-\delta_1)^{\frac{1}{n_1}}\left(\dfrac{r_0^{(1)} - r_1^{(1)}}{1-\delta_1} - r_1^{(1)} + r_0^{(1)}\right) = r_0^{(1)} - 1 \\ \dfrac{\delta_2}{n_2}(1-\delta_2)^{\frac{1}{n_2}}\left(\dfrac{r_0^{(2)} - r_1^{(2)}}{1-\delta_1} - r_1^{(2)} + r_0^{(2)}\right) = r_0^{(2)} - 1 \end{cases},$$

решая которую относительно δ_1 и δ_2 имеем

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{n_1(r_1^{(1)}-1)}{r_0^{(1)}-r_1^{(1)}+n(r_1^{(1)}-r_0^{(1)})} \\ \delta_2 = \dfrac{n_2(r_1^{(2)}-1)}{r_0^{(2)}-r_1^{(2)}+n(r_1^{(2)}-r_0^{(2)})} \end{cases}.$$

Очевидно, что при $n_1=n_2=1$ критических точек нет, следовательно, функция $f(\delta_1,\delta_2)$ при $\delta_1\in(0;1)$ и $\delta_2\in(0;1)$ не достигает своего максимального значения.

Рассмотрим численные примеры.

Пример 1.1.

Пусть $a_1=1200$ и $a_2=800$ – средняя стоимость покупок первого и во второго типа соответственно. Вероятности возвращения клиента, если ему не предоставляется подарок $r_0^{(1)}=0,6$ и $r_0^{(2)}=0,4$ для каждого блока соответственно, а вероятности возвращения при предоставлении подарка $r_1^{(1)}=0,8$ и $r_1^{(2)}=0,7$ для первого и второго блоков соответственно.

Положим $n_1= n_2=2$, тогда закон изменения вероятности возвращения клиентов в торговую компанию для первого и второго блоков имеет вид

$$r_1(\delta_1)=r_0^{(1)}+(r_1^{(1)}-r_0^{(1)})(1-\delta_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2(\delta_2)=r_0^{(2)}+(r_1^{(2)}-r_0^{(2)})(1-\delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

В таблице 1.1 представлен доход торговой компании в зависимости от стоимости предоставляемого подарка. Функция $f(\delta_1, \delta_2)$ достигает своего максимального значения 4644,396 при $\delta1=\delta2=0,93$, то есть стоимость подарков в первом и втором блоках составляет 7% от средней стоимости покупки.

Таблица 1.1 – Изменение дохода торговой компании при одинаковой стоимости подарков

δ₁\δ₂	**0,1**	**0,3**	**0,7**	**0,9**	**0,92**	**0,93**	**0,94**	**1**

0,1	824,36	1 638,27	3 145,66	3 460,73	3 468,27	3 469,00	3 467,23	3 253,65
0,2	1 053,12	1 867,02	3 374,41	3 689,49	3 697,02	3 697,76	3 695,99	3 482,40
0,4	1 441,17	2 255,08	3 762,47	4 077,55	4 085,08	4 085,81	4 084,04	3 870,46
0,6	1 740,69	2 554,60	4 061,99	4 377,06	4 384,60	4 385,33	4 383,56	4 169,98
0,7	1 856,05	2 669,95	4 177,35	4 492,42	4 499,95	4 500,69	4 498,92	4 285,34
0,81	1 951,69	2 765,59	4 272,99	4 588,06	4 595,59	4 596,33	4 594,56	4 380,98
0,9	1 996,08	2 809,99	4 317,38	4 632,46	4 639,99	4 640,72	4 638,95	4 425,37
0,91	1 998,16	2 812,07	4 319,46	4 634,54	4 642,07	4 642,80	4 641,03	4 427,45
0,92	1 999,43	2 813,33	4 320,73	4 635,80	4 643,33	4 644,07	4 642,30	4 428,72
0,93	1 999,76	2 813,66	4 321,05	4 636,13	4 643,66	**4 644,40**	4 642,63	4 429,04
0,94	1 998,97	2 812,87	4 320,27	4 635,34	4 642,87	4 643,61	4 641,84	4 428,26
1	1 904,05	2 717,95	4 225,34	4 540,42	4 547,95	4 548,68	4 546,92	4 333,33

Пример 1.2.

Пусть $a_1 = 1200$ и $a_2 = 800$ – средняя стоимость покупки в первом и во втором блоках соответственно. Вероятности возвращения клиента, если ему не предоставляется подарок $r_0^{(1)} = 0,6$ и $r_0^{(2)} = 0,4$ для каждого блока соответственно, а вероятности $r_1^{(1)} = 0,8$ и $r_1^{(2)} = 0,7$ для первого и второго блоков соответственно.

Положим n_1=2, n_2=5, тогда вероятность возвращения клиентов в торговую компанию для первого блока имеет вид $r_1(\delta_1) = r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta_1)^{\frac{1}{2}}$, а для второго $r_2(\delta_2) = r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta_2)^{\frac{1}{5}}$.

Тогда $f(\delta_1, \delta_2)$ достигает своего максимального значения 4972,02 при δ_1=0,93 и δ_2=0,92 (Таблица 1.2). В этом случае стоимость подарка в первом блоке составляет 7% от средней стоимости покупки, а во втором 8%.

Таблица 1.2. – Изменение дохода торговой компании при разной стоимости подарков

$\delta_1 \backslash \delta_2$	**0,1**	**0,3**	**0,7**	**0,9**	**0,91**	**0,93**	**0,94**	**1**
0,1	831,93	1 808,49	3 153,23	3 468,30	3 472,98	3 476,57	3 474,80	3 261,22
0,2	1 081,74	2 058,30	3 403,04	3 718,11	3 722,79	3 726,38	3 724,61	3 511,03
0,4	1 542,96	2 519,51	3 864,25	4 179,33	4 184,01	4 187,59	4 185,82	3 972,24
0,5	1 751,23	2 727,79	4 072,53	4 387,60	4 392,28	4 395,87	4 394,10	4 180,52
0,6	1 941,23	2 917,78	4 262,52	4 577,60	4 582,28	4 585,86	4 584,09	4 370,51
0,7	2 108,33	3 084,89	4 429,63	4 744,71	4 749,39	4 752,97	4 751,20	4 537,62
0,8	2 243,63	3 220,18	4 564,92	4 880,00	4 884,68	4 888,26	4 886,50	4 672,91
0,9	2 323,76	3 300,32	4 645,06	4 960,13	4 964,81	4 968,40	4 966,63	4 753,05
0,91	2 326,37	3 302,93	4 647,67	4 962,74	4 967,42	4 971,01	4 969,24	4 755,66

0,92	2 327,38	3 303,94	4 648,68	4 963,75	4 968,43	**4 972,02**	4 970,25	4 756,67
0,93	2 326,48	3 303,04	4 647,78	4 962,86	4 967,54	4 971,12	4 969,35	4 755,77
0,94	2 323,23	3 299,79	4 644,53	4 959,61	4 964,29	4 967,87	4 966,10	4 752,52
1	1 904,05	2 880,60	4 225,34	4 540,42	4 545,10	4 548,68	4 546,92	4 333,33

Рассмотрим случай, когда $\delta_1 = \delta_2$, то есть стоимость подарков в первом и во втором блоках одинакова.

Тогда (1.11) принимает вид

$$f(\delta) = \delta(a_1 + a_2) + \delta\left(\frac{a_1 r_1(\delta)}{1 - r_1(\delta)} + \frac{a_2 r_2(\delta)}{1 - r_2(\delta)}\right). \tag{1.13}$$

Очевидно, что определив значения δ, доставляющее максимум функции $f(\delta)$, мы найдем стоимость подарка обеспечивающего максимальный доход предприятия.

Дифференцируя (1.13) по δ получим

$$\frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta} = a_1 \frac{1 - r_1(\delta) + \delta r_1'(\delta)}{(1 - r_1(\delta))^2} + a_2 \frac{1 - r_2(\delta) + \delta r_2'(\delta)}{(1 - r_2(\delta))^2}. \tag{1.14}$$

Предположим, что вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} r_1(\delta) &= r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1 - \delta), \\ r_2(\delta) &= r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1 - \delta), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где r_0 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta = 1$, r_1 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta = 0$.

Учитывая (1.14) и (1.15), получим

$$\frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta} = a_1 \frac{1 - r_1^{(1)}}{(1 - r_0^{(1)} + (r_0^{(1)} - r_1^{(1)})(1 - \delta))^2} + a_2 \frac{1 - r_1^{(2)}}{(1 - r_0^{(2)} + (r_0^{(2)} - r_1^{(2)})(1 - \delta))^2}.$$

Вычисляя значение производной на концах интервала (0,1), которому принадлежит δ, имеем

$$\begin{cases} f'(0) = \dfrac{a_1}{1 - r_1^{(1)}} + \dfrac{a_2}{1 - r_1^{(2)}} > 0 \\ f'(1) = a_1 \dfrac{1 - r_1^{(1)}}{(1 - r_0^{(1)})^2} + a_2 \dfrac{1 - r_1^{(2)}}{(1 - r_0^{(2)})^2} > 0 \end{cases}.$$

Так как $f'(\delta)$ положительна на всем интервале $\delta \in (0;1)$, то функция $f(\delta)$ возрастает при $\delta \in (0;1)$, а значит, экстремума на данном интервале не существует. Следовательно, в этом случае предоставление подарка за покупку не целесообразно.

Проверим данный вывод на конкретном примере.

Пример 1.3.

Подставляя (1.15) в (1.13) имеем вид функции $f(\delta)$

$$f(\delta) = \delta\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1(r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta))}{1 - r_0^{(1)} - (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta)} + \frac{a_2(r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta)}{1 - r_0^{(2)} - (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta)} \right). \quad (1.16)$$

Пусть $a_1 = 1200$ и $a_2 = 800$ – средняя стоимость покупки в первом и во втором блоках соответственно. Вероятности возвращения клиента, если ему не предоставляется подарок $r_0^{(1)} = 0,6$ и $r_0^{(2)} = 0,4$ для каждого блока соответственно, а вероятности возвращения при предоставлении подарка $r_1^{(1)} = 0,8$ и $r_1^{(2)} = 0,7$ для первого и второго блоков соответственно.

График зависимости $f(\delta)$ имеет вид:

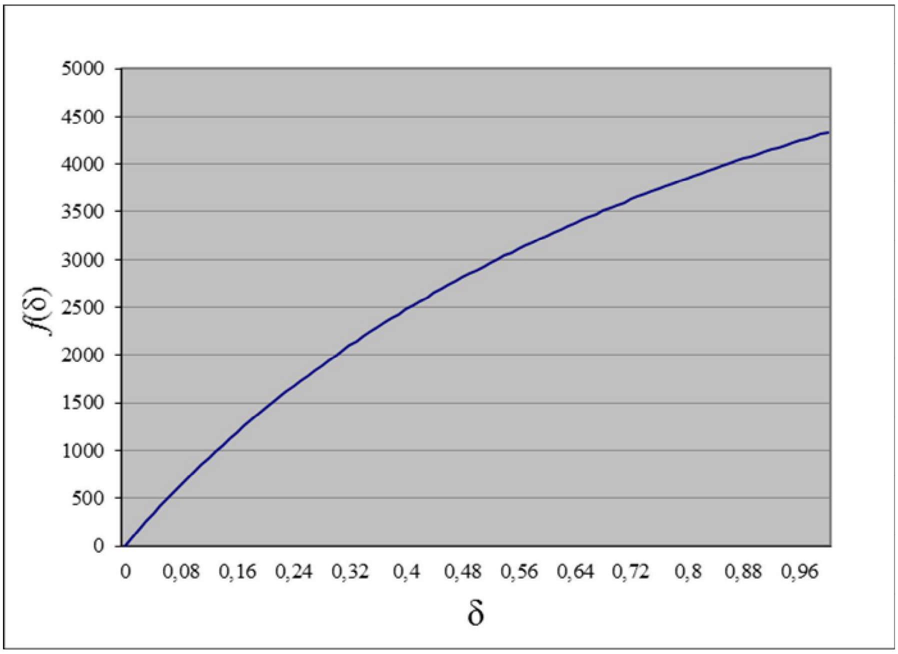


Рисунок 1.2. – Изменение дохода торговой компании при одинаковой стоимости подарков в каждом блоке

Очевидно, что данная функция монотонно возрастает при любом $\delta \in (0;1)$.

Предположим, что вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно

$$r_1(\delta) = r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}},$$
$$r_2(\delta) = r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.17}$$

где r_0 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta = 1$, r_1 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta = 0$.

Учитывая (1.16) и (1.19) получим выражение

$$\frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta} = a_1 \frac{(1 - r_0^{(1)} + (r_0^{(1)} - r_1^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta}{n}(r_0^{(1)} - r_1^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}-1}}{(1 - r_0^{(1)} + (r_0^{(1)} - r_1^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}})^2} +$$

$$+ a_2 \frac{(1 - r_0^{(2)} + (r_0^{(2)} - r_1^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta}{n}(r_0^{(2)} - r_1^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}-1}}{(1 - r_0^{(2)} + (r_0^{(2)} - r_1^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n}})^2},$$

тогда, вычисляя значение производной на концах интервала (0,1), имеем

$$\begin{cases} f'(0) = \dfrac{a_1}{1 - r_1^{(1)}} + \dfrac{a_2}{1 - r_1^{(2)}} > 0, \\ f'(1) = a_1 \dfrac{\delta(r_0^{(1)} - r_1^{(1)})}{(1 - r_0^{(1)})^2} + a_2 \dfrac{\delta(r_0^{(2)} - r_1^{(2)})}{(1 - r_0^{(2)})^2} < 0. \end{cases}$$

Так как производная меняет знак на промежутке $\delta \in (0;1)$,то существует максимум функции $f'(\delta)$ на этом промежутке.

Пример 1.4.

Пусть $a_1 = 1200$ и $a_2 = 800$ – средняя стоимость покупки в первом и во втором блоках соответственно. Вероятности возвращения клиента, если ему не предоставляется подарок $r_0^{(1)} = 0,6$ и $r_0^{(2)} = 0,4$ для каждого блока соответственно, а вероятности возвращения при предоставлении подарка $r_1^{(1)} = 0,8$ и $r_1^{(2)} = 0,7$ для первого и второго блоков соответственно, n=2.

График зависимости $f(\delta)$имеет вид:

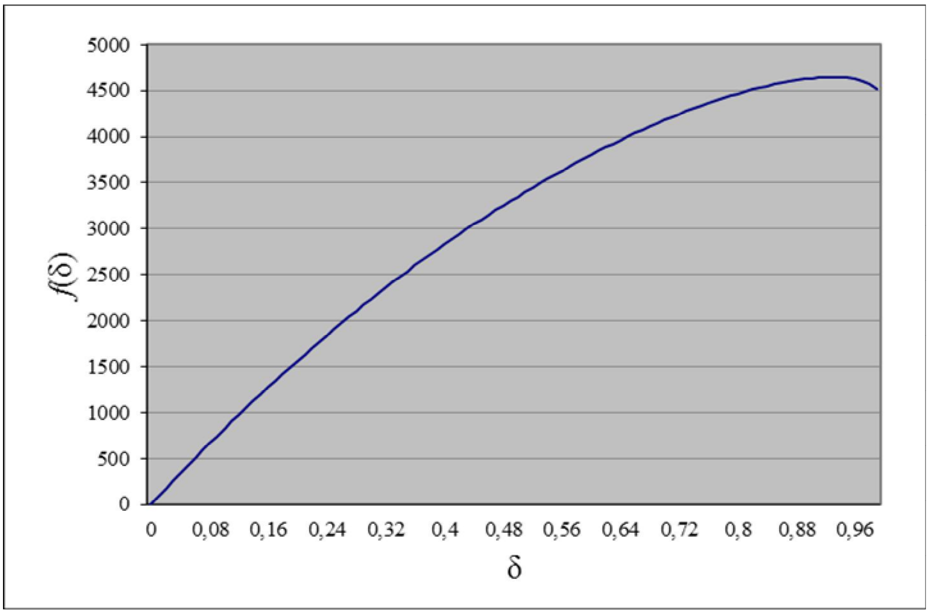


Рисунок 1.3 – Изменение дохода торговой компании при одинаковой стоимости подарков в каждом блоке

Функция $f(\delta)$ достигает своего максимального значения 4644,396 при δ=0,93, то есть стоимость подарка составляет 7% от стоимости покупки.

Таким образом, в данном параграфе рассмотрен пример применения бесконечнолинейной СМО для описания математической модели двухпродуктовой торговой компании. С помощью полученной модели проведено исследование наличия маркетинговой программы на доход предприятия, определены условия его максимизации.

1.2 Метод асимптотического анализа для исследования потоков в системе M|M|∞ с повторным обслуживанием требований при условии растущего времени обслуживания

Несмотря на то, что для системы $M|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований было найдено аналитическое решение, а именно, вид производящих функций для числа заявок потока повторных обращений и суммарного потока, в данном параграфе предлагается модификация метода асимптотического анализа, чтобы в дальнейшем данный подход реализовать для других типов входящего потока.

1.2.1 Исследование потока повторных обращений в системе M|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ.

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему, или, с вероятностью r, возвращается для повторного обслуживания. Ставится задача исследования потока повторных обращений в системе $M|M|\infty$ повторным обслуживанием требований с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

Для распределений вероятностей $P(i,n,t)=P\{i(t)=i, n(t)=n\}$ двумерного потока $\{i(t), n(t)\}$, где $i(t)$, $n(t)$=0, 1, 2, …, запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(i,n,t)}{\partial t}=-\lambda P(i,n,t)-i\mu P(i,n,t)+\lambda P(i-1,n,t)+$$

$$+i\mu r P(i,n-1,t)+\mu(1-r)(1+i)P(i+1,n,t),\ \text{где}\ i=\overline{0,\infty}, n=\overline{0,\infty}, \qquad (1.18)$$

с начальным условием

$$P(i,n,0)=\begin{cases} h(i),\ \text{при}\ n=0,\\ 0,\ \text{иначе.}\end{cases}$$

Введем характеристические функции вида

$$H(u,w,t)=\sum_i\sum_n e^{jui}e^{jwn}P(i,n,t).$$

Тогда из (1.18) получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial t}=\lambda(e^{ju}-1)H(u,w,t)+j\mu(1-re^{jw}-(1-r)e^{-ju})\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial u}. \qquad (1.19)$$

Проведем исследование потока повторных обращений в систему за время t, с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания, то есть среднее время обслуживания $\frac{1}{\mu}\to\infty$ или $\mu\to 0$.

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть* $\Pi(i)$ *– стационарное распределение вероятностей состояния случайного процесса* $i(t)$ *– числа занятых приборов в СМО* $M|M|\infty$ *с повторным обслуживанием требований, тогда асимптотическое прибли-*

жение первого порядка характеристической функции $h(u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}\Pi(i)$, *при условии растущего времени обслуживания, имеет вид*

$$h(u)=\exp\left\{\frac{j\lambda u}{\mu(1-r)}\right\}.$$

Доказательство.

Положив w=0, из (1.19) нетрудно получить уравнение для $h(u)$

$$\lambda(e^{ju}-1)h(u)+j\mu(1-r)(1-e^{-ju})h'(u)=0.$$

Сделаем замены

$$u=\varepsilon y,\ \mu=\varepsilon,\ h(u)=F(y,\varepsilon), \tag{1.20}$$

тогда для $F(y,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\lambda(e^{j\varepsilon y}-1)F(y,\varepsilon)+j(1-r)(1-e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial F(y,\varepsilon)}{\partial y}=0.$$

Раскладывая в полученном уравнении экспоненты в ряд до $O(\varepsilon)$, и, устремляя $\varepsilon\to 0$, с учетом обозначения $F(y)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F(y,\varepsilon)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dF(y)}{dy}=\frac{j\lambda}{1-r}F(y),$$

решение которого имеет вид

$$F(y)=\exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

В силу замен (1.20) перепишем полученное асимптотическое равенство

$$h(u)=F(y,\varepsilon)\approx F(y)=\exp\left\{\frac{j\lambda u}{\mu(1-r)}\right\},$$

Лемма доказана.

Далее проведем исследование потока повторных обращений методом асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания

Теорема 1.2. *Асимптотическая характеристическая функция числа заявок потока повторных обращений* $h(w,t)=M\left\{e^{jwn(t)}\right\}$, *поступивших в систему M|M|∞ за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид*

$$h(w,t)=\exp\left\{\frac{r\lambda t(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Доказательство.

В уравнении (1.19) сделаем замену

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ H(u,w,t)=F(y,w,t,\varepsilon),$$

и перепишем его в виде

$$\frac{\partial F(y,w,t,\varepsilon)}{\partial t}=\lambda(e^{j\varepsilon y}-1)F(y,w,t,\varepsilon)+j(1-re^{jw}-(1-r)e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial F(y,w,t,\varepsilon)}{\partial y} \quad (1.21)$$

Выполняя в уравнении (1.21) предельный переход при $\varepsilon\to 0$, и, обозначив $F(y,w,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F(y,w,t,\varepsilon)$, получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F(y,w,t)}{\partial t}=jr(1-e^{jw})\frac{\partial F(y,w,t)}{\partial y}.$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$F(y,w,t)=\varphi\left(t+\frac{jy}{r(e^{jw}-1)}\right),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция, вид которой определим, используя начальное условие.

Рассмотрим функцию $F(y,w,t)$ в нулевой момент времени, очевидно, что данная функция не будет зависеть от w, то есть начальное условие имеет вид

$$F(y,w,0)=\Phi(y), \quad (1.22)$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение первого порядка характеристической функции числа занятых приборов в системе, при условии растущего времени обслуживания заявок, вид которого определен в лемме 1.2.

$$\Phi(y) = \exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (1.21), удовлетворяющее начальному условию (1.22), имеет вид

$$F(y,w,t) = \exp\left\{\frac{\lambda tr(e^{jw}-1)}{1-r} + \frac{j\lambda y}{1-r}\right\}. \qquad (1.23)$$

Полагая в (1.23) y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок потока повторных обращений, поступивших в систему за время t, при условии растущего времени обслуживания

$$h(w,t) = M\{e^{jwn(t)}\} = H(0,w,t) = F(0,w,t,\varepsilon) \approx F(0,w,t) = \exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Теорема доказана.

1.2.2 Исследование суммарного потока обращений в системе M|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Проведем исследование суммарного потока в системе $M|M|\infty$. Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $m(t)$ – число заявок суммарного потока, обратившихся в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, тогда двумерный случайный процесс $\{i(t), m(t)\}$ является марковским.

Для распределений вероятностей $P(i,m,t) = P\{i(t) = i, m(t) = m\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(i,m,t)}{\partial t} = -\lambda P(i,m,t) - i\mu P(i,m,t) + \lambda P(i-1,m-1,t) +$$

$$+ i\mu r P(i,m-1,t) + \mu(1-r)(1+i)P(i+1,m,t), \text{ где } i = \overline{0,\infty}, m = \overline{0,\infty}, \qquad (1.24)$$

с начальным условием

$$P(i,m,0) = \begin{cases} h(i), \text{ при } m = 0, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Введем характеристические функции

$$H(u,v,t)=\sum_i\sum_m e^{jui}e^{jvm}P(i,m,t),$$

тогда из (1.24) получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial H(u,v,t)}{\partial t}=\lambda(e^{j(u+v)}-1)H(u,v,t)+j\mu(1-re^{jv}-(1-r)e^{-ju})\frac{\partial H(u,v,t)}{\partial u}. \quad (1.25)$$

Проведем исследование потока суммарных обращений в систему за время t, с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания.

Теорема 1.3. *Асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока* $h(v,t)=M\left\{e^{jvm(t)}\right\}$, *поступивших в систему* $M|M|\infty$ *за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеет вид*

$$h(v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Доказательство.

В уравнении (1.25) сделаем замену

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ H\big(u,v,t\big)=F\big(y,v,t,\varepsilon\big),$$

и перепишем его в виде

$$\frac{\partial F(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t}=\lambda(e^{j(\varepsilon y+v)}-1)F(y,v,t,\varepsilon)+j(1-re^{jv}-(1-r)e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial F(y,v,t,\varepsilon)}{\partial y} \quad (1.26)$$

Выполняя в уравнении (1.26) предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F(y,v,t)}{\partial t}=\lambda(e^{jv}-1)F(y,v,t)+jr(1-e^{jv})\frac{\partial F(y,v,t)}{\partial y}. \quad (1.27)$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy}{jr(1-e^{jv})}=\frac{dF(y,v,t)}{\lambda(e^{jv}-1)F(y,v,t)}.$$

Определим два первых интеграла данной системы. Один из них найдем из уравнения

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy}{jr(1-e^{jv})},$$

очевидно, имеем

$$C_1=jr(1-e^{jv})t-y, \tag{1.28}$$

$$y=jr(1-e^{jv})t-C_1.$$

Второй интеграл найдем из следующего уравнения

$$\frac{dy}{jr(1-e^{jv})}=\frac{dF(y,v,t)}{\lambda(e^{jv}-1)F(y,v,t)},$$

решая которое получим

$$F(y,v,t)=C_2\exp\left\{-\frac{j\lambda y}{r}\right\}.$$

Общее решение уравнения запишем в виде

$$F(y,v,t)=\Phi(C_1)\exp\left\{-\frac{j\lambda y}{r}\right\}, \tag{1.29}$$

где $\Phi(C_1)$ – произвольная дифференцируемая функция, а константа C_1 определяется равенством (1.28).

Перепишем равенство (1.29)

$$F(y,v,t)=\Phi(jr(1-e^{jv})t-y)\exp\left\{-\frac{j\lambda y}{r}\right\}.$$

Для определения частного решения уравнения (1.27) воспользуемся начальным условием.

Так как число обслуженных заявок за интервал нулевой длины с вероятностью единица равно нулю, то начальное условие имеет вид

$$F(y,v,0)=\Phi(y), \tag{1.30}$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции распределения числа занятых приборов в системе при условии растущего времени обслуживания заявок, вид которого определен в лемме 1.2.

$$\Phi(y)=\exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (1.27), удовлетворяющее начальному условию (1.30), имеет вид

$$F(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}+\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}. \tag{1.31}$$

Полагая в (1.31) y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, при условии растущего времени обслуживания.

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=H(0,v,t)=F(0,v,t,\varepsilon)\approx F(0,v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что асимптотические характеристические функции числа событий суммарного потока и потока повторных обращений в рассматриваемой системе можно получить непосредственно из формул (1.2), (1.3) путем предельного перехода при $\mu\to 0$.

Резюме

В данной главе исследуются математические модели потоков в марковских системах массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием требований.

Проведено исследование математической модели бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием кратных заявок пуассоновского с параметром λ потока, сформулирована и доказана теорема о виде производящей функции числа суммарных (первичных и повторных) обращений в рассматриваемой системе, определены основные вероятностные характеристики: математическое ожидание, дисперсия числа суммарных обращений к блокам.

Построена экономико-математическая модель двухпродуктовой торговой компании в виде бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием требований. Проведено исследование наличия маркетинговой программы (предоставление подарка за покупку) на доход компании.

Кроме того, предложена модификация метода асимптотического анализа для исследования суммарного потока и потока повторных обращений в систему $M|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Доказано, что асимптотическое приближение характеристических функций числа заявок суммарного потока и потока повторных обращений в рассматриваемую систему за время t, при условии растущего времени обслуживания, имеют вид соответственно

$$h(w,t) = M\{e^{jwn(t)}\} = \exp\left\{\frac{\lambda rt(e^{jw}-1)}{1-r}\right\},$$

$$h(v,t) = M\{e^{jvm(t)}\} = \exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Часть результатов, представленных в данной главе, получены в процессе выполнения научных исследований по проектам:

1. научный проект АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы)» Федерального агентства по образованию, проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи» [24];
2. научно-исследовательская работа в рамках госзадания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012 – 2013 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации» № 8.4055.2011 [26].

Результаты главы опубликованы в работах [23, 29, 32].

Глава 2

Асимптотический анализ потока повторных обращений в системах MMPP|M|∞, GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

В данной главе проводится исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием требований, на вход которых поступает марковский модулированный пуассоновский (*MMPP)* и рекуррентный (*GI)* потоки заявок. Время обслуживания требований на приборах является стохастически независимыми случайными величинами, имеющими экспоненциальную функцию распределения с параметром μ, одинаковый для всех приборов. После окончания обслуживания заявка с вероятностью r возвращается в систему для повторного обслуживания, или, с вероятностью $1-r$, покидает ее.

Ставится задача исследования потока повторных обращений в систему за время t. Для проведения исследований предлагается модификация метода асимптотического анализа, рассмотренного в первой главе.

2.1 Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (*MMPP*) [60], управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \ldots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{\nu k}\|$ (ν, $k = 1, 2, \ldots, K$) и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = diag[\lambda_k], k = \overline{1, K}$.

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему, или, с вероятностью r, возвращается для повторного обслуживания.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени t.

Двумерный случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является марковским и для его распределения вероятностей $P(k,i,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида:

$$\frac{\partial P(k,i,t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k,i,t) - i\mu(1-r)P(k,i,t) + \lambda_k P(k,i-1,t) +$$

$$+\mu(1-r)(1+i)P(k,i+1,t) + \sum P(\nu,i,t)q_{\nu k}, \qquad (2.1)$$

k, v =1, 2, …, K, i = 0, 1, 2, 3, …

Введем частичные характеристические функции [83] вида

$$H(k,u,t) = \sum_i e^{jui} P(k,i,t).$$

Тогда из (2.1) получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} + j\mu(1-r)(e^{-ju}-1)\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial u} =$$
$$= H(k,u,t)[\lambda_k(e^{ju}-1)] + \sum H(\nu,u,t)q_{\nu k},$$

Запишем данную систему в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} + j\mu(1-r)(e^{-ju}-1)\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u,t)[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \qquad (2.2)$$

где

$$\mathbf{H}(u,t) = [H(1,u,t), H(2,u,t), \ldots, H(K,u,t)] \text{ – вектор-строка,}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & . & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & . & q_{2K} \\ . & . & . & . \\ q_{K1} & q_{K2} & . & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

Для стационарного режима функционирования системы перепишем (2.2) в следующем виде

$$j\mu(1-r)\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial\mathbf{H}(u)}{\partial u}=\mathbf{H}(u)\left[\mathbf{\Lambda}\left(e^{ju}-1\right)+\mathbf{Q}\right]. \qquad (2.3)$$

Полученное уравнение является основным для дальнейших исследований.

2.1.1 Метод начальных моментов для исследования числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Определим основные числовые характеристики случайного процесса $i(t)$ – число занятых приборов в рассматриваемой системе.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{R}=[R(1),R(2),...,R(K)]$ *– вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей MMPP потоком цепи Маркова* $k(t)$*, определяемый решением системы уравнений* $\begin{cases}\mathbf{RE}=1\\ \mathbf{RQ}=0\end{cases}$,

где $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK}\end{bmatrix}$ *– матрица инфинитезимальных характеристик,*

$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}_{Kx1}$ *– единичный вектор – столбец.*

Тогда начальные моменты числа занятых приборов при стационарном функционировании системы MMPP|M|∞ определяются выражениями

$$M\{i\}=\frac{1}{\mu(1-r)}\mathbf{R\Lambda E}, \qquad (2.4)$$

$$M\left\{i^2\right\}=\mathbf{R\Lambda}\left\{\left[\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I}\right]-\mathbf{I}\right\}\left\{\mathbf{Q}-2\mu(1-r)\mathbf{I}\right\}^{-1}\mathbf{E},\quad (2.5)$$

$$M\left\{i^3\right\}=\left[\mathbf{Q}-3\mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[\mathbf{m}_1(-3\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I})-\mathbf{m}_2(3\mathbf{\Lambda}+3\mu(1-r)\mathbf{I})-\mathbf{R\Lambda}\right]\mathbf{E}.\quad (2.6)$$

где $\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & \lambda_K\end{bmatrix}$ – *матрица условных интенсивностей,*

$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{KxK}$ *– единичная матрица.*

Доказательство.

1 этап. Момент первого порядка.

Чтобы определить момент первого порядка продифференцируем уравнение (2.3) по u

$$\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(u)}{\partial u}+j\mu(1-r)\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^2\mathbf{H}(u)}{\partial u^2}=\frac{\partial\mathbf{H}(u)}{\partial u}\left[\mathbf{\Lambda}\left(e^{ju}-1\right)+\mathbf{Q}\right]+je^{iu}\mathbf{H}(u).$$

Обозначим

$$\left.\frac{\partial H(u)}{\partial u}\right|_{u=0}=jm_1(k),$$

$\mathbf{m}_1=[m_1(1),m_1(2),...,m_1(K)]$ – вектор-строка.

Тогда, полагая u=0, получим следующую систему линейных уравнений

$$\mathbf{m_1}\mu(1-r)=\mathbf{m_1 Q}+\mathbf{R\Lambda}\,.$$

Решая данную систему, получим выражение, определяющее вектор $\mathbf{m}_1$

$$\mathbf{m_1}=\mathbf{R\Lambda}[\mu(1-r)\mathbf{I}-\mathbf{Q}]^{-1}.\quad (2.7)$$

Следовательно, значение среднего числа занятых приборов в стационарном режиме функционирования системы определяется выражением

$$M\{i\}=\mathbf{m}_1\mathbf{E}=\frac{1}{\mu(1-r)}\mathbf{R\Lambda E}\,.$$

2 Этап. Момент второго порядка.

Для определения момента второго порядка продифференцируем по *u* дважды выражение (2.3)

$$-j\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}+2\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2}+j\mu(1-r)\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^3 \mathbf{H}(u)}{\partial u^3}=$$

$$=\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2}\left[\mathbf{\Lambda}\left(e^{iu}-1\right)+\mathbf{Q}\right]+2je^{ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}\mathbf{\Lambda}-e^{ju}\mathbf{H}(u).$$

Введем обозначение

$$\left.\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2}\right|_{u=0}=j^2 m_2(k),$$

$\mathbf{m}_2=[m_2(1),m_2(2),...,m_2(K)]$ – вектор-строка.

Учитывая которое, имеем

$$\mathbf{m_2}\left[\mathbf{Q}-2\mu(1-r)\mathbf{I}\right]+\mathbf{m_1}\left[2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)I\right]+\mathbf{R\Lambda}=0,$$

где **I** – единичная диагональная матрица.

Подставляя выражение (2.7), и решая данное уравнение относительно $\mathbf{m}_2$, имеем

$$\mathbf{m_2}=\mathbf{R\Lambda}\left\{\left[\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I}\right]-\mathbf{I}\right\}\left\{\mathbf{Q}-2\mu(1-r)\mathbf{I}\right\}^{-1}.$$

Тогда второй момент числа занятых приборов в системе имеет вид

$$M\left\{i^2\right\}=\mathbf{m_2E}=\mathbf{R\Lambda}\left\{\left[\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I}\right]-\mathbf{I}\right\}\left\{\mathbf{Q}-2\mu(1-r)\mathbf{I}\right\}^{-1}\mathbf{E}.$$

3 этап. Момент третьего порядка.

Для определения момента третьего порядка продифференцируем по *u* трижды выражение (2.3), получим

$$j\mu(1-r)(1+e^{-ju})\frac{\partial^4 \mathbf{H}(u)}{\partial u^4}-3j^2\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial^3 \mathbf{H}(u)}{\partial u^3}+3j^3\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2}-$$

$$-j^4\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}=\frac{\partial^3 \mathbf{H}(u)}{\partial u^3}\left[\mathbf{\Lambda}(e^{ju}-1)+\mathbf{Q}\right]+3je^{ju}\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u)}{\partial u^2}\mathbf{\Lambda}+$$

$$+3j^2e^{ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}\mathbf{\Lambda}+j^3e^{ju}\mathbf{H}(u)\mathbf{\Lambda}.$$

Обозначим

$$\left.\frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3}\right|_{u=0} = j^3 m_3(k),$$

$\mathbf{m}_3 = [m_3(1), m_3(2), ..., m_3(K)]$ – вектор-строка.

Тогда получим систему уравнений для определения моментов третьего порядка числа занятых приборов в рассматриваемой системе

$$\mathbf{m}_3\left[\mathbf{Q} - 3\mu(1-r)\mathbf{I}\right] + \mathbf{m}_2\left[3\mathbf{\Lambda} + 3\mu(1-r)\mathbf{I}\right] + \mathbf{m}_1\left[3\mathbf{\Lambda} - \mu(1-r)\mathbf{I}\right] + \mathbf{R\Lambda} = 0.$$

Откуда получим

$$\mathbf{m}_3 = \left[\mathbf{Q} - 3\mu(1-r)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[\mathbf{m}_1\left[-3\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}\right] - \mathbf{m}_2\left[3\mathbf{\Lambda} + 3\mu(1-r)\mathbf{I}\right] - \mathbf{R\Lambda}\right].$$

Таким образом, третий момент числа занятых приборов в системе имеет вид

$$M\left\{i^3\right\} = \mathbf{m}_3\mathbf{E} = \left[\mathbf{Q} - 3\mu\left(1-r\right)\mathbf{I}\right]^{-1}\left[\mathbf{m}_1(-3\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r)\mathbf{I}) - \mathbf{m}_2(3\mathbf{\Lambda} + 3\mu(1-r)\mathbf{I}) - \mathbf{R\Lambda}\right]\mathbf{E}.$$

Теорема доказана.

Аналогичным способом можно найти начальные моменты любого порядка.

2.1.2 Метод асимптотического анализа для исследования числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Для более полного исследования числа занятых приборов в рассматриваемой системе, применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов в системе *MMPP|M|∞* при определенных условиях. Для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания, то есть $\frac{1}{\mu} \to \infty$, или $\mu \to 0$.

Известно [60], что для СМО с неограниченным числом обслуживающих устройств можно построить гауссовскую аппроксимацию характеристической функции числа занятых приборов.

Построим такую же аппроксимацию для бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием требований.

Теорема 2.2. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{H}(u)=[H(1,u),H(2,u),...,H(K,u)]$, *где* $H(k,u)=\sum_i e^{jui}P(k,i)$, *удовлетворяет уравнению* (*2.3*), *вектор* $\mathbf{f}_2$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{f}_2\mathbf{E}=0$ *и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений* $\mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+\mathbf{f}_2\mathbf{Q}=0$. (*2.8*)

Тогда $h(u)=M\left\{e^{jui(t)}\right\}=\mathbf{H}\left(u\right)\mathbf{E}=\sum_i e^{jui}P(k,i)$ – *характеристическая функция числа занятых приборов в системе MMPP/M/∞, при условии растущего времени обслуживания* ($\mu\to 0$)*, имеет вид гауссовской характеристической функции с параметрами*

$$a=M\{i\}=\frac{\kappa_1}{\mu\left(1-r\right)},\ \sigma^2=M\left\{\left(i-a\right)^2\right\}=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\mu\left(1-r\right)},$$

где $\kappa_1=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}$, $\kappa_2=\mathbf{f_2}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}$.

Доказательство.

1 Этап. Асимптотика первого порядка.

Обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ \mathbf{H}\left(u\right)=\mathbf{F_1}\left(y,\varepsilon\right). \tag{2.9}$$

Перепишем (2.3) с учетом введенных обозначений

$$j\left(1-r\right)\left(e^{-j\varepsilon y}-1\right)\frac{\partial\mathbf{F_1}\left(y,\varepsilon\right)}{\partial y}=\mathbf{F_1}\left(y,\varepsilon\right)\left[\mathbf{\Lambda}\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)+\mathbf{Q}\right]. \tag{2.10}$$

В уравнении (2.10) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим, что $\mathbf{F_1}\left(y\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F_1}\left(y,\varepsilon\right)$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений вида

$$0=\mathbf{F_1}\left(y\right)\mathbf{Q}.$$

Откуда,

$$\mathbf{F}_1(y)=\mathbf{R}\Phi_1(y). \qquad (2.11)$$

Умножая уравнение (2.10) на единичный вектор **E** и выполняя все необходимые преобразования, имеем

$$j(1-r)\left(e^{-j\varepsilon y}-1\right)\frac{\partial\mathbf{F}_1(y,\varepsilon)}{\partial y}\mathbf{E}=\mathbf{F}_1(y,\varepsilon)\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)\mathbf{\Lambda E}.$$

Раскладывая в этом уравнении экспоненты в ряд, а также разделив обе части уравнения на ε и полагая $\varepsilon\to 0$, получим

$$(1-r)y\mathbf{F}_1'(y)\mathbf{E}=jy\mathbf{F}_1(y)\mathbf{\Lambda E}. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в систему (2.12) и учитывая условие **RE**=1, получим дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции $\Phi_1(y)$

$$\Phi_1'(y)\mathbf{E}=\frac{j}{(1-r)}\Phi_1(y)\mathbf{\Lambda E}.$$

Откуда, учитывая начальное условие $\mathbf{\Phi}_1(0)=1$, имеем

$$\Phi_1(y)=\exp\left\{\frac{jy}{1-r}\kappa_1\right\},\ \kappa_1=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}.$$

Следовательно, учитывая (2.11) получим

$$\mathbf{F}_1(y)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{jy}{1-r}\kappa_1\right\}.$$

В силу замены (2.9) и предыдущего равенство можно записать следующее асимптотическое равенство

$$\mathbf{H}(u)=\mathbf{F}_1(y,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_1(y)=\mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{jy}{1-r}\kappa_1\right\}.$$

Поэтому для характеристической функции стационарного процесса $i(t)$ запишем

$$h(u)=M\left\{e^{jui(t)}\right\}=\mathbf{H}(u)\mathbf{E}\approx\exp\left\{\frac{jy}{1-r}\kappa_1\right\}=\exp\left\{\frac{ju}{1-r}\frac{\kappa_1}{\mu}\right\}.$$

Данное равенство будем называть **асимптотикой первого порядка** для числа занятых приборов в СМО $MMPP|M|\infty$ с повторным обслуживанием заявок.

2 этап. Асимптотика второго порядка.

В уравнении (2.3) выполним замену

$$\mathbf{H}(u)=\mathbf{H_2}(u)\exp\left\{\frac{ju}{1-r}\frac{\kappa_1}{\mu}\right\}, \tag{2.13}$$

Тогда уравнение (2.3) принимает вид

$$j\mu(1-r)\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial\mathbf{H_2}(u)}{\partial u}=\mathbf{H_2}(u)\left[\mathbf{Q}+\mathbf{\Lambda}\left(e^{ju}-1\right)+\kappa_1\left(e^{-ju}-1\right)\mathbf{I}\right]. \tag{2.14}$$

Обозначив

$$\mu=\varepsilon^2,\ u=\varepsilon y,\ \mathbf{H_2}(u)=\mathbf{F_2}(y,\varepsilon), \tag{2.15}$$

из (2.14) получим

$$j\varepsilon(1-r)\left(e^{-j\varepsilon y}-1\right)\frac{\partial\mathbf{F_2}(y,\varepsilon)}{\partial y}=\mathbf{F_2}(y,\varepsilon)\left[\mathbf{Q}+\mathbf{\Lambda}\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)+\kappa_1\left(e^{-j\varepsilon y}-1\right)\mathbf{I}\right]. \tag{2.16}$$

В соотношении (2.16) выполнив предельный переход, при $\varepsilon\to 0$, получим уравнение

$$0=\mathbf{F}_2(y)\mathbf{Q}.$$

Следовательно, решение $\mathbf{F}_2(y,\varepsilon)$ уравнения (2.16) можно записать в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(y,\varepsilon)=\Phi_2(y)\left[\mathbf{R}+j\varepsilon y\mathbf{f}_2\right]+O\left(\varepsilon^2\right), \tag{2.17}$$

в котором естественно положить выполнение условия $\mathbf{f}_2\mathbf{E}=0$.

Подставляя выражение (2.17) в (2.16) и раскладывая в нем экспоненты в ряд, получим систему линейных неоднородных уравнений для нахождения вектора $\mathbf{f_2}$

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I}\right)+\mathbf{f}_2\mathbf{Q}=0.$$

Чтобы найти функцию $\Phi_2(y)$ умножим обе части уравнения (2.16) на единичный вектор **E**, далее раскладывая экспоненты в ряд и подставляя (2.17), получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$(1-r)\Phi_2'(y) = j^2 y\Phi_2(y)\left[\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{f}_2(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E}\right].$$

Решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_2(0)=1$, имеет вид

$$\Phi_2(y)=\exp\left\{\frac{(jy)^2}{2(1-r)}(\kappa_1+\kappa_2)\right\}, \tag{2.18}$$

где $\kappa_2 = \mathbf{f}_2\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}$, вектор $\mathbf{f}_2$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}_2\mathbf{E}=0$ и является решением системы линейных неоднородных уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I})+\mathbf{f}_2\mathbf{Q}=0$.

В силу замен (2.15) и равенства (2.18), запишем асимптотическое равенство для $\mathbf{H}_2(u)$

$$\mathbf{H}_2(u)=\mathbf{F}_2(y,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_2(y)=\mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{(jy)^2}{2(1-r)}(\kappa_1+\kappa_2)\right\}=\mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{\mu}\right\}. \tag{2.19}$$

Это равенство будем называть **асимптотикой второго порядка**.

Учитывая (2.13) и (2.19), имеем следующее выражение для $\mathbf{H}(u)$

$$\mathbf{H}(u)=\mathbf{H}_2(u)\cdot\exp\left\{\frac{jy}{1-r}\frac{\kappa_1}{\mu}\right\}=\mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{ju}{1-r}\frac{\kappa_1}{\mu}+\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}, \tag{2.20}$$

поэтому для характеристической функции числа занятых приборов $i(t)$ при стационарном режиме функционирования системы получим

$$h(u)=M\left\{e^{jui(t)}\right\}=\mathbf{H}(u)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{ju}{1-r}\frac{\kappa_1}{\mu}+\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{\mu}\right\}.$$

Из последнего выражения следует, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе $MMPP|M|\infty$, можно аппроксимировать гауссовским распределением со следующими параметрами

$$a = M\{i\} = \frac{\kappa_1}{\mu(1-r)},\ \sigma^2 = M\left\{(i-a)^2\right\} = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{\mu(1-r)}.$$

Теорема доказана.

Аппроксимация характеристической функции числа занятых приборов в системе третьего порядка.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (*2.8*) *теоремы 2.2., тогда асимптотическое приближение третьего порядка характеристической функции числа занятых приборов* $h(u) = M\left\{e^{jui(t)}\right\} = \mathbf{H}(u)\mathbf{E} = \sum_i e^{jui}P(k,i)$, *при условии растущего времени обслуживания* ($\mu \to 0$), *имеет вид*

$$h(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{E} = \exp\left\{\frac{ju}{(1-r)}\frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6(1-r)}\frac{\kappa_3}{\mu}\right\},$$

где $\kappa_3 = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \mathbf{f}_3\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}$.

Доказательство.

В уравнении (2.3) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_3(u)\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\mu(1-r)}\right\}, \tag{2.21}$$

тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$j\mu(1-r)\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial \mathbf{H}_3(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_3(u)\left[\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda}\left(e^{ju}-1\right) + (\kappa_1 + ju(\kappa_1+\kappa_2))\left(e^{-ju}-1\right)\mathbf{I}\right]. \tag{2.22}$$

Обозначив

$$\mu = \varepsilon^3,\ u = \varepsilon y,\ \mathbf{H}_3(u) = \mathbf{F}_3(y,\varepsilon) \tag{2.23}$$

из (2.22) получим систему дифференциальных уравнений

$$j\varepsilon^2(1-r)\left(e^{-j\varepsilon y}-1\right)\frac{\partial \mathbf{F}_3(y,\varepsilon)}{\partial y} = \mathbf{F}_3(y,\varepsilon)\Big[\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda}\left(e^{j\varepsilon y}-1\right) +$$

$$+\left(\kappa_1 + j\varepsilon y(\kappa_1+\kappa_2)\right)\left(e^{-j\varepsilon y}-1\right)\mathbf{I}\Big], \tag{2.24}$$

В уравнении (2.24) выполнив предельный переход при $\varepsilon \to 0$, имеем уравнение

$$0 = \mathbf{F}_3(y)\mathbf{Q},$$

решение которого будем искать в виде

$$\mathbf{F}_3(y) = \mathbf{R}\Phi_3(y). \tag{2.25}$$

Определим вид функции $\Phi_3(y)$. Для этого запишем решение системы (2.24) в следующем виде

$$\mathbf{F}_3(y,\varepsilon) = \Phi_3(y)\left\{\mathbf{R} + j\varepsilon y\mathbf{f}_2 + \frac{(j\varepsilon y)^2}{2}\mathbf{f}_3\right\} + O(\varepsilon^3), \tag{2.26}$$

в котором естественно положить выполнение условия $\mathbf{f}_3\mathbf{E} = 0$.

Подставляя данное выражение в (2.24) и раскладывая в нем экспоненты в ряд, получим систему линейных неоднородных уравнений для нахождения вектора $\mathbf{f}_3$

$$\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I} - 2\kappa_2\mathbf{I}) + 2\mathbf{f}_2(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}) + \mathbf{f}_3\mathbf{Q} = 0.$$

Чтобы найти функцию $\Phi_3(y)$ умножим обе части уравнения (2.24) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E} = [1,\ 1,\ \ldots,\ 1]^T$. Далее, раскладывая в полученном выражении экспоненты в ряд и подставляя (2.26), имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(1-r)\mathbf{RE}\Phi_3'(y) = \frac{(jy)^3}{2}\Phi_3(y)\left[(\kappa_1 + 2\kappa_2)\mathbf{I} + \mathbf{f}_3(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E}\right],$$

решая которое имеем

$$\Phi_3(y) = \exp\left\{\frac{(jy)^3}{6}\kappa_3\right\},$$

где $\kappa_3 = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \mathbf{f}_3\mathbf{\Lambda E}$.

В силу замен (2.23) запишем асимптотическое равенство для $\mathbf{H}_3(u)$

$$\mathbf{H}_3(u) = \mathbf{F}_3(y,\varepsilon) \approx \mathbf{F}_3(y) = \mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{(jy)^3}{6(1-r)}\kappa_3\right\} = \mathbf{R}\cdot\exp\left\{\frac{(ju)^3}{6(1-r)}\frac{\kappa_3}{\mu}\right\}. \tag{2.27}$$

С учетом (2.21) асимптотическое приближение третьего порядка характеристической функции числа занятых приборов $i(t)$ имеет вид

$$h(u)=\mathbf{H}(u)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{ju}{(1-r)}\frac{\kappa_1}{\mu}+\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{\mu}+\frac{(ju)^3}{6(1-r)}\frac{\kappa_3}{\mu}\right\}. \quad (2.28)$$

Теорема доказана.

2.1.3 Численный анализ асимптотических результатов

Для анализа асимптотических результатов, проведем сравнение распределения вероятностей числа занятых приборов в системе для частного случая входящего MMPP-потока, когда все λ_k равны.

Запишем асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

$$P_\nu(i)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}h_\nu(u)\,du, \quad (2.29)$$

где $h_\nu(u)$, ν=2, 3 определяются выражениями (2.20), (2.28) соответственно.

Допредельное распределение вероятностей имеет вид

$$P(i)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}h_0(u)du, \quad (2.30)$$

где $h_0(u)=\exp\left\{(e^{ju}-1)\cdot\frac{\lambda}{\mu(1-r)}\right\}$, которое было получено в работе [55].

Пример 2.1.

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок. На вход системы поступает *MMPP*-поток, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{pmatrix}$$ для управляющей цепи Маркова $k(t)$ и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Заявка, поступившая в систему, занимает любой свободный прибор, на котором обслуживается в течение случайного времени, распределенного согласно экспоненциальному закону с параметром μ. Вероятность возврата заявки в систему r = 0,7. Используя заданные параметры, определим расстояние Колмогорова между распределениями (2.29) и (2.30)

$$D_v = \max_{0 \le m < \infty} \left| \sum_{i=0}^{m} P_v(i) - \sum_{i=0}^{m} P(i) \right|.$$

Сравним результаты для аппроксимации второго (Δ_2) и третьего (Δ_3) порядков.

Таблица 2.1. – Сравнение результатов аппроксимации второго и третьего порядков при r = 0,7

μ / Δ	**1**	**0,5**	**0,2**	**0,1**	**0,05**
Δ_2	0,053	**0,029**	**0,020**	**0,012**	**0,008**
Δ_3	**0,011**	**0,005**	**0,002**	**0,001**	**0,000**

Положим вероятность возврата заявки в систему r = 0,01, тогда имеем

Таблица 2.2. – Сравнение результатов аппроксимации второго и третьего порядков при r = 0,01

μ / Δ	**1**	**0,5**	**0,2**	**0,1**	**0,05**
Δ_2	0,124	0,081	0,036	**0,021**	**0,015**
Δ_3	0,054	**0,028**	**0,009**	**0,003**	**0,001**

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при уменьшении значения величины параметра μ, точность аппроксимации допредельного распределения распределением, полученного методом асимптотического анализа увеличивается. Кроме того, на область применимости асимптотических результатов влияет не только время обслуживания заявки, но и вероятность ее возврата в систему для повторного обслуживания, а именно, при увеличении вероятности возвращения заявки в систему точность аппроксимации также увеличивается.

Следует отметить, что область применимости повышается при переходе от асимптотики второго порядка к асимптотике третьего порядка повышается. Полагая приемлемой погрешность аппроксимации равную значению 0,03, на примерах Таблиц 2.1-2.2. видно, что применение асимптотики третьего порядка расширяет область применимости данного метода в два раза.

2.2 Исследование числа занятых приборов в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, определяемый функцией распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1–r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается в неё для повторного обслуживания.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t. Так как случайный процесс $\{i(t)\}$ немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную компоненту $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента поступления следующей заявки или величина перескока [61]. Тогда двумерный случайный процесс $\{i(t), z(t)\}$ будет марковским. Стационарное распределение величины перескока, определяется дифференциальным уравнением [49]

$$R'(z)+R'(0)(A(z)-1)=0.$$

Откуда

$$R(z)=R'(0)\int_0^z(1-A(x))\,dx,$$

а производная $R'(0)$ определяется из условия нормировки $R(\infty)=1$ и имеет вид

$$\lambda=R'(0)=\frac{1}{\int_0^z(1-A(x))\,dx},$$

тогда

$$R(z)=\lambda\int_0^z(1-A(x))\,dx.$$

Ставится задача исследования числа занятых приборов в системе в момент времени *t*.

Обозначим распределение вероятностей двумерного марковского процесса $P(z,i,t)=P\{z(t)<z,i(t)=i\}$, и запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(z,i,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(0,i,t)}{\partial z}+i\mu rP(z,i,t)+\mu(1+i)(1-r)P(z,i+1,t)+$$

$$+A(z)\frac{\partial P(0,i-1,t)}{\partial z}-i\mu P(z,i,t)\text{, где } i=\overline{0,\infty},$$

здесь $\frac{\partial P(0,i,t)}{\partial z}=\left.\frac{\partial P(z,i,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$.

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(z,u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(z,i,t),$$

для которых имеем

$$\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z}+j\mu(1-r)(1-e^{-ju})\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial u}+(e^{ju}A(z)-1)\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z}, \quad (2.31)$$

здесь $\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z}=\left.\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$.

Рассмотрим систему при стационарном режиме функционировании системы, уравнение (2.31) перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial H(z,u)}{\partial z}+j\mu(1-r)(1-e^{-ju})\frac{\partial H(z,u)}{\partial u}+(e^{ju}A(z)-1)\frac{\partial H(0,u)}{\partial z}=0. \quad (2.32)$$

2.2.1 Метод начальных моментов для исследования числа занятых приборов в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Определим основные числовые характеристики случайного процесса $i(t)$ – числа занятых приборов в рассматриваемой системе.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $A(x)$ – функция распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок в систему, $R(z)=\lambda\int_0^z(1-A(x))\,dx$ – стационарное распределение величины перескока, где $\lambda=\frac{1}{\int_0^z(1-A(x))\,dx}$ имеет смысл интенсивности входящего потока.*

Тогда начальные моменты числа занятых приборов при стационарном функционировании системы GI|M|∞ определяются выражениями

$$M\{i\}=\frac{\lambda}{\mu(1-r)}, \quad (2.33)$$

$$M\{i^2\}=\frac{\lambda}{\mu(1-r)}\left\{1+\frac{A^*(\mu(1-r))}{\left(1-A^*(\mu(1-r))\right)}\right\}, \qquad A^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}dA(z). \quad (2.34)$$

Доказательство.

1 этап. Момент первого порядка.

Для того чтобы найти момент первого порядка числа занятых приборов, продифференцируем уравнение (2.32) по u

$$\frac{\partial H^2(z,u)}{\partial z \partial u} + j^2 \mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial H(z,u)}{\partial u} + j\mu(1-r)(1-e^{-ju})\frac{\partial H^2(z,u)}{\partial u^2} +$$

$$+je^{ju}A(z)\frac{\partial H(0,u)}{\partial z} + (e^{ju}A(z)-1)\frac{\partial H^2(0,u)}{\partial z \partial u} = 0. \qquad (2.35)$$

Полагая u=0, введем обозначение

$$\left.\frac{\partial H(z,u)}{\partial u}\right|_{u=0} = jm_1(z),$$

тогда из (2.35) имеем следующее дифференциальное уравнение относительно функции $m_1(z)$

$$m_1'(z) - \mu(1-r)m_1(z) + A(z)\lambda + (A(z)-1)m_1'(0) = 0, \qquad (2.36)$$

Полученное уравнение будем решать методом преобразования Лапласа-Стилтьеса.

Обозначим

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} dm_1(z), \qquad A^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} dA(z).$$

Выполняя в (2.36) преобразование Лапласа-Стилтьеса, получим равенство

$$\left(\mu(1-r)-\alpha\right)\phi_1(\alpha) = m_1'(0)\left(A^*(\alpha)-1\right) + \lambda A^*(\alpha). \qquad (2.37)$$

Для того чтобы определить константу $m_1'(0)$, положим в данном равенстве $\alpha = \mu(1-r)$

$$m_1'(0) = \lambda \frac{A^*(\mu(1-r))}{\left(1 - A^*(\mu(1-r))\right)}.$$

Подставляя найденное выражение $m_1'(0)$ в (2.35), получим равенство

$$\phi_1(\alpha) = \frac{1}{\mu(1-r)-\alpha}\left\{m_1'(0)\left(A^*(\alpha)-1\right) + \lambda A^*(\alpha)\right\},$$

которое определяет преобразование Лапласа-Стилтьеса функции $m_1(z)$.

Так как

$$m_1(\infty)=\phi_1(0)=\frac{\lambda}{\mu(1-r)},$$

то для момента первого порядка числа занятых приборов в рассматриваемой системе можно записать

$$M\{i\}=\frac{\lambda}{\mu(1-r)}.$$

2 этап. Момент второго порядка.

Определим момент второго порядка числа занятых приборов в системе, для этого продифференцируем (2.32) по u дважды

$$\frac{\partial H^3(z,u)}{\partial z\partial u^2}-j^3\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial H(z,u)}{\partial u}+2j^2\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial H^2(z,u)}{\partial u^2}+$$

$$+j\mu(1-r)(1-e^{-ju})\frac{\partial H^3(z,u)}{\partial u^3}+j^2e^{ju}A(z)\frac{\partial H(0,u)}{\partial z}+2je^{ju}A(z)\frac{\partial H^2(0,u)}{\partial z\partial u}+$$

$$+(e^{ju}A(z)-1)\frac{\partial H^3(0,u)}{\partial z\partial u^2}=0. \qquad (2.38)$$

Полагая u=0, введем обозначение

$$\left.\frac{\partial H^2(z,u)}{\partial u^2}\right|_{u=0}=j^2m_2(z),$$

тогда из (2.38) имеем следующее дифференциальное уравнение

$$m_2'(z)+\mu(1-r)m_1(z)-2\mu(1-r)m_2(z)+A(z)R'(0)+$$

$$+2A(z)m_1'(0)+(A(z)-1)m_2'(0)=0.$$

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом преобразования Лапласа-Стилтьеса, обозначим

$$\phi_2(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}dm_2(z),\qquad A^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}dA(z),$$

тогда имеем

$$\big(2\mu(1-r)-\alpha\big)\phi_2(\alpha)=\mu(1-r)\phi_1(\alpha)+A^*(\alpha)\big(\lambda+2m_1'(0)\big)+m_2'(0)\Big(A^*(\alpha)-1\Big), \qquad (2.39)$$

положив в котором $\alpha = 2\mu(1-r)$, найдём вид константы $m_2'(0)$

$$m_2'(0) = \Big(\mu(1-r)\phi_1(\mu(1-r)) + A^*(\mu(1-r))\big(\lambda + 2m_1'(0)\big)\Big)\Big(1 - A^*(\mu(1-r))\Big)^{-1}.$$

Подставляя найденное выражение $m_2'(0)$ в (2.38), получим равенство

$$\phi_2(\alpha) = \frac{1}{\big(2\mu(1-r)-\alpha\big)}\Big\{\mu(1-r)\phi_1(\alpha) + A^*(\alpha)\big(\lambda + 2m_1'(0)\big) + m_2'(0)\Big(A^*(\alpha)-1\Big)\Big\}.$$

Так как

$$m_2(\infty) = \phi_2(0) = \frac{1}{2\mu(1-r)}\big\{\mu(1-r)m_1(\infty) + \big(\lambda + 2m_1'(0)\big)\big\} =$$

$$= \frac{1}{2\mu(1-r)}\left\{\mu(1-r)\frac{\lambda}{\mu(1-r)} + \lambda + 2m_1'(0)\right\} = \frac{1}{\mu(1-r)}\big\{\lambda + m_1'(0)\big\},$$

тогда для момента второго порядка числа занятых приборов в системе имеем

$$M\{i^2\} = \frac{\lambda}{\mu(1-r)}\left\{1 + \frac{A^*(\mu(1-r))}{\Big(1 - A^*(\mu(1-r))\Big)}\right\}.$$

Теорема доказана.

2.2.2 Метод асимптотического анализа для исследования числа занятых приборов в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов в системе *GI*|*M*|∞ при определенных условиях. Для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания, то есть $\frac{1}{\mu} \to \infty$, или $\mu \to 0$.

Теорема 2.5. *Пусть A(x) – функция распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок рекуррентного потока в* *систему GI|M|∞,* $R(z)=\lambda\int_0^z(1-A(x))\,dx$ *– стационарное распределение величины перескока, где* $\lambda=\dfrac{1}{\int_0^z(1-A(x))\,dx}$ *имеет смысл интенсивности входящего потока, функция* $f_2(z)$ *удовлетворяет условию* $f_2(\infty)=0$ *и является решением дифференциального уравнения*

$$f_2'(z)-\lambda\big(R(z)-A(z)\big)+f_2'(0)\big(A(z)-1\big)=0$$

где $f_2'(0)=\lambda^2\int_0^\infty(A(z)-R(z))dz$.

Тогда характеристическая функция $h(u)=M\left\{e^{jui(t)}\right\}=H(\infty,u)=\sum_i e^{jui}P(z,i)$, *при условии растущего времени обслуживания* $(\mu\to 0)$, *имеет вид гауссовской характеристической функции с параметрами*

$$a=M\{i\}=\frac{\lambda}{\mu(1-r)},\ \sigma^2=M\left\{(i-a)^2\right\}=\frac{\kappa_2}{\mu(1-r)},\ \kappa_2=\lambda+f_2'(0).$$

Доказательство.

Обозначим

$$\mu=\varepsilon, u=\varepsilon y, H(z,u)=F_1(z,y,\varepsilon), \tag{2.40}$$

перепишем (2.30) с учетом введенных обозначений

$$\frac{\partial F_1(z,y,\varepsilon)}{\partial z}+j(1-r)(1-e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial F_1(z,y,\varepsilon)}{\partial y}+(e^{j\varepsilon y}A(z)-1)\frac{\partial F_1(0,y,\varepsilon)}{\partial z}=0. \tag{2.41}$$

В уравнении (2.41) выполнив предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим, что $F_1(z,y)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial F_1(z,y)}{\partial z}+(A(z)-1)\frac{\partial F_1(0,y)}{\partial z}=0,$$

заметим, что данное уравнение определяет функцию $R(z)$ [49], поэтому

$$F_1(z,y)=R(z)\Phi_1(y). \tag{2.42}$$

Определим вид функции $\Phi_1(y)$, для этого в уравнении (2.41) выполним предельный переход при $z\to\infty$, получим равенство

$$j(1-r)(1-e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial F_1(\infty,y,\varepsilon)}{\partial y}+(e^{j\varepsilon y}-1)\frac{\partial F_1(0,y,\varepsilon)}{\partial z}=0,$$

поделив обе части на ε и выполнив предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим

$$j(jy)(1-r)\frac{\partial F_1(\infty,y)}{\partial y}+jy\frac{\partial F_1(0,y)}{\partial z}=0.$$

Подставляя в данное выражение (2.42), получим уравнение для определения функции $\Phi_1(y)$

$$(1-r)\Phi_1'(y)=jR'(0)\Phi_1(y)=j\lambda\Phi_1(y),$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(y)=1$, имеет вид

$$\Phi_1(y)=\exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Тогда с учетом (2.42) имеем

$$F_1(z,y)=R(z)\exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}. \qquad (2.43)$$

С учетом замены (2.40) и равенства (2.43) запишем асимптотическое равенство

$$H(z,u)=R(z)\exp\left\{\frac{j\lambda u}{\mu(1-r)}\right\},$$

из которого, для характеристической функции процесса $i(t)$ в стационарном режиме, имеем выражение

$$M\{e^{jui(t)}\}=H(\infty,u)=\exp\left\{\frac{j\lambda u}{\mu(1-r)}\right\},$$

которое будем называть **асимптотикой первого порядка** числа занятых приборов в момент времени t для системы $GI|M|\infty$.

2 этап. Асимптотика второго порядка.

В уравнении (2.32) выполним замену

$$H(z,u)=H_2(z,u)\exp\left\{\frac{j\lambda u}{\mu(1-r)}\right\}, \qquad (2.44)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial H_2(z,u)}{\partial z}+j\mu(1-r)(1-e^{-ju})\left\{\frac{\partial H_2(z,u)}{\partial u}+j\frac{\lambda}{\mu(1-r)}H_2(z,u)\right\}+$$

$$+(e^{ju}A(z)-1)\frac{\partial H(0,u)}{\partial z}=0.$$

Обозначим $\mu=\varepsilon^2$ и выполним в этом уравнении замены

$$u=\varepsilon y,\ \ H(z,u)=F_1(z,y,\varepsilon), \qquad (2.45)$$

тогда получим

$$\frac{\partial F_2(z,y,\varepsilon)}{\partial z}+(1-e^{-j\varepsilon y})\left\{j\varepsilon(1-r)\frac{\partial F_2(z,y,\varepsilon)}{\partial y}-\lambda F_2(z,y,\varepsilon)\right\}+$$

$$+(e^{jy\varepsilon}A(z)-1)\frac{\partial F_2(0,y,\varepsilon)}{\partial z}=0. \qquad (2.46)$$

Решение уравнения (2.46) запишем в следующем виде

$$F_2(z,y,\varepsilon)=\Phi_2(y)\{R(z)+j\varepsilon yf_2(z)\}+O(\varepsilon^2), \qquad (2.47)$$

функция $f_2(z)$ удовлетворяет условию $f_2(\infty)=0$, и будет определена ниже, как и функция $\Phi_2(y)$.

Подставляя (2.47) в (2.46) имеем равенство

$$R'(z)+j\varepsilon yf_2'(z)-\lambda j\varepsilon yR(z)+(A(z)-1+j\varepsilon yA(z))\left\{R'(0)+j\varepsilon yf_2'(0)\right\}=O(\varepsilon^2). \qquad (2.48)$$

Так как выполняется равенство [49]

$$R'(z)+R'(0)(A(z)-1)=0,$$

то уравнение (2.48) можно переписать в виде уравнения

$$f_2'(z)-\lambda R(z)+f_2'(0)(A(z)-1)+\lambda A(z)=0, \qquad (2.49)$$

определяющего функцию $f_2(z)$.

Для нахождения функции $\Phi_2(y)$ в уравнении (2.46), раскладывая экспоненты в ряд и выполняя предельный переход при $z\to\infty$, получим

$$j\varepsilon(j\varepsilon y)(1-r)\frac{\partial F_2(\infty,y,\varepsilon)}{\partial y}-\lambda\left(j\varepsilon y+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}\right)F_2(\infty,y,\varepsilon)+$$

$$+\left(j\varepsilon y+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}\right)F_2(0,y,\varepsilon)=O(\varepsilon^3),$$

подставляя в которое разложение (2.47), ограничиваясь слагаемым второго порядка малости, имеем соотношение

$$\varepsilon^2 y(1-r)\Phi_2'(y)R(\infty)=-\lambda\Phi_2(y)R(\infty)\left(j\varepsilon y-\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}\right)+$$

$$+\Phi_2(y)\left(\lambda+j\varepsilon y f_2'(0)\right)\left(j\varepsilon y+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}\right)+O(\varepsilon^3).$$

Выполняя в данном выражении преобразования, имеем

$$(1-r)\Phi_2'(y)=j^2 y\Phi_2(y)\left(\lambda+f_2{}'(0)\right),$$

решение которого, удовлетворяющее условию $\Phi_2(0)=1$, имеет вид

$$\Phi_2(y)=\exp\left\{\frac{(jy)^2}{2(1-r)}\kappa_2\right\},$$

где параметр κ_2 определяется следующим равенством $\kappa_2=\lambda+f_2'(0)$.

Производную $f_2'(0)$ найдем из соотношения (2.49)

$$f_2'(0)=\lambda^2\int_0^\infty (A(z)-R(z))dz.$$

В силу замены (2.45) имеем следующее соотношение

$$H_2(z,u)=F_2(z,y,\varepsilon)\approx F_2(z,y)=R(z)\exp\left\{\frac{(jy)^2}{2(1-r)}\kappa_2\right\}=R(z)\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\},$$

тогда, с учетом замены (2.44), запишем асимптотическое равенство

$$H(z,u)=R(z)\exp\left\{\frac{ju\lambda}{(1-r)\mu}+\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}.$$

Для характеристической функции величины $i(t)$ получим

$$M\{e^{jui(t)}\}=H(\infty,u)=\exp\left\{\frac{ju\lambda}{(1-r)\mu}+\frac{(ju)^2}{2(1-r)}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}.$$

Следовательно, стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе $GI|M|\infty$, можно аппроксимировать гауссовским распределением со следующими параметрами

$$a = M\{i\} = \frac{\lambda}{\mu(1-r)},\ \sigma^2 = M\left\{(i-a)^2\right\} = \frac{\kappa_2}{\mu(1-r)}.$$

Теорема доказана.

2.2.3 Численный анализ асимптотических результатов

Проведем сравнение вероятностных характеристик, полученных для данной системы аналитическим методом и методом асимптотического анализа, для этого рассмотрим случай, когда на вход системы поступает рекуррентный поток заявок, с функцией распределения длин интервалов между моментами поступлений заявок заданной следующим образом

$$A(z) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ \dfrac{z-b}{b-a}, a \le z < b \\ 1, z \ge b \end{cases}, \text{ где } a, b > 0.$$

Аналитические выражения для нахождения момента первого и второго порядка числа занятых приборов в системе имеют вид (2.33, 2.34) соответственно.

Пример 2.3. Используя значения r = 0,7, a = 1, b = 5 и, изменяя параметр μ, имеем следующие результаты (Таблица 2.3)

Таблица 2.3. – Сравнение асимптотических и аналитических значений дисперсий при r = 0,7, a = 1, b = 5

D \ **μ**	**1**	**0,5**	**0,25**	**0,1**	**0,05**
Асимптотические результаты	0,637	1,273	2,547	6,367	12,734
Аналитические результаты	0,720	1,361	2,639	6,467	12,847
Относительная погрешность Δ	17%	6%	**3%**	**1,5%**	**0,9%**

Если считать приемлемой относительную погрешность $\Delta < 3\%$, то для заданных параметров системы применение асимптотических результатов допустимо при μ<0,25.

Пример 2.4. Рассмотрим случай, когда вероятность возврата заявки в систему равна r = 0,01, а параметры a = 1, b = 5 (Таблица 2.4)

Таблица 2.4. – Сравнение асимптотических и аналитических значений дисперсий r = 0,01, a = 1, b = 5

μ / D	1	0,5	0,25	0,1	0,05
Асимптотические результаты	0,193	0,386	0,772	1,929	3,859
Аналитические результаты	0,257	0,436	0,856	2,020	3,954
Относительная погрешность Δ	25%	18%	10%	4,5%	**2,4%**

Из таблицы 2.4. можно сделать вывод о том, что применение асимптотического метода допустимо при μ<0,05, следовательно, относительно примера 2.3., область применимости метода уменьшилась в 5 раз. Таким образом, на асимптотические результаты влияет не только время обслуживания заявок, но и вероятность их возврата в систему, то есть, чем выше общая интенсивность поступления заявок в систему, тем ближе асимптотические результаты к аналитическим.

2.3 Исследование потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (*MMPP*), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t)$ = 1, 2, …, K, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{\nu k}\|$, (ν, k = 1, 2, …, K), и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = diag[\lambda_k],\ k = \overline{1,K}$.

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью 1–*r* покидает систему, или, с вероятностью *r*, возвращается для повторного обслуживания.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $n(t)$ – число заявок потока повторных обращений в систему за время t, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова.

Очевидно, что процесс $\{i(t), n(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в рассматриваемую систему зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$, поэтому будем рассматривать трехмерную цепь Маркова $\{k(t), i(t), n(t)\}$.

Для распределения вероятностей $P(k,i,n,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида:

$$\frac{\partial P(k,i,n,t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k,i,n,t) - i\mu P(k,i,n,t) + \lambda_k P(k,i-1,n,t) +$$
$$+\mu(1-r)(1+i)P(k,i+1,n,t) + \mu i r P(k,i,n-1,t) + \sum P(\nu,i,n,t)q_{\nu k}, \quad (2.50)$$

$k,v = 1, 2, \ldots, K$, $\quad i, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k,u,w,t) = \sum_i \sum_n e^{jui} e^{jwn} P(k,i,n,t).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial u} = j\sum_i \sum_n i e^{jui} e^{jwn} P(k,i,n,t),$$

$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial w} = j\sum_i \sum_n n e^{jui} e^{jwn} P(k,i,n,t),$$

из (2.52) получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial t} + \mu j \frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial u}(-1 + (1-r)e^{-ju} + re^{jw}) =$$
$$= H(k,u,w,t)[\lambda_k (e^{ju} - 1)] + \sum H(\nu,u,w,t)q_{\nu k}.$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u,w,t)[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \quad (2.51)$$

где

$$\mathbf{H}(u,w,t) = [H(1,u,w,t), H(2,u,w,t), ..., H(K,u,w,t)],$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

2.3.1. Метод начальных моментов для исследования потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Для нахождения основных вероятностных характеристик процесса, характеризующего среднее число заявок потока повторных обращений в систему за время *t,* будем использовать дифференциально-матричное уравнение (2.51).

Теорема 2.6. *Математическое ожидание числа заявок потока повторных обращений, при стационарном режиме функционирования системы MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием за время наблюдений t, определяется выражением*

$$M\{n(t)\} = rt\frac{\mathbf{R}\Lambda\mathbf{E}}{(1-r)}. \quad (2.52)$$

Доказательство.

Продифференцируем уравнение (2.51) по переменной *w*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t \partial w} + j^2 r\mu e^{jw}\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju})\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u \partial w} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w}[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}]. \qquad (2.53)$$

Полагая u=w=0 и обозначив

$$\left.\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w}\right|_{\substack{u=0\\ w=0}} = j\mathbf{m}\mathbf{p}_1(t),$$

из (2.53) получим следующую систему дифференциальных уравнений в матричном виде

$$\mathbf{mp}_1'(t)+j^2 r\mu\mathbf{m}_1=\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{Q}. \qquad (2.54)$$

Умножая обе части системы (2.54) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}=[1,\ \ 1,\ \ ...,\ \ 1]^T$, получим уравнение

$$\mathbf{mp}_1'(t)\mathbf{E}-r\mu\mathbf{m}_1\mathbf{E}=0. \qquad (2.55)$$

Решая уравнение (2.55), получим

$$\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E}=r\mu\mathbf{m}_1\mathbf{E}t,$$

где $\mathbf{m}_1$ – среднее число занятых приборов, при стационарном функционировании системы, полученное в параграфе 2.1.

Тогда первый момент числа заявок потока повторных обращений в систему за время t имеет вид

$$M\{n(t)\}=\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E}=r\mu\mathbf{m}_1\mathbf{E}t=rt\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.7. *Смешанный момент числа занятых приборов и заявок потока повторных обращений, при стационарном режиме функционирования системы MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием, определяется выражением*

$$M\{i(t)\cdot n(t)\}=\frac{1}{\mu(1-r)}\left(1-e^{-\mu(1-r)t}\right)\left(\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E\Lambda}+r\mu\mathbf{ms}_2\mathbf{E}\right). \qquad (2.56)$$

где $\mathbf{m}_2\mathbf{E}=\mathbf{R\Lambda}\{(\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I})^{-1}(2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I}-\mathbf{I})\}(\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{E}$, $\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E}=rt\dfrac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)}$ *– второй момент числа занятых приборов и среднее число повторных обра-*

щений за время t при стационарном функционировании системы соответственно.

Доказательство.

Для нахождения смешанного момента числа занятых приборов и заявок потока повторных обращений в систему продифференцируем выражение (2.51) по u и по w дважды

$$\frac{\partial^3 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t \partial w \partial u} + j^2 r\mu e^{jw} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u^2} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju}) \frac{\partial^3 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u^2 \partial w} -$$

$$- j^2 \mu(1-r)e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u \partial w} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u \partial w}[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}] + je^{ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w} \mathbf{\Lambda}.$$

Полагая u=w=0, ведем обозначение

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w \partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j^2 \mathbf{m}_{12}(t),$$

учитывая которое, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{m}_{12}(t)}{\partial t} + j^2 r\mu \mathbf{m}\mathbf{s}_2 - j^2 \mu(1-r)\mathbf{m}_{12}(t) = \mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{Q} + \mathbf{m}\mathbf{p}_1(t)\mathbf{\Lambda}. \tag{2.57}$$

Умножая обе части системы (2.57) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E} = [1, \ 1, \ ..., \ 1]^T$, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{m}_{12}(t)}{\partial t}\mathbf{E} - r\mu \mathbf{m}_2 \mathbf{E} + \mu(1-r)\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E} = \mathbf{m}\mathbf{p}_1(t)\mathbf{\Lambda}\mathbf{E},$$

где $\mathbf{m}_2\mathbf{E}$ – второй момент числа занятых приборов при стационарном функционировании системы, определяемый соотношением (2.5), $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица.

Решая полученное дифференциальное уравнение при начальном условии $\mathbf{m}_{12}(0) = 0$, имеем

$$\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E} = \frac{1}{\mu(1-r)}\left(1 - e^{-\mu(1-r)t}\right)\left(\mathbf{m}\mathbf{p}_1(t)\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} + r\mu \mathbf{m}_2 \mathbf{E}\right).$$

Следовательно, смешанный момент числа занятых приборов и заявок потока повторных обращений в систему имеет вид

$$M\{i(t)\cdot n(t)\}=\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}=\frac{1}{\mu(1-r)}\left(1-e^{-\mu(1-r)t}\right)\left(\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{\Lambda E}+r\mu\mathbf{m}_2\mathbf{E}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 2.8. *Второй момент числа заявок потока повторных обращений, при стационарном функционировании системы MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием, определяется выражением*

$$M\{n^2(t)\}=r\mu[\mathbf{m}_1\mathbf{E}+2\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}]\,t. \qquad (2.58)$$

Доказательство.

Найдем момент второго порядка числа заявок потока повторных обращений в систему. Продифференцируем (2.51) по w дважды

$$\frac{\partial^3\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t\partial w^2}+j^3r\mu e^{jw}\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial^3\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u\partial w^2}+$$

$$+2j^2\mu re^{jw}\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u\partial w}=\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w^2}[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}]. \qquad (2.59)$$

Полагая u=w=0, ведем обозначение

$$\left.\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w^2}\right|_{\substack{u=0\\ w=0}}=j^2\mathbf{mp}_2(t).$$

Учитывая данное обозначение в (2.59) получаем следующую систему уравнений

$$\mathbf{mp}_2'(t)+j^2r\mu\mathbf{m}_1+2j^2\mu r\mathbf{m}_{12}(t)=\mathbf{mp}_2(t)\mathbf{Q}. \qquad (2.60)$$

Просуммируем обе части полученной системы (2.62)

$$\mathbf{mp}_2'(t)\mathbf{E}-r\mu\mathbf{m}_1\mathbf{E}-2\mu r\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}=0. \qquad (2.61)$$

Решая уравнение (2.61), имеем

$$\mathbf{mp}_2(t)\mathbf{E}=r\mu[\mathbf{m}_1\mathbf{E}+2\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}]t,$$

где $\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}$ – смешанный момент числа занятых приборов и числа повторных обращений в систему за время t.

Тогда второй момент числа заявок потока повторных обращений в систему имеет вид

$$M\{n^2(t)\} = \mathbf{m}\mathbf{p}_2(t)\mathbf{E} = r\mu[\mathbf{m}\mathbf{s}_1\mathbf{E} + 2\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}]t\,.$$

Теорема доказана.

2.3.2. Метод асимптотического анализа для исследования потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Найдем асимптотическую характеристическую функцию числа повторных обращений в системе *MMPP*|*M*|∞ за время *t* при условии растущего времени.

Теорема 2.9. *Пусть* $\mathbf{R} = [R(1), R(2), ..., R(K)]$ *– вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова* $k(t)$, *определяемый решением системы уравнений* $\begin{cases}\mathbf{RE} = 1 \\ \mathbf{RQ} = 0\end{cases}$, *вектор-функция* $\mathbf{H}(u,w,t) = [H(1,u,w,t), H(2,u,w,t), ..., H(K,u,w,t)]$, *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению* (*2.51*).

Тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок потока повторных обращений $h(w,t) = M\left\{e^{jwn(t)}\right\}$, *при условии растущего времени обслуживания, то есть при* $\mu \to 0$, *имеет вид*

$$h(w,t) = \exp\left\{\frac{r\kappa t(e^{jw} - 1)}{1-r}\right\},\ \kappa = \mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}\,,$$

Доказательство.

Обозначим

$$\mu = \varepsilon,\ u = \varepsilon y,\ \mathbf{H}(u,w,t) = \mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon). \qquad (2.62)$$

Перепишем (2.51) с учетом введенных обозначений

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)}{\partial t} + j(re^{iw} - 1 + (1-r)e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial \mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)}{\partial y} =$$

$$= \mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)\left[\left(e^{j\varepsilon y} - 1\right)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}\right]. \qquad (2.63)$$

Суммируя все уравнения полученной системы (2.63) и выполняя предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y,w,t)}{\partial t}\mathbf{E} + jr(e^{iw}-1)\frac{\partial \mathbf{F}(y,w,t)}{\partial y}\mathbf{E} = 0, \tag{2.64}$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{F}(y,w,t)\mathbf{E} = \varphi\left(t + \frac{jy}{r(e^{jw}-1)}\right),$$

где $\varphi(y)$ некоторая функция.

Так как число обслуженных заявок за интервал нулевой длины с вероятностью единица равно нулю, то начальное условие для определения вида функции $\varphi(y)$ имеет вид

$$\mathbf{F}(y,w,0)\mathbf{E} = \Phi(y), \tag{2.65}$$

где $\Phi(y)$ асимптотическое приближение характеристической функции распределения числа занятых приборов в системе в условии растущего времени обслуживания заявок, вида

$$\Phi(y) = \exp\left\{\frac{jy\kappa}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, решение уравнения (2.64), удовлетворяющее начальному условию (2.65) имеет вид

$$\mathbf{F}(y,w,t)\mathbf{E} = \exp\left\{\frac{r\kappa t(e^{jw}-1)}{1-r} + \frac{jy\kappa}{1-r}\right\}. \tag{2.66}$$

Полагая в (2.66) y=0, получим асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, поступивших в систему $MMPP|M|\infty$ за время t для повторного обслуживания, при условии растущего времени обслуживания

$$h(w,t) = M\{e^{jwn(t)}\} = \mathbf{H}(0,w,t)\mathbf{E} = \mathbf{F}(0,w,t,\varepsilon)\mathbf{E} \approx$$

$$\approx \mathbf{F}(0,w,t)\mathbf{E} = \exp\left\{\frac{r\kappa t(e^{jw}-1)}{1-r}\right\}.$$

Теорема доказана.

Следовательно, поток повторных обращений в рассматриваемой системе, при условии растущего времени обслуживания, имеет распределение Пуассона.

Статистический анализ асимптотических результатов.

Проверим результаты применения асимптотического метода на численном примере.

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок, на вход которой поступает поток *MMPP*-поток, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{pmatrix}$ управляющей цепи Маркова и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Тогда интенсивность входящего потока $\kappa=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}=4,73$. Время обслуживания требований, распределено по экспоненциальному закону с параметром μ.

В разделе 2.3 показано, что поток повторных обращений в систему в условии растущего времени обслуживания можно аппроксимировать распределением Пуассона с параметром $\frac{r\kappa t}{1-r}$, тогда, учитывая, что вероятность возврата заявок в систему r=0,5, имеем интенсивность потока повторных обращений λ = 4,73.

Имея данные, полученные с помощью имитационной модели, проверим гипотезу о распределении времени между поступлениями заявок в поток повторных обращений по экспоненциальному закону с помощью критерия согласия Пирсона [13].

Гипотеза H₀: случайная величина X – время между наступлениями событий в потоке повторных обращений распределено по экспоненциальному закону.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_l \frac{(n_l - n \cdot P_l)^2}{n \cdot P_l},$$

где n_l – эмпирические частоты, n – объем выборки, P_l – вероятность появления наблюдаемого значения x_l, рассчитанная при условии, что непрерывная случайная величина X подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей.

Критическое значение $\chi^2_{кр}$ находится по таблице, в зависимости от заданного уровня значимости α и числа степеней свободы df: $\chi^2_{кр}(\alpha, df)$.

Используя статистический пакет прикладных программ STATISTICA, проверим нулевую гипотезу.

Для анализа рассмотрим данные, когда параметр времени обслуживания μ=0,5. На рисунке 2.1. приведен их статистический анализ.

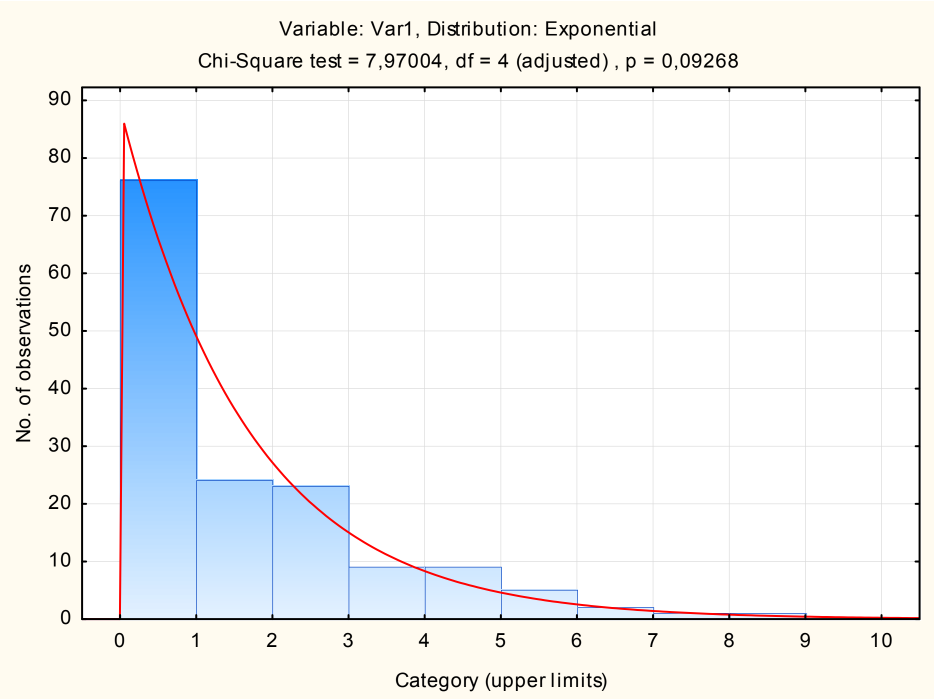


Рисунок 2.1. – Статистический анализ интервалов между наступлением событий потока повторных обращений в системе $MMPP|M|\infty$

Имеем статистическое значение $\chi^2 = 7,97004$, при уровне значимости α=0,05 с числом степеней свободы *df*=4, определяем критерий Пирсона $\chi^2_{кр}(0,05;4) = 9,4877$, так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ делаем вывод о том, что гипотезу о распределении случайной величины *X* по экспоненциальному закону не отвергаем. Вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна – *p*=0,09268.

2.3.3. Численный анализ асимптотических результатов

Пример 2.5. Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок, на вход которой поступает поток *MMPP*, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix}$ управляющей цепи Маркова $k(t)$, набором условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$. Заявка, поступившая в систему, занимает любой свободный прибор, на котором обслуживается в течение случайного времени, распределенного согласно экспоненциальному закону с параметром μ. Время наблюдения за экспериментом *t*=10. Используя заданные параметры, имеем следующий результат.

Таблица 2.5. – Сравнение асимптотических и аналитических результатов при *t*=10.

r / μ	**0,05**			**0,01**			**0,005**			**0,001**		
	Dас	**Dан**	Δ	**Dас**	**Dан**	Δ	**Dас**	**Dан**	Δ	**Dас**	**Dан**	Δ
0,1	0,316	0,494	36,1%	0,061	0,067	9,9%	0,030	0,032	5,2%	0,006	0,006	**1,1%**
0,05	0,316	0,467	32,4%	0,061	0,066	8,5%	0,030	0,032	**4,4%**	0,006	0,006	**0,9%**
0,01	0,316	0,428	26,3%	0,061	0,065	6,4%	0,030	0,031	**3,3%**	0,006	0,006	**0,7%**
0,005	0,316	0,422	25,2%	0,061	0,065	6,1%	0,030	0,031	**3,1%**	0,006	0,006	**0,6%**
0,001	0,316	0,417	24,2%	0,061	0,064	5,8%	0,030	0,031	**3%**	0,006	0,006	**0,6%**

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что на асимптотические результаты влияет как величина периода наблюдения t, так и вероятность r возвращения заявки в систему. Полагая приемлемой погрешность аппроксимации равную значению 5%, можно считать, что допустимо применение асимптотических результатов при $r \cdot \mu \cdot t < 0{,}025$

2.4 Исследование потока повторных обращений в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, определяемый функцией распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается в неё для повторного обслуживания.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t, $n(t)$ – число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного обслуживания. Так как случайный процесс $\{i(t),\ n(t)\}$ – немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную компоненту $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента поступления следующей заявки. Тогда трехмерный процесс $\{z(t),\ i(t),\ n(t)\}$ будет марковским. Для его распределения вероятностей $P(z,i,n,t) = P\{z(t) < z, i(t) = i, n(t) = n\}$ запишем дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0,i,n,t)}{\partial z} + i\mu r P(z,i,n-1,t) + \mu(1+i)(1-r)P(z,i+1,n,t) +$$

$$+ A(z)\frac{\partial P(0,i-1,n,t)}{\partial z} - i\mu P(z,i,n,t), \text{ где } i = \overline{0,\infty}, n = \overline{0,\infty}.$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(z,u,w,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{jui}e^{jwn}P(z,i,n,t),$$

тогда имеем

$$\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial z}-j\mu\left[(1-r)e^{-ju}+re^{jw}-1\right]\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial u}+$$

$$+(e^{ju}A(z)-1)\frac{\partial H(0,u,w,t)}{\partial z}. \qquad (2.67)$$

2.4.1. Метод асимптотического анализа для исследования потока повторных обращений в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Определим характеристики потока повторных обращений в рассматриваемой системе методом асимптотического анализа. Рассмотрим систему *GI*|*M*|∞ с повторным обслуживанием при условии растущего времени обслуживания.

Теорема 2.10. *Пусть* $A(x)$ *– функция распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок рекуррентного потока в систему GI|M|∞,* $R(z)=\lambda\int_0^z(1-A(x))\,dx$ *– стационарное распределение величины перескока, где* $\lambda=\frac{1}{\int_0^z(1-A(x))\,dx}$, *частичные характеристические функции* $H(z,u,w,t)$ *удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.67).*

Тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок потока повторных обращений $h(w,t)=M\left\{e^{jwn(t)}\right\}$, *при условии растущего времени обслуживания, то есть при* $\mu\to 0$, *имеет вид*

$$h(w,t)=\exp\left\{\frac{r\lambda t}{1-r}(e^{jw}-1)\right\}.$$

Доказательство.

Обозначим

$$\mu = \varepsilon, u = \varepsilon y, H(z,u,w,t) = F(z,y,w,t,\varepsilon) \qquad (2.68)$$

и перепишем (2.70) с учетом введенных обозначений

$$\frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial z} + (e^{j\varepsilon y}A(z)-1)\frac{\partial F(0,y,w,t,\varepsilon)}{\partial z} -$$

$$-j((1-r)e^{-j\varepsilon y} + re^{jy} - 1)\frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial y} = 0\,. \qquad (2.69)$$

Выполняя в данном уравнении предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $F(z,y,w,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial t} = \frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial z} + (A(z)-1)\frac{\partial F(0,y,w,t)}{\partial z} - jr(e^{jw}-1)\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial y}\,.$$

Выполняя предельный переход при $z \to \infty$, получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial t} + jr(e^{jw}-1)\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial y} = 0\,, \qquad (2.70)$$

общее решение которого имеет вид

$$F(y,w,t) = \phi\left(t + \frac{jy}{r(e^{jw}-1)}\right),$$

где $\phi(y)$ – некоторая функция. Для определения вида функции $\phi(y)$ используем начальное условие

$$F(y,w,0) = \Phi(y)\,, \qquad (2.71)$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе в момент времени t в условии растущего времени обслуживания, вид которого был определен в параграфе 2.2.

$$\Phi(y) = \exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Тогда частное решение уравнения (2.70), удовлетворяющее начальному условию (2.71) имеет вид

$$F(y,w,t) = \exp\left\{\frac{r\lambda t}{1-r}(e^{jw}-1) + \frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Полагая в данном равенстве y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, поступивших в систему $GI|M|\infty$ для повторного обслуживания за время t, в условии растущего времени обслуживания

$$h(w,t)=M\{e^{jwn(t)}\}=H(0,w,t)=F(0,w,t,\varepsilon)\approx\exp\left\{\frac{r\lambda t}{1-r}(e^{jw}-1)\right\}.$$

Теорема доказана.

Полученный вид характеристической функции, позволяет сделать вывод о том, что поток повторных обращений в рассматриваемую систему, при условии растущего времени обслуживания, можно аппроксимировать потоком Пуассона.

Статистический анализ асимптотических результатов.

Проверим результаты применения асимптотического метода на численном примере.

Рассмотрим СМО вида $GI|M|\infty$. Пусть на вход поступает рекуррентный поток, в котором длины интервалов между моментами поступления заявок имеют Гамма-распределение с параметром формы α=0,5 и параметром масштаба β=2,5, тогда интенсивность входящего потока λ=5. Учитывая вероятность возвращения заявки в систему r=0,1, имеем интенсивность потока повторных обращений λ=0,555. Время обслуживания требований, распределенного согласно экспоненциального закона с параметром μ.

Имея данные, полученные с помощью имитационной модели, проверим гипотезу о распределении времени между поступлениями заявок в поток повторных обращений по экспоненциальному закону с помощью критерия согласия Пирсона [13].

Для оценки полученных асимптотических результатов с помощью критерий согласия Пирсона проверим гипотезу о распределении времени между поступлениями заявок в поток повторных обращений по экспоненциальному закону.

Гипотеза H_0: случайная величина X – время между наступлениями событий в потоке повторных обращений распределено экспоненциально по экспоненциальному закону.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_l \frac{(n_l - n \cdot P_l)^2}{n \cdot P_l},$$

где n_l – эмпирические частоты, n – объем выборки, P_l – вероятность появления наблюдаемого значения x_l, рассчитанная при условии, что непрерывная случайная величина X подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей.

Критическое значение $\chi^2_{кр}$ находится по таблице $\chi^2_{кр}$ – распределения в зависимости от заданного уровня значимости α и числа степеней свободы df: $\chi^2_{кр}(\alpha, df)$.

Используя статистический пакет прикладных программ STATISTICA, проверим нулевую гипотезу.

Для анализа, рассмотрим данные, когда параметр времени обслуживания μ=0,5. На рисунке 2.2. приведен их статистический анализ.

Имеем статистическое значение $\chi^2 = 5,77967$, при уровне значимости α=0,05 с числом степеней свободы df=3, определяем критерий Пирсона $\chi^2_{кр}(0,05;3) = 7,814728$, так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ делаем вывод о том, что гипотезу о распределении случайной величины X по экспоненциальному закону не отвергаем. Вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна – p=0,12284.

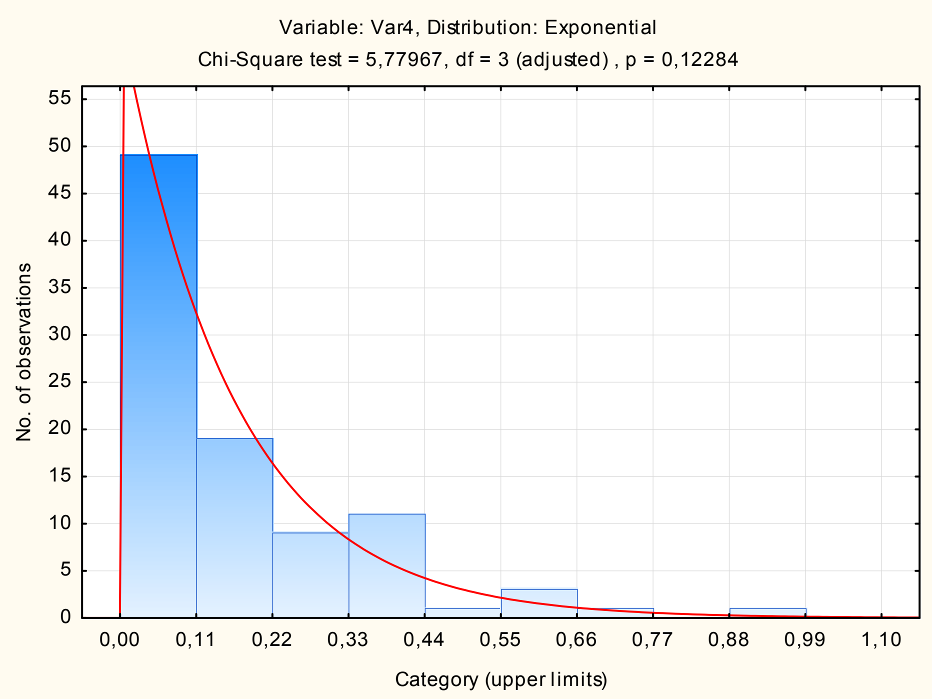


Рисунок 2.2. – Статистический анализ интервалов между наступлением событий потока повторных обращений в системе $GI|M|\infty$

Таким образом, статистический анализ имитационной модели потока повторных обращений подтверждает результаты асимптотического анализа.

2.4.2. Численный анализ асимптотических результатов

Проведем сравнение распределения числа повторных обращений в систему за время t, полученные методом асимптотического анализа и допредельным способом для частного случая, когда на вход системы поступает поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)=1-e^{-\lambda x}$. Для этого с помощью обратного преобразования Фурье данной характеристической функции, найдем асимптотическое распределение вероятностей $P_2(n, t)$

$$P_2(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwn}h_2(w,t)dw.$$

Используя вид производящей функции распределения вероятностей $P(n, t)$ числа повторных обращений, реализованных за время t, в системе $M|M|\infty$, полученный в работе [55], имеем:

$$P(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-jwn}h_0(w,t)dw,$$

где $h_0(w,t)=\exp\left\{\lambda r\frac{e^{jw}-1}{1-re^{jw}}t-\frac{\lambda r^2}{\mu(1-r)}\frac{(e^{jw}-1)^2}{(1-re^{jw})^2}\left(1-e^{-\mu(1-re^{jw})t}\right)\right\}$.

Пример 2.8. Используем следующие значения параметров λ=0,6, *t*=10. Определим расстояние Колмогорова между распределениями вероятностей при изменении значения параметра времени обслуживания μ и вероятности возврата заявки в систему *r*. Полученные результаты приведем в таблице 2.8.

Таблица 2.8. – Расстояние Колмогорова Δ между асимптотическим и допредельным распределениями вероятностей

μ \ r	**0,7**	**0,5**	**0,3**	**0,1**
0,1	0,240	0,176	0,111	0,037
0,05	0,143	0,107	0,064	**0,021**
0,01	0,033	**0,023**	**0,015**	**0,005**
0,005	**0,017**	**0,012**	**0,007**	**0,002**

Принимая приемлемым расстояние Колмогорова равное менее 0,03, можно считать допустимым применение асимптотического метода при $\mu rt < 0{,}05$.

Резюме

Данная глава посвящена развитию метода асимптотического анализа бесконечнолинейных СМО с непуассоновским входящими потоками и повторным обслуживанием требований.

В **разделе 2.1** исследуется число занятых приборов в системе с входящим *MMPP*-потоком, заданным управляющей цепью Маркова $k(t)$ с матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$, матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$. Получены выражения, характеризующие первый, второй и третий моменты числа занятых приборов системы в момент времени *t*, кроме того, далее для исследования числа занятых приборов в рассматриваемой системе применяется метод асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания.

Определено, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе *MMPP*|M|∞, можно аппроксимировать гауссовским распределением со следующими параметрами

$$a = M\{i\} = \frac{\kappa_1}{\mu(1-r)},\ \sigma^2 = M\left\{(i-a)^2\right\} = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{\mu(1-r)}.$$

В **разделе 2.2** проводится аналогичное исследование системы бесконечнолинейной СМО, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок определяемый функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Также в данной главе проведено исследованию потока повторных обращений в системе *MMPP*|*M*|∞. С помощью метода начальных моментов в **разделе 2.3** получены выражения для моментов первого и второго порядка, числа повторных обращений в систему за время t при стационарном функционировании системы.

Доказана теорема о том, что поток повторных обращений в рассматриваемой системе в условии растущего времени обслуживания имеет распределение Пуассона с параметром $\frac{r\kappa t}{1-r}$.

Аналогичные результаты получены в **разделе 2.4.** для системы *GI*|*M*|∞.

Значительная часть исследований, приведенные в главе, получены при выполнении научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Министерства образования и науки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (2014 – 2015г.) [25]. Результаты этой главы представлены в публикациях [27, 28, 20, 18, 17, 22, 19, 21, 30, 29].

Глава 3

Асимптотический анализ суммарного потока обращений в системах MMPP|M|∞, GI|M|∞ с повторным обслуживанием требований

Данная глава посвящена обобщению результатов, полученных в параграфе 1.2, на случай непуассоновского входящего потока (*MMPP*-поток, рекуррентный поток). Исследование суммарного потока обращений проводится с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания, а также помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока.

Показано, что суммарный поток можно аппроксимировать пуассоновским распределением с параметром $\frac{\kappa t}{1-r}$.

3.1. Метод асимптотического анализа для исследования суммарного потока обращений в системе MMPP|M|∞ при условии растущего времени обслуживания

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток, управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \ldots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{\nu k}\|$, ($\nu, k = 1, 2, \ldots, K$), и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = diag[\lambda_k], k = \overline{1,K}$.

Ставится задача исследования суммарного потока обращений в системе $MMPP|M|\infty$ с повторным обслуживанием заявок.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $m(t)$ – число заявок суммарного потока, обратившихся в систему за время t, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова.

Очевидно, что процесс $\{i(t), m(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в рассматриваемую систему зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$, поэтому будем рассматривать трехмерную цепь Маркова $\{k(t), i(t), m(t)\}$. Для распределения вероятностей $P(k,i,m,t) = P\{k(t)=k, i(t)=i, m(t)=m\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(k,i,m,t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k,i,m,t) - i\mu P(k,i,m,t) + \lambda_k P(k,i-1,m-1,t) + \mu i r P(k,i,m-1,t) +$$

$$+\mu(1-r)(1+i)P(k,i+1,m,t) + \sum P(\nu,i,m,t) q_{\nu k}, \text{ где } i=\overline{0,\infty}, m=\overline{0,\infty}. \quad (3.1)$$

Введем частичные характеристические функции в виде

$$H(k,u,v,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{jui} e^{jvm} P(k,i,m,t),$$

тогда имеем

$$\frac{\partial H(k,u,v,t)}{\partial t} = j\mu\left[1 - re^{jv} - (1-r)e^{-ju}\right]\frac{\partial H(k,u,v,t)}{\partial u} +$$

$$+H(k,u,v,t)[\lambda_k(e^{j(u+v)}-1)] + \sum H(\nu,u,v,t) q_{\nu k}.$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,v,t)}{\partial t} + j\mu(re^{jv} - 1 + (1-r)e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{H}(u,v,t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u,v,t)[(e^{j(u+v)}-1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{H}(u,v,t) = [H(1,u,v,t), H(2,u,v,t), \ldots, H(K,u,v,t)],$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & \lambda_K\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & . & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & . & q_{2K}\\ . & . & . & .\\ q_{K1} & q_{K2} & . & q_{KK}\end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{R}=[R(1),R(2),...,R(K)]$ *– вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова* $k(t)$*, определяется решением системы уравнений* $\begin{cases}\mathbf{RE}=1\\ \mathbf{RQ}=0\end{cases}$*, вектор-функция* $\mathbf{H}(u,v,t)=[H(1,u,v,t),H(2,u,v,t),...,H(K,u,v,t)]$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению* (*3.2*).

Тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока $h(v,t)=M\left\{e^{jvm(t)}\right\}$*, при условии растущего времени обслуживания, то есть при* $\mu\to 0$*, имеет вид*

$$h(v,t)=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\},\ \kappa=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}.$$

Доказательство.

Рассмотрим систему *MMPP|M|∞* в условии растущего времени обслуживания, для этого обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ H\left(u,v,t\right)=F\left(y,v,t,\varepsilon\right), \tag{3.3}$$

тогда перепишем уравнение (3.2) в виде

$$\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t}=j\left[1-re^{jv}-(1-r)e^{-j\varepsilon y}\right]\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial y}+\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}(e^{j(\varepsilon y+v)}-1)+\mathbf{Q}\right]. \tag{3.4}$$

Умножая обе части уравнения (3.4) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}=[1,\ 1,\ ...,\ 1]^T$ и выполняя в нем предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим равенство

$$\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t)}{\partial t}\mathbf{E}=jr(1-e^{jv})\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t)}{\partial y}\mathbf{E}+\mathbf{F}(y,v,t)(e^{jv}-1)\mathbf{\Lambda E}, \tag{3.5}$$

Предположим, что решение уравнения (3.5) имеет вид

$$\mathbf{F}\left(y,v,t\right)=\mathbf{R}\Phi(y,v,t),\tag{3.6}$$

тогда подставляя в (3.5) вид решения (3.6) и учитывая условие нормировки **RE**=1, получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для нахождения функции Φ(*y*, *v*, *t*)

$$\frac{\partial\Phi(y,v,t)}{\partial t}=jr(1-e^{jv})\frac{\partial\Phi(y,v,t)}{\partial y}+(e^{jv}-1)\Phi(y,v,t)\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}.$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy}{jr(1-e^{jv})}=\frac{d\Phi(y,v,t)}{\kappa(e^{jv}-1)\Phi(y,v,t)},$$

где $\kappa=\mathbf{R\Lambda E}$.

Решая полученную систему дифференциальных уравнений с учетом начального условия $\Phi(y,v,0)=\Phi(y)=\exp\left\{\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}$, имеем

$$\Phi(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}.$$

Тогда решение уравнения (3.5) имеет вид

$$\mathbf{F}\left(y,v,t,\varepsilon\right)\mathbf{E}\approx\mathbf{F}\left(y,v,t\right)\mathbf{E}=\Phi(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}.$$

Полагая в порученном выражении *y*=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока обращений, поступивших в систему за время *t* для повторного и первичного обслуживания, в условии растущего времени обслуживания

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=\mathbf{H}(0,v,t)\mathbf{E}=\mathbf{F}(0,v,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Теорема доказана.

Следовательно, суммарный поток в рассматриваемой системе, при условии растущего времени обслуживания, имеет распределение Пуассона.

Статистический анализ асимптотических результатов.

Используя данные, полученные с помощью имитационной модели, проведем оценку асимптотических результатов.

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок, на вход которой поступает поток *MMPP*, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{pmatrix}$ управляющей цепи Маркова $k(t)$, набором условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Так как суммарный поток обращений можно аппроксимировать распределением Пуассона с параметром $\frac{\kappa t}{1-r}$, то, учитывая вероятность возврата заявок в систему r=0,5, имеем интенсивность потока суммарных обращений λ=9,47. Время обслуживания требований распределено по экспоненциальному закону с параметром μ=0,01.

Применяя критерий согласия Пирсона проверим гипотезу о распределении времени между поступлениями заявок в поток суммарных обращений по экспоненциальному закону.

Гипотеза *H*₀: случайная величина X – время между наступлениями событий в потоке повторных обращений распределено экспоненциально по экспоненциальному закону.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2=\sum_l \frac{(n_l-n\cdot P_l)^2}{n\cdot P_l},$$

где n_l – эмпирические частоты, n – объем выборки, P_l – вероятность появления наблюдаемого значения x_l, рассчитанная при условии, что непрерывная случайная величина X подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей.

Критическое значение $\chi^2_{кр}$ находится по таблице зависимости от заданного уровня значимости α и числа степеней свободы *df*: $\chi^2_{кр}(\alpha, df)$.

Проверим нулевую гипотезу, используя статистический пакет прикладных программ STATISTICA.

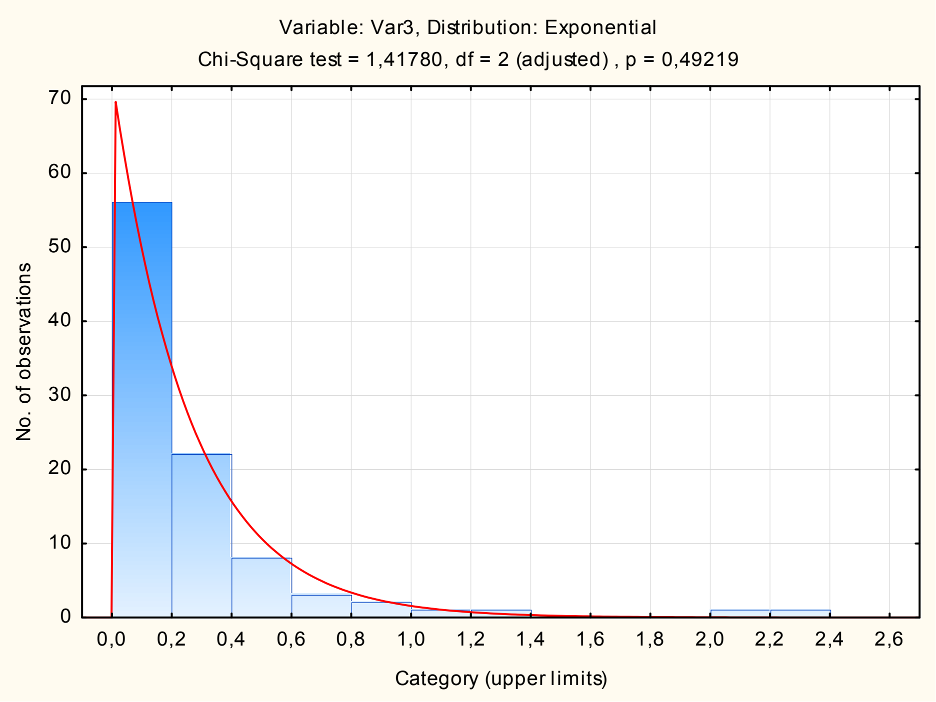


Рисунок 3.1. – Статистический анализ интервалов между наступлением событий потока суммарных обращений в системе *MMPP*|*M*|∞

Имеем статистическое значение $\chi^2 = 1,41780$, при уровне значимости α=0,05 с числом степеней свободы *df*=2, определяем критерий Пирсона $\chi^2_{кр}(0,05;2) = 5,991465$, так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ делаем вывод о том, что гипотезу о распределении случайной величины *X* по экспоненциальному закону не отвергаем. Вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна – *p*=0,49219.

Таким образом, статистический анализ имитационной модели потока повторных обращений подтверждает результаты асимптотического анализа.

3.2. Метод асимптотического анализа для исследования суммарного потока обращений в системе MMPP|M|∞ при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока

Рассмотрим систему *MMPP*|*M*|∞ при условиях растущего времени обслуживания, и предельно частых изменений состояний входящего потока. Зафиксируем некоторую матрицу инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}^{(1)}$. Положим, что *S* некоторая положительная величина, при этом

$$\mathbf{Q} = S \cdot \mathbf{Q}^{(1)}.$$

Очевидно, что стационарные распределения вероятностей состояний управляющей цепи $k(t)$, заданной матрицами инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}^{(1)}$ и $\mathbf{Q}=S\,\mathbf{Q}^{(1)}$, совпадают (не зависят от *S*). Но при увеличении значений параметра *S* интенсивности перехода цепи Маркова $k(t)$ из одного состояния в другое возрастают, что соответствует условию предельно частых изменений состояния потока.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия Теоремы 3.1, тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока* $h(v,t) = M\left\{e^{jvm(t)}\right\}$ *при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменения состояний входящего потока, то есть при* $\mu \to 0$ *и* $S \to \infty$ *имеет вид*

$$h(v,t) = \exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Доказательство.

Обозначим

$$\mu = \varepsilon,\; u = \varepsilon y,\; \frac{1}{S} = \varepsilon,\; H\left(u,v,t\right) = F\left(y,v,t,\varepsilon\right), \tag{3.7}$$

тогда перепишем уравнение (3.2) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t} = j\varepsilon\left(1-(1-r)e^{-jy\varepsilon}-re^{jv}\right)\frac{\partial \mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\varepsilon\cdot\partial y} +$$

$$+\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)\left(\mathbf{\Lambda}\left(e^{j(\varepsilon y+v)}-1\right)+S\mathbf{Q}^{(1)}\right). \tag{3.8}$$

Поделим левую и правую части уравнения (3.8) на S

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t} = j\varepsilon\left(1-(1-r)e^{-jy\varepsilon}-re^{jv}\right)\frac{\partial \mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial y} +$$

$$+\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)\left(\varepsilon\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\left(e^{j(\varepsilon y+v)}-1\right)+\mathbf{Q}^{(1)}\right)$$

и устремив $\varepsilon\to 0$, получим систему

$$\mathbf{F}(y,v,t)\mathbf{Q}^{(1)}=0,$$

поэтому ее решение имеет вид

$$\mathbf{F}(y,v,t)=\mathbf{R}\cdot\Phi(y,v,t), \tag{3.9}$$

где $\mathbf{R}$ – вектор стационарного распределения состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, а $\mathbf{\Phi}(y, v, t)$ некоторая скалярная функция. Для определения вида этой функции умножим справа уравнение (3.8) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}$ соответствующей размерности

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t}\mathbf{E} = j\left(1-(1-r)e^{-jy\varepsilon}-re^{jv}\right)\frac{\partial \mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial y}\mathbf{E} +$$

$$+\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)\left(\mathbf{\Lambda}\left(e^{j(\varepsilon y+v)}-1\right)+S\mathbf{Q}^{(1)}\right)\mathbf{E}.$$

Выполняя в полученном уравнении предельный переход при $\varepsilon\to 0$, и, учитывая вид решения (3.9), имеем уравнение в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial \Phi(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t} = jr\left(1-e^{jv}\right)\frac{\partial \Phi(y,v,t,\varepsilon)}{\partial y}+\Phi(y,v,t,\varepsilon)\lambda\left(e^{jv}-1\right).$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy}{jr\left(1-e^{jv}\right)}=\frac{d\Phi(y,v,t)}{\lambda\left(e^{jv}-1\right)\Phi(y,v,t)},$$

решая полученную систему дифференциальных уравнений с учетом начального условия $\Phi(y,v,0)=\Phi(y)=\exp\left\{\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}$, имеем

$$\Phi(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\kappa t\left(e^{jv}-1\right)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\},$$

следовательно, решение уравнения (3.8) имеет вид

$$\mathbf{F}(y,v,t)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{\kappa t\left(e^{jv}-1\right)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}. \tag{3.10}$$

Полагая в (3.10) y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=\mathbf{H}(0,v,t)\mathbf{E}=\mathbf{F}(0,v,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Теорема доказана.

Полученные результаты, позволяют сделать вывод о том, асимптотическое приближение характеристических функций числа заявок суммарного потока обращений, поступивших в рассматриваемые системы за время t для повторного и первичного обслуживания, имеют вид распределения Пуассона.

3.3. Метод асимптотического анализа для исследования суммарного потока обращений в системе GI|M|∞ при условии растущего времени обслуживания

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, заданный функцией распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t, $m(t)$ – суммарное число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного и первичного обслуживания, $z(t)$ –длина интервала от момента t до момента поступления следующей заявки. Тогда трехмерный процесс $\{z(t)$, $i(t)$, $m(t)\}$ будет марковским. Для распределения вероятностей значений полученного марковского процесса $P(z,i,m,t)=P\{z(t)<z, i(t)=i, m(t)=m\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\frac{\partial P(z,i,m,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(z,i,m,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(0,i,m,t)}{\partial z}+i\mu rP(z,i,m-1,t)+\mu(1+i)(1-r)P(z,i+1,m,t)+$$

$$+A(z)\frac{\partial P(0,i-1,m-1,t)}{\partial z}-i\mu P(z,i,m,t)\text{, где } i=\overline{0,\infty}, m=\overline{0,\infty}. \quad (3.11)$$

Введем частичные характеристические функции в виде

$$H(z,u,v,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}e^{jui}e^{jvm}P(z,i,m,t),$$

тогда имеем

$$\frac{\partial H(z,u,v,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(z,u,v,t)}{\partial z}+j\mu\left[1-re^{jv}-(1-r)e^{-ju}\right]\frac{\partial H(z,u,v,t)}{\partial u}+$$

$$+(e^{j(u+v)}A(z)-1)\frac{\partial H(0,u,v,t)}{\partial z}. \quad (3.12)$$

Теорема 3.3. *Пусть A(x) – функция распределения вероятностей длин интервалов между моментами поступления заявок в систему,* $R(z)=\lambda\int_0^z(1-A(x))\,dx$ *– стационарное распределение величины перескока. Частичные характеристические функции* $H(z,u,\nu,t)$ *удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.12).*

Тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока $h(v,t)=M\left\{e^{jvm(t)}\right\}$*, при условии растущего времени обслуживания, то есть при* $\mu\to 0$*, имеет вид*

$$h(v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Доказательство.

Рассмотрим систему в условии растущего времени обслуживания, обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ H(z,u,v,t)=F(z,y,v,t,\varepsilon),$$

тогда перепишем (3.12) в виде

$$\frac{\partial F(z,y,v,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial F(z,y,v,t,\varepsilon)}{\partial z}+j\left[1-re^{jv}-(1-r)e^{-j\varepsilon y}\right]\frac{\partial F(z,y,v,t,\varepsilon)}{\partial y}+$$

$$+(e^{j(\varepsilon y+v)}A(z)-1)\frac{\partial F(0,y,v,t,\varepsilon)}{\partial z}. \qquad (3.13)$$

Предположим, что решение уравнения (3.13) имеет вид

$$F\left(z,y,v,t,\varepsilon\right)=R(z)\Phi(y,v,t,\varepsilon), \qquad (3.14)$$

то, выполняя в (3.13) предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и $z\to\infty$ и учитывая вид решения (3.14), имеем

$$\frac{\partial \Phi(y,v,t)}{\partial t}=+jr(1-e^{jv})\frac{\partial \Phi(y,v,t)}{\partial y}+(e^{jv}-1)\frac{\partial R(0)}{\partial z}\Phi(y,v,t).$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy}{jr(1-e^{jv})}=\frac{d\Phi(y,v,t)}{\lambda(e^{jv}-1)\Phi(y,v,t)}.$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений с учетом начального условия $\Phi(y,v,0)=\Phi(y)=\exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}$, имеем

$$\Phi(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}+\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Тогда решение уравнения (3.13) имеет вид

$$F\left(z,y,v,t,\varepsilon\right)\approx F\left(y,v,t\right)=\Phi(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}+\frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Полагая в полученном равенстве y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок суммарного потока, поступивших в систему за время t

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=H(0,v,t)=F(0,v,t)=\exp\left\{\frac{\lambda t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Теорема доказана.

Полученные результаты, позволяют сделать вывод о том, асимптотическое приближение характеристических функций числа заявок суммарного потока обращений, поступивших в рассматриваемые системы за время t для повторного и первичного обслуживания, имеют вид распределения Пуассона.

3.4. Численный анализ асимптотических результатов

Проведем сравнение распределения числа заявок суммарного потока, полученные методом асимптотического анализа и допредельным способом.

Найдем асимптотическое распределение вероятностей $P_2(m, t)$

$$P_2(m,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jvm} h_2(v,t)dv,$$

где $h_2(v, t)$ асимптотическое приближение характеристической функции суммарного потока, в условии растущего времени обслуживания.

Используя вид производящей функции распределения вероятностей $P(m, t)$ числа суммарных обращений, реализованных за время t, в системе $M|M|\infty$, полученный в работе [55], тогда имеем

$$P(m,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jvm} h_0(v,t)dv,$$

где $h_0(v,t) = \exp\left\{\lambda \frac{e^{jv}-1}{1-re^{jv}} t - \frac{\lambda r}{\mu(1-r)} \frac{(e^{jv}-1)^2}{(1-re^{jv})^2}\left(1-e^{-\mu(1-re^{jv})t}\right)\right\}.$

Пример 3.1. Пусть на вход системы поступает $MMPP$-поток, заданный следующими параметрами

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

время наблюдений за экспериментом t=10.

Определим расстояние Колмогорова между распределениями при изменении значения параметра времени обслуживания μ и вероятности возврата заявки в систему r.

Таблица 3.1. – Расстояние Колмогорова Δ между асимптотическим и допредельным распределениями вероятностей

μ \ r	**0,7**	**0,5**	**0,3**	**0,1**
0,1	0,066	0,049	**0,030**	**0,010**
0,05	**0,038**	**0,028**	**0,017**	**$5{,}95\cdot 10^{-3}$**
0,01	**$8{,}73\cdot 10^{-3}$**	**$6{,}35\cdot 10^{-3}$**	**$3{,}88\cdot 10^{-3}$**	**$1{,}35\cdot 10^{-3}$**
0,005	**$4{,}44\cdot 10^{-3}$**	**$5{,}54\cdot 10^{-3}$**	**$1{,}98\cdot 10^{-3}$**	**$6{,}87\cdot 10^{-3}$**

Принимая приемлемым расстояние Колмогорова равное менее 0.03, можно считать допустимым применение асимптотического метода при $\mu rt < 0.5$.

Резюме

В данной главе выполнено исследование суммарного потока в системах $MMPP|M|\infty$ и $GI|M|\infty$. В разделе 3.1 проводится исследование суммарного потока в системе с входящим *MMPP*-потоком с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания, показано, что асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания имеет вид

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=\mathbf{H}(0,v,t)\mathbf{E}=\mathbf{F}(0,v,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Далее проводится аналогичное исследование с помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока.

Раздел 3.3 посвящен исследованию суммарного потока в системе с входящим *GI*-потоком методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания.

Результаты приведены в работах [31, 32, 47].

Глава 4

Имитационное моделирование, численный анализ и комплекс проблемно-ориентированных программ для исследования бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием заявок

В настоящей главе описывается комплекс проблемно-ориентированных программ, направленных на численный анализ рассматриваемых моделей и определение области применимости асимптотических результатов исследования для бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием и непуассоновскими входящими потоками.

Так как результатом исследований являются аппроксимации законов распределения вероятностей (числа занятых приборов, числа событий повторного и суммарного потоков), то для оценки качества этих аппроксимаций требуется знать некоторые сведения о самих распределениях.

В тех случаях, когда удается аналитически получить точные характеристики исследуемого процесса, например, начальные моменты для числа занятых приборов в СМО с экспоненциальным обслуживанием в качестве критерия оценки аппроксимации можно использовать погрешность между асимптотическими и допредельными значениями моментов. Результаты такого анализа представлены в параграфах 2.1-2.2. Программное обеспечение для моделирования всех указанных СМО на базе математической модели реализовано в виде рабочих листов системы MathCAD. В качестве примера приводится программа для анализа характеристик системы $MMPP|M|\infty$.

Для анализа качества аппроксимаций распределения вероятностей числа событий в исследуемых потоках более широкую возможность предоставляет метод имитационного моделирования [65], позволяющий моделировать реализации поведения систем конкретной конфигурации и получать статистический материал о функционировании системы, на основе которого можно не только вычислить числовые эмпирические характеристики исследуемого процесса, но и построить его эмпирическое распределение вероятностей.

В качестве оценки близости соответствующих распределений (асимптотического и имитационного) применяется расстояние Колмогорова [118, 66], количественно демонстрирующее близость соответствующих распределений.

4.1.Численные алгоритмы для реализации методов для нахождения начальных моментов и асимптотического анализа бесконечнолинейных систем с повторным обслуживанием требований

В данной параграфе представлены примеры численных алгоритмов для реализации методов для нахождения начальных моментов и асимптотического анализа бесконечнолинейных систем с повторным обслуживанием требований.

4.1.1. Программа вычисления численных характеристик числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ методом начальных моментов

Рассмотрим бесконечнолинейную СМО с входящим *MMPP*-потоком, время обслуживания требований стохастически независимы, одинаково распределены согласно экспоненциальному закону с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1–r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания.

Для определения начальных моментов числа занятых приборов в системе $MMPP|M|\infty$ были использованы формулы, полученные в параграфе 2.1. В Таблицах 4.1–4.2 приведен текст программы вычисления характеристик рассматриваемой системы методом начальных моментов.

Таблица 4.1 – Задание исходных параметров

$Q := \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{pmatrix}$	– матрица инфинитезимальных характеристик;
$\Lambda1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	– матрица условных интенсивностей поступления групп заявок;
$\mu := 1$	– параметр обслуживания;
$r := 0.7$	– вероятность возврата обслуженной заявки в систему для повторного обслуживания
$E := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	– единичный вектор-столбец;
$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	– единичная матрица.

Таблица 4.2 – Блок расчета начальных моментов числа занятых приборов

1. Нахождение вектора стационарного распределения вероятностей состояний процесса $k(t)$

$M := \mathrm{augment}(Q, E)$ $V := \mathrm{augment}\left(0 \cdot E^T, 1\right)$ $R := V \cdot M^T \cdot \left(M \cdot M^T\right)^{-1}$	$R = (0.400\ \ 0.333\ \ 0.267)$
2. Вычисление первого момента	
$M1 := -R \cdot \Lambda 1 \cdot [Q - \mu \cdot (1 - r) I]^{-1}$ $\mu 1 := -R \cdot \Lambda 1 \cdot [Q - \mu \cdot (1 - r) I]^{-1} \cdot E$	$M1 = (1.333\ \ 1.111\ \ 0.889)$ $\mu 1 = 3.333$
3. Вычисление дисперсии	
$M2 := R \cdot \Lambda 1 \cdot \left[[Q - \mu \cdot (1 - r) \cdot I]^{-1} \cdot [2 \cdot \Lambda 1 + \mu \cdot (1 - r) \cdot I] - I\right] \cdot [Q - 2 \cdot \mu \cdot (1 - r) \cdot I]^{-1}$ $\mu 2 := R \cdot \Lambda 1 \cdot \left[[Q - \mu \cdot (1 - r) \cdot I]^{-1} \cdot [2 \cdot \Lambda 1 + \mu \cdot (1 - r) \cdot I] - I\right] \cdot [Q - 2 \cdot \mu \cdot (1 - r) \cdot I]^{-1} \cdot E - \mu 1^2$	$M2 = (5.778\ \ 4.815\ \ 3.852)$ $\mu 2 = 3.333$
4. Вычисление третьего центрального момента	
$M3 := [M1 \cdot [-3 \cdot \Lambda 1 + (1 - r) \cdot \mu \cdot I] - M2 \cdot [3 \cdot \Lambda 1 + 3(1 - r) \cdot \mu \cdot I] - R \cdot \Lambda 1] \cdot [Q - 3 \cdot (1 - r) \cdot \mu \cdot I]^{-1}$ $\mu 3 := M3 \cdot E - 3 \cdot M2 \cdot E \cdot \mu 1 + 2 \cdot \mu 1^3$	$M3 = (29.481\ 24.568\ 19.654)$ $\mu 3 = 3.333$

4.1.2 Программа вычисления асимптотического распределения числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞

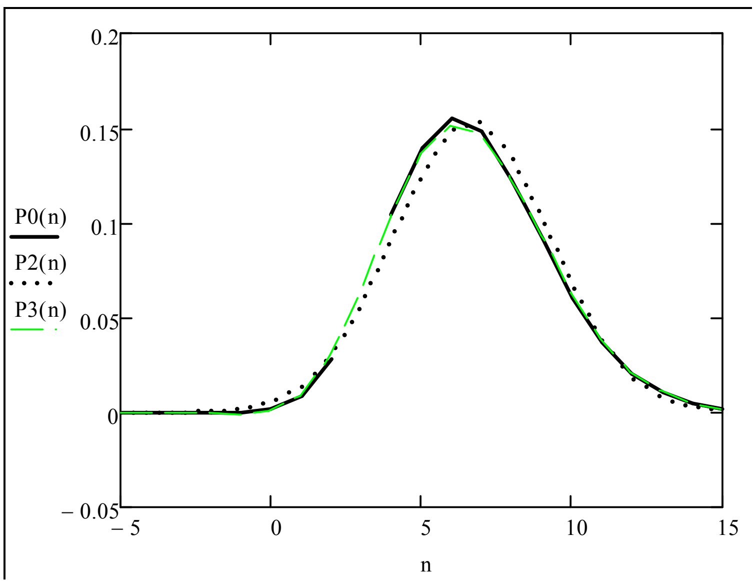
Для нахождения асимптотических характеристик числа занятых приборов в системе *MMPP*|*M*|∞ с повторным обслуживанием требований были использованы формулы, полученные в параграфе 2.1. В Таблицах 4.3–4.4 приведен текст программы вычисления асимптотических характеристик рассматриваемой системы.

Таблица 4.3 – Расчет асимптотических моментов

1. Вычисление асимптотического первого момента	
$\kappa 1 := R \cdot \Lambda 1 \cdot E$ $m1 := \dfrac{\kappa 1}{g}$	$\kappa 1 = 1.000$ $m1 = 3.333$
2. Вычисление асимптотической дисперсии	
$v1 := \mathrm{augment}[-R \cdot (\Lambda 1 - \kappa 1 \cdot I), 0]$ $f2 := v1 \cdot (M)^T \cdot \left[M \cdot (M)^T\right]^{-1}$ $\kappa 2 := f2 \cdot \Lambda 1 \cdot E$ $\kappa := \kappa 2 + \kappa 1$	 $f2 = (0.000\ \ 0.000\ \ 0.000)$ $\kappa 2 = 74.926$ $\kappa = 1.000$

$m2 := \dfrac{\kappa}{\mu\cdot(1-r)}$	m2 = 3.333
3. Вычисление асимптотического третьего момента	
$v2 := \mathrm{augment}\,[-R\cdot(\Lambda1 - \kappa1\cdot I - 2\kappa2) - 2\cdot f2\cdot(\Lambda1 - \kappa1\cdot I), 0]$ $f3 := v2\cdot(M)^T\cdot\left[M\cdot(M)^T\right]^{-1}$ $\kappa3 := \kappa1 + 2\cdot\kappa2 + f3\cdot\Lambda1\cdot E$ $m3 := \dfrac{\kappa3}{\mu\cdot(1-r)}$	f3 = (0.000 0.000 0.000) κ3 = 1.000 m3 = 3.333

Таблица 4.4 – Построение асимптотического распределения вероятностей числа занятых приборов

1. Вычисление и построение асимптотического распределения вероятностей	
$x(u) := e^{j\cdot u}$ $h0(u) := \exp\left[(x(u)-1)\cdot\dfrac{\kappa1}{\mu\cdot(1-r)}\right]$ $n := -5..10$ $P0(n) := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j\cdot u\cdot n)\cdot h0(u)\cdot\frac{1}{2\cdot\pi}\,du$ $h2(u) := \exp\left[j\cdot u\cdot\dfrac{\kappa1}{\mu\cdot(1-r)} + \dfrac{(j\cdot u)^2}{2}\cdot\dfrac{(\kappa1+\kappa2)}{\mu\cdot(1-r)}\right]$ $P2(n) := \dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j\cdot u\cdot n)\cdot h2(u)\,du$ $h3(u) := \exp\left[j\cdot u\cdot\dfrac{\kappa1}{\mu\cdot(1-r)} + \dfrac{(j\cdot u)^2}{2}\cdot\dfrac{(\kappa1+\kappa2)}{\mu\cdot(1-r)} + \dfrac{(j\cdot u)^3}{6}\cdot\dfrac{\kappa3}{\mu\cdot(1-r)}\right]$ $P3(n) := \dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j\cdot u\cdot n)\cdot h3(u)\,du$	Построение графиков 

Аналогичные программы были реализованы для вычисления характеристик числа занятых приборов системы $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, а также для вычисления характеристик суммарного потока и потока повторных обращений в рассматриваемых системах.

4.2. Имитационное моделирование потоков в бесконечнолинейных СМО с повторным обслуживанием требований

Имитационная модель СМО разрабатывалась на основе дискретно-событийного метода моделирования, в основе которого лежит представление процесса функционирования системы, как последовательная смена событий системы во времени.

Основными объектами, которые формируют характеристики СМО, являются заявки. Заявки обычно поступают на вход системы, затем некоторое время находятся внутри нее и, в конце концов, покидают систему. Функционирование СМО с неограниченным числом приборов и повторным обслуживанием определяется следующим образом. События, наступающие во входящем потоке (простейший, *MMPP*, рекуррентный) формируют заявки, которые необходимо обслужить. Поступившая заявка занимает любой свободный прибор (так как количество приборов неограниченно, заявки не теряются) и мгновенно начинает обслуживаться. Времена обслуживания поступающих заявок являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Закончившие обслуживание заявки с некоторой вероятностью возвращаются в систему и формируют событие потока повторных обращений.

Так как моменты поступления заявок в систему и длины времен их обслуживания независимы, то их моделирование проводится независимо. Для моделирования простейшего потока достаточно сгенерировать последовательность экспоненциальных случайных величин. Для *MMPP*-потока генерируется начальное состояние, определяемое стационарным распределением вероятностей состояний потока, затем генерируется время пребывания в этом состоянии. На интервале пребывания *MMPP*-потока в каком-либо состоянии события генерируются как в простейшем потоке с соответствующей интенсивностью.

В рекуррентном потоке задается функция распределения интервала между наступлением событий входящего потока. Моделирование времени обслуживания сводится к генерации непрерывной случайной величины с соответствующим законом распределения.

Построенная программа имитационного моделирования работает следующим образом.

1 шаг. Задаем время моделирования T.

2 шаг. Далее выбираем вид входящего потока и определяем его параметры:

для простейшего потока – интенсивность λ;

для *MMPP*-потока – матрицы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{\Lambda}$;

для рекуррентного потока – вид и параметры функции распределения $A(x)$.

3 шаг. Задаем параметры функции распределения времени обслуживания.

4 шаг. Определяем вероятность повторного обслуживания r.

Запишем алгоритм моделирования потоков повторных и суммарных обращений в системы:

1. На промежутке времени моделирования $[0, T]$ происходит генерация моментов прихода заявок $tinp_j$ согласно модели входящего потока, которые образуют массив моментов прихода заявок, $j = 1, 2, \ldots$
2. Для каждого значения момента прихода генерируются независимые случайные величины $tserv_j$ (время обслуживания).
3. Складывая соответствующие $tserv_j$ и $tinp_j$, получим моменты завершения обслуживания $toutp_j$, то есть моменты наступления событий выходящего потока.

4. Далее с вероятностью r часть этих моментов образует моменты наступлений событий потока повторных обращений $trep_j$. Для каждого из них также генерируются независимые случайные величины $tserv_j$ и прибавляются к соответствующим $trep_j$, чтобы получить время окончания обслуживания $toutp_j$.
5. Если упорядочить моменты $trep_j$ в порядке возрастания, то получим массив *TREPEAT – моментов наступления событий потока повторных обращений.*
6. Если упорядочить совокупность всех моментов $trep_j$ и $tinp_j$ в порядке возрастания, то получим массив *TSUM – моментов наступления событий суммарного потока.*

Имея два массива *TSUM* (моментов прихода заявок в систему на интервале $[0, T]$) и *TOUTP* (моментов окончания обслуживания) на интервале $[0, T]$), можно сделать оценку стационарных вероятностей $\hat{P}(i)$ числа занятых приборов, как доли времени пребывания системы в состоянии i (числа занятых приборов).

Значение оценок стационарного распределения вероятностей находим по формуле

$$\hat{P}(i) = \frac{T(i)}{T}, \tag{4.1}$$

где $T(i)$ – суммарное время пребывания системы в состоянии i за время моделирования T. Далее строим функцию распределения $\hat{F}(j) = \sum_{i=1}^{j} \hat{P}(i)$.

Для оценки характеристик потоков суммарных и повторных обращений анализируем элементы массивов *TSUM* и *TREPEAT* моментов прихода соответствующих заявок повторного и суммарного потоков.

Данный алгоритм реализован в виде модуля программной системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания [51], результаты работы которого представлены на рисунках 4.1 – 4.3.

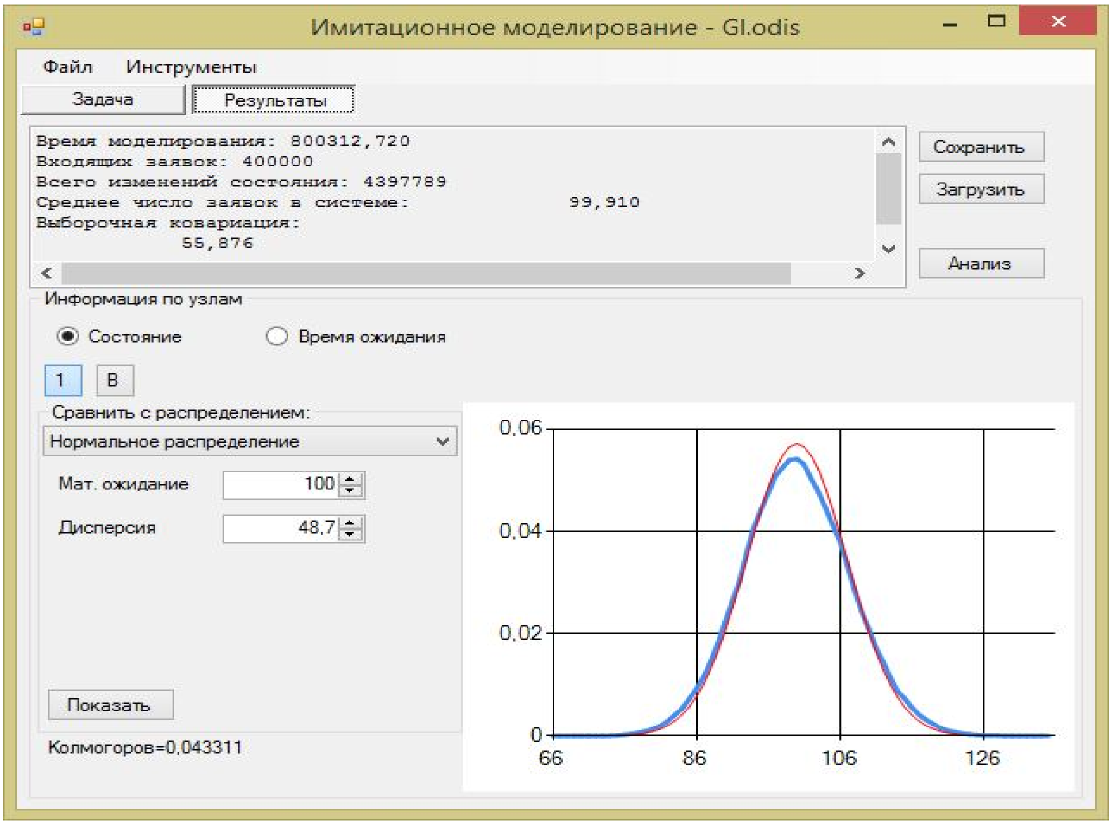


Рисунок 4.1. – Анализ результатов имитационного моделирования для числа заявок в системе

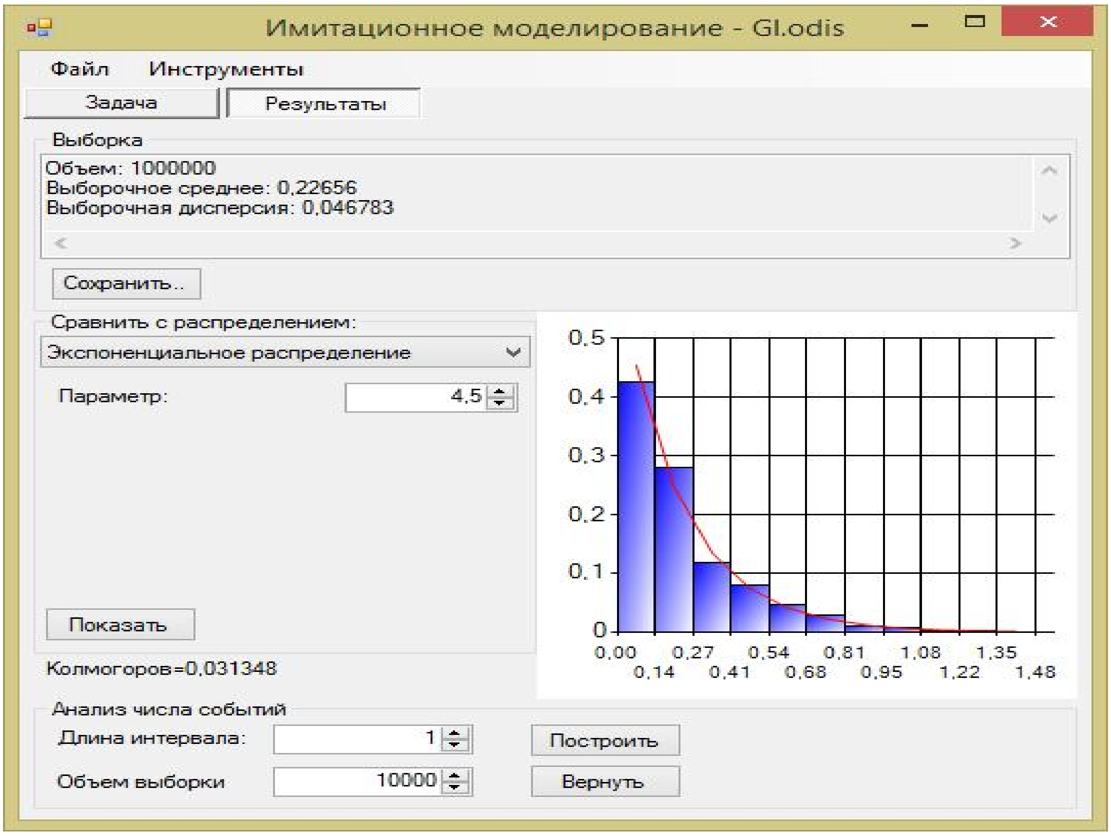


Рисунок 4.2. – Анализ результатов имитационного моделирования для потока повторных обращений

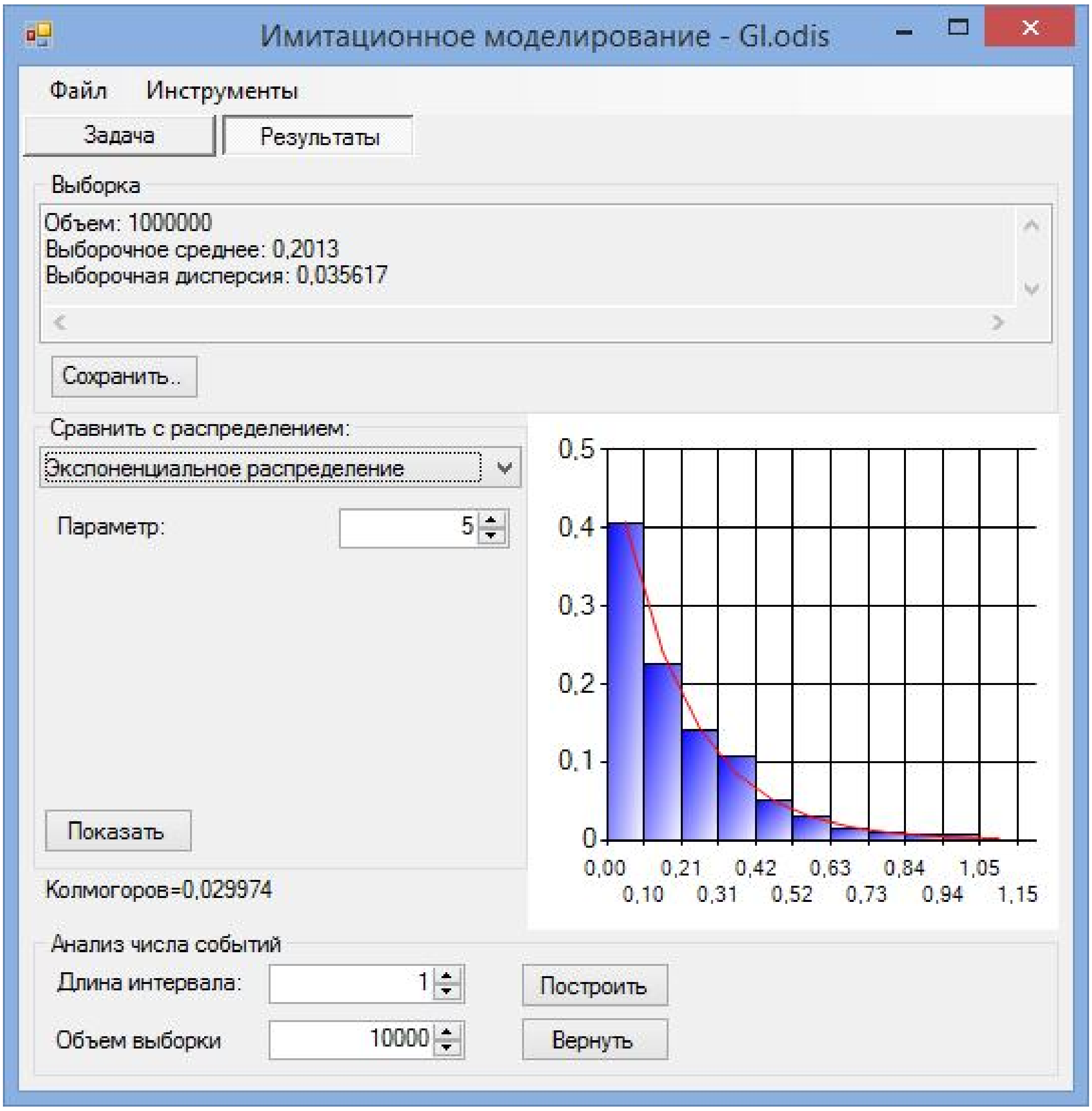


Рисунок 4.3. – Анализ результатов имитационного моделирования для суммарного потока обращений

Численный анализ результатов имитационного моделирования

Для оценки погрешностей вычислений распределений вероятностей исследуемых процессов, полученных с помощью имитационного моделирования, выберем параметры входящего потока таким образом, чтобы он оказался простейшим. Например, рассмотрим *MMPP*-поток единичной интенсивности, заданный матрицами

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

Известно [55], что число занятых приборов в системе $M|M|\infty$ распределено по закону Пуассона с параметром $\frac{\lambda}{\mu(1-r)}$, где λ – интенсивность входящего потока.

Область применимости результатов имитационного моделирования будем определять с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta = \max_i \left| \hat{F}(i) - F(i) \right|, \quad (4.1)$$

где $\hat{F}(i)$ – эмпирическое распределение вероятностей, полученное с помощью имитационного моделирования, $F(i)$ – пуассоновское распределение вероятностей с параметром $\frac{\lambda}{\mu(1-r)}$.

Используя заданные значения параметров, определим необходимое время моделирования *T*, определяемое из условия $\lambda T = N$ и удовлетворяющее заданному значению критерия Колмогорова. В дальнейшем, для определения области применимости асимптотических результатов, будем использовать полученные значения *T*.

Таблица 4.1 – Область применимости результатов имитационного моделирования при *r*=0,01

N	10 000	50 000	100000	500 000
Δ	**0,0125**	**0,0091**	**0,0024**	**0,0019**

Таблица 4.2 – Область применимости результатов имитационного моделирования при *r*=0,7

N	10 000	50 000	100 000	500 000
Δ	0,036	**0,025**	**0,016**	**0,004**

Таблица 4.3 – Область применимости результатов имитационного моделирования при *r*=0,9

N	10 000	50 000	100000	500 000
Δ	0,0747	0,0390	0,0353	**0,0211**

Как видно из результатов имитационного моделирования при увеличении числа поступивших заявок *N* точность имитационной модели увеличивается, при этом можно также отметить, что при более больших значениях вероятности возврата требуется большее время моделирования для установления стационарного режима функционирования.

Анализ суммарного потока и потока повторных обращений

Проведем анализ результатов имитационного моделирования потоков и сравним с асимптотическим распределениями.

Пример 4.1. Рассмотрим СМО вида *MMPP*|*M*|∞ при условии растущего времени обслуживания. *MMPP*-поток, задан следующими параметрами

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},\ r=0{,}5,$$

тогда интенсивность входящего потока к=4,73.

В разделе 2.3 показано, что поток повторных обращений в систему в условии растущего времени обслуживания можно аппроксимировать распределением Пуассона с параметром $\frac{r\kappa t}{1-r}$, тогда, учитывая, что вероятность возврата заявок в систему r=0,5, имеем интенсивность потока повторных обращений λ=4,73.

Область применимости результатов имитационного моделирования будем определять с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta=\max_i\left|\hat{F}(i)-F(i)\right|.$$

Тогда, используя заданные параметры, имеем следующий результат.

Таблица 4.4 – Область применимости асимптотических результатов для потока повторных обращений в систему при r=0,5

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	0,0384	**0,0088**	**0,0017**

В главе 3 настоящей диссертационной работы показано, что суммарный поток обращений в систему при условии растущего времени обслуживания можно или растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока можно также аппроксимировать распределением Пуассона с параметром $\frac{\kappa t}{1-r}$, то, учитывая, что вероятность возврата заявок в систему r=0,5, имеем интенсивность потока суммарных обращений λ=9,47.

Рассмотрим систему в условии растущего времени обслуживания, тогда, используя заданные параметры, имеем следующий результат.

Таблица 4.5 – Область применимости асимптотических результатов для суммарного потока обращений при условии растущего времени обслуживания при r=0,5

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	0,0565	0,0371	**0,0313**

Пример 4.2. Рассмотрим СМО вида $MMPP|M|\infty$ при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока. Проведем исследование применимости метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока, тогда, полагая $\mathbf{Q}=N\cdot\mathbf{Q}_1$, получаем следующий результаты (Таблицы 4.6-4.7).

Таблица 4.6 – Область применимости асимптотических результатов для суммарного потока обращений в условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока при $\mathbf{Q}=10\cdot\mathbf{Q}_1$

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	0,0321	**0,0265**	**0,0251**

Таблица 4.7 – Область применимости асимптотических результатов для потока суммарного потока обращений в условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений состояний входящего потока при $\mathbf{Q}=100\cdot\mathbf{Q}_1$

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	**0,0130**	**0,0097**	**0,0082**

Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что при увеличении частоты изменений состояний входящего потока, область применимости асимптотического метода значительно увеличивается.

Пример 4.2. Рассмотрим СМО вида $GI|M|\infty$. Пусть на вход поступает рекуррентный поток, в котором длины интервалов между моментами поступления заявок имеют Гамма-распределение с параметром формы α=0,5 и параметром масштаба β=2,5, тогда интенсивность входящего потока λ=5, учитывая вероятность возвращения заявки в систему r=0,1, имеем интенсивность потока повторных обращений λ=0,555, интенсивность суммарного потока λ=5,55.

Используя заданные параметры, имеем следующий результат, приведенный в таблицах 4.8, 4.9.

Таблица 4.8 – Область применимости асимптотических результатов для потока повторных обращений в условии растущего времени обслуживания при r=0,1

μ	0,5	0,1	0,01
Δ	**0,0252**	**0,0090**	**0,0082**

Таблица 4.9 – Область применимости асимптотических результатов для суммарного потока обращений в условии растущего времени обслуживания при r=0,1

μ	0,5	0,1	0,010
Δ	0,1440	0,1435	0,1419

Рассмотрим случай, когда вероятность возврата заявок в систему r=0,8, тогда имеем интенсивность потока повторных обращений λ=20, интенсивность суммарного потока λ=25.

Таблица 4.10 – Область применимости асимптотических результатов для потока повторных обращений в условии растущего времени обслуживания при r=0,8

μ	0,5	0,1	0,010
Δ	**0,0067**	**0,0033**	**0,0014**

Таблица 4.11 – Область применимости асимптотических результатов для потока повторных обращений в условии растущего времени обслуживания при r=0,8

μ	0,5	0,1	0,010
Δ	**0,0217**	**0,0199**	**0,0177**

Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что при увеличении частоты изменений состояний входящего потока, область применимости асимптотического метода значительно увеличивается.

Резюме

В данной главе предложен комплекс программ, позволяющий находить основные вероятностные характеристики исследуемых моделей бесконечнолинейных систем массового обслуживания с повторным обслуживанием требований, а также определять область применимости асимптотических результатов, полученных в данной диссертационной работе.

С помощью математического пакета программ MathCAD реализованы методы для нахождения начальных моментов и проведения асимптотического анализа бесконечнолинейных систем с повторным обслуживанием требований.

Проведено имитационное моделирование исследуемых систем с повторным обслуживанием требований.

Результаты главы опубликованы в работах [25, 27].

Заключение

В настоящей диссертации впервые проведено полное исследование математических моделей потоков в бесконечнолинейных систем массового обслуживания вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований.

Развит метод асимптотического анализа потоков в рассматриваемых системах при условии растущего времени обслуживания, а также при условии растущего времени обслуживания и предельно частых изменений системы.

Результаты, полученные в диссертации, обобщают ранее известные, что существенно развивает теорию случайных процессов и теорию массового обслуживания.

Основные теоретические и практические результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. предложены новые математические модели бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований;
2. проведено исследование потоков в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, найдены основные вероятностные характеристики исследуемых потоков;
3. предложена модификация метода асимптотического анализа для исследования потоков в бесконечнолинейных СМО вида $MMPP|M|\infty$, $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием требований, впервые показано, что при потоки повторных и суммарных обращений при высокой загрузке системы является пуассоновскими;
4. разработан комплекс проблемно-ориентированных программ, при помощи которого проведена оценка области применимости полученных асимптотических результатов.

Список использованной литературы

1. Акулиничев, Н.М. Об асимптотических распределениях выходящих потоков некоторых систем массового обслуживания / Н. М. Акулиничев, Л. К. Горский // Кибернетика. – 1973. – №1. – С. 71 – 78.

2. Александров, А. М. О выходящих потоках некоторых систем массового обслуживания / А. М. Александров // Труды Ленинградского политехнического института. 1966. – Т.275. – С. 18 – 21.

3. Ананина, И. А. Исследование потоков в системе M/GI/∞ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции / И. А. Ананина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 3(8). – С. 56 – 67.

4. Баруча-Рид, А. Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча-Рид. – М.: Изд-во «Наука». 1969. – 512 с.

5. Башарин, Г. П. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, И. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. – Академиздатцентр «Наука» РАН. – 2009. – № 12. – С. 16 – 28

6. Беляев, Ю. К. Предельные теоремы для редеющих потоков. «Теория вероятностей и ее применения» / Ю. К. Беляев // т. 8, вып. 2. – 1963. – С. 175 – 184.

7. Боровков, А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

8. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин – М.: Изд-во РУДН. 1995. – 520 с.

9. Бусленко, Н. П. Лекции по теории сложных систем / Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н Коваленко – М. Сов. Радио, 1973. – 441 с.

10. Бусленко, Н.П. Метод статистических испытаний / Н.П. Бусленко , Д. И. Голенко, И. М. Соболь, В. Г. Срагович, Ю. А. Шрейдер. – Физматгиз. 1962. – 228 с.

11. Гарайшина, И. Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. – Томск. 2005. – 148 с.

12. Горцев, А. М. Оптимальная оценка модулированного синхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горский, М. Н. Голофастова // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. Томск: Изд-во НТЛ. – 2013. –№ 2 (23). – С. 42 – 53.

13. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. / В. Е. Гмурман. – М.: Изд-во «Высшая школа». 1972. – 368 с.

14. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко – М.: изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.

15. Добрушин, Р. Л. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. «Украинский математический журнал» / Р. Л. Добрушин // т. 8, № 2. – 1956. – С. 127 – 134.

16. Дудин, А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок // Мн.: БГУ, – 2000. – 75 с.

17. Жидкова, Л. А. Исследование потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Научное творчество молодежи: Материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции: 25-25 апреля 2014 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2014. – Ч.1. – С.7 – 11.

18. Жидкова, Л. А. Исследование потоков в системе с повторным обслуживание и непуассоновским входящим потоком / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции МНСК-2014. Математика. (г. Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г.). – Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та. – 2014. – С. 236.

19. Жидкова, Л. А. Исследование системы GI|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Труды Томского государственного университета. – Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конфе-

ренции, Т. 295. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета. – 2014. – С. 94 – 100.

20. Жидкова, Л. А. Исследование системы массового обслуживания MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2013): материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием имени А.Ф. Терпугова: в 2 ч. 29–30 ноября 2013 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2011. – Ч. 2. – С. 12 – 15.

21. Жидкова, Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе GI|M| с повторным обслуживанием / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сборник научных статей. – Минск : РИВШ. – 2014. – С. 55 – 58.

22. Жидкова, Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MAP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова) // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы 10 Российской конференции с международным участием. – Томск : ИД Том. гос. ун-та. – 2014. – С. 100 – 101.

23. Жидкова, Л. А. Математическая модель изменения численности клиентов торговой компании / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2011): материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 ч. 25–26 ноября 2011 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2011. – Ч. 1. – С. 115 – 121.

24. Жидкова, Л. А. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17) . – С. 49–54.

25. Жидкова, Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П.

Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1 (26). – С. 53 – 62.

26. Жидкова, Л. А. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л. А. Жидкова (Задиранова), С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322, № 5. – С. 5 – 9.

27. Задиранова, Л. А. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторными обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2 (31). – С. 26 – 34.

28. Задиранова, Л. А. Сравнение асимптотик второго и третьего порядка числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 11, № 60. С. 172 – 177.

29. Задиранова, Л. А. Асимптотический анализ потока повторных обращений в СМО с повторным обслуживанием заявок / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. Материалы восемнадцатой международной научной конференции.: 19-22 октября 2015 г. – Ин-т проблем упр. им. Трапезникова Рос. акад. наук; под общ. ред. В. М. Вишневского – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 271 – 278.

30. Задиранова, Л. А. Исследование потока повторных обращений в системе GI|M|∞ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сборник научных статей. – Минск : РИВШ. – 2015. – С. 43 – 46.

31. Задиранова, Л. А. Исследование потока суммарных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием требований / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое мо-

делирование (ИТММ-2015): Материалы XIV Международной научно-практической им. А.Ф. Терпугова : в 2 ч. 18-22 ноября 2015 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та. – 2015. – Ч. 1. – С. 110 – 113.

32. Задиранова, Л. А. Исследование потока суммарных обращений в СМО с повторным обслуживанием с помощью метода асимптотического анализа / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Труды Томского государственного университета. – Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы III Всероссийской молодежной научной конференции, Т. 297. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – С. 99 – 105.

33. Зарядов, И. С. Математическая модель расчета и анализа характеристик систем с обобщенным и повторным обслуживанием / И. С. Зарядов, А. В. Королькова, Т. А. Милованова, А. А. Щербанская // T-Comm – Телекоммуникации и Транспорт. – 2014. – № 6, Т. 8. – С. 16 – 20.

34. Захорольная, И. А. Математическая модель процесса изменения дохода от продажи взаимодополняющих товаров / И. А. Захорольная, С. П. Моисеева // Финансово-актуарная математика и эвентоконвергенции технологий (ФАМЭТ–2011): труды X международной конференции: 23–24 апреля, 2011г. – Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2011. – С. 157 – 170.

35. Ивановская, И. А. Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа / С.П. Моисеева, И.А. Ивановская // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – Т. 317. – №5. – С. 32 – 34.

36. Ивницкий, В. А. Многоканальная система массового обслуживания с выделенным каналом / В. А. Ивницкий // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 6. – С. 91 – 103.

37. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнения в частных производных первого порядка / Э. Камке – М.: Изд-во «Наука». 1966. – 260 с.

38. Клейнрок, Л. Коммуникационные сети / Л. Клейнрок. – Москва: Изд-во «Наука». 1970. – 255 с.

39. Кокс, Д. Теория очередей / Д. Кокс, У. Смит. – М.: Мир. 1966. – 218 с.

40. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров – М. 1974 – 120 с.

41. Лапатин, И. Л. Асимптотический анализ выходящего потока системы MAP|GI|∞ / И. Л. Лапатин, А. А. Назаров // Известия политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 315. №5. – С. 191 – 194.

42. Лапатин, И. Л. Исследование выходящего потока системы GI│GI│∞ в условиях растущего времени обслуживания / И. Л. Лапатин, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2008): Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (14-15 ноября 2008 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2008. – Ч. 2. – С. 30 – 34.

43. Лапатин, И. Л. Исследование выходящего потока системы GI│GI│∞ методом просеянного потока / И. Л. Лапатин, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Серия Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 4(9). – С. 59 – 64.

44. Лапатин, И. Л. Исследование выходящего потока системы MAP│M│∞ различными асимптотическими методами / И. Л. Лапатин, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (13-14 ноября 2009 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2009. – Ч. 1. – С. 52 – 56.

45. Лапатин, И. Л. Исследование выходящего потока системы SM│GI│∞ в условиях растущего времени обслуживания / И. Л. Лапатин // Научное творчество молодежи: мтериалы XII Всероссийской научно-практической конференции (18 – 19 апреля 2008 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2008. – Ч. 1. – С. 29 – 31.

46. Лапатин, И. Л. О точности аппроксимации выходящих потоков систем массового обслуживания пуассоновским потоком / И. Л. Лапатин // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): Материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2011. – Ч. 1. – С. 20 – 24.

47. Лисовская, Е. Ю. Исследование суммарного потока обращений в систему с повторным обслуживанием / Е. Ю. Лисовская, Л. А. Задиранова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): Материалы XIII Международной научно-практической им. А.Ф. Терпугова : в 3 ч. 20-22 ноября 2014 г. – Томск : Изд-во Том. ун-та. – 2014. – Ч. 3. – С. 42-46.

48. Ложковский, А. Г. Теория массового обслуживания в телекоммуникациях / А. Г. Ложковский – Одесса: ОНАС им. А. С. Попова, 2012. – 112 с.

49. Лопухова, С. В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. – Томск. 2008. – 167 с.

50. Меликов, А.З. Телетрафик: модели, методы, оптимизация / А. З. Меликов, Л. А. Пономаренко, В. В. Паладюк. – Киев, ИПК «Политехника». 2007. – 256 с.

51. Мещеряков, Р.В. Применение параллельных вычислений в имитационном моделировании сетей массового обслуживания / Р. В. Мещеряков, А. Н. Моисеев, А. Ю. Демин, В. А Дорофеев // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 5. – С. 99 – 109.

52. Моисеева, С. П. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием / А. С. Морозова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. – 2005. – № 287. – С. 46 – 51.

53. Моисеева, С. П. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием / С. П. Моисеева, А. С. Морозова, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 173 – 175.

54. Моисеева, С. П. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями / С. П. Моисеева, И. А. Захорольная // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 51 – 58.

55. Морозова, А.С. Исследование математических моделей стимулирования сбыта продукции: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Филиал Кемеровского гос. ун-т. в г. А.-Судженске – Анжеро-Судженск. 2007. – 115 с.

56. Морозова, А. С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Вычислительные технологии. – 2005. – № 13, вып. 5. – С. 88 – 92.

57. Морозова, А. С. Распределение вероятностей двумерного потока обращений в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с повторным обращением / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 49 – 52.

58. Морозова, А.С. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации / А.С. Морозова, С.П. Моисеева, А.А. Назаров // Вестник Томского государственного университета № 293.Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 49 – 52.

59. Назаров, А. А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов / А. А. Назаров, И. А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3(12). – С. 85 – 96.

60. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

61. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ. 2004. – 228 с.

62. Назаров, А.А. Исследование немарковской системы массового обслуживания с входящим ММР-потоком и неограниченным числом обслуживающих приборов / А. А. Назаров, И.А. Семенова // Материалы XV Всерос-

сийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 28 – 29 апреля 2011 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч. 1. – С. 28 – 31.

63. Носова, М. Г. Автономная немарковская система массового обслуживания и ее применение в задачах демографии: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. – Томск. 2010. – 204 с.

64. Прабху, Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами / Н. Прабху // М.: Изд-во «Машиностроение», 1969. – 356 с.

65. Рыжиков, Д. И. Имитационное моделирование систем массового обслуживания / Д. И. Рыжиков – Л.: ВИККИ им А.Ф, Можайского. 1991. – 111 с.

66. Рыков, В. В. Математическая статистика и планирование эксперимента / В. В. Рыков, В. Ю Иткин // уч. пособие. – М.: МАКС Пресс. – 2010. – 308 с.

67. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. / Т. Л. Саати – М.: Советское радио, 1971. – 519 с.

68. Севастьянов, Б. А. Некоторые аналитические методы в теории массового обслуживания / Б. А. Севастьянов // В сб. Кибернетику на службу коммунизму. – Т. 2. – М. – Л., «Энергия», 1964. – С. 325 – 338.

69. Севастьянов, Б. А. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора / Б. А. Севастьянов // Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. – Т. 4. – М. АН СССР, 1959. – С. 68 – 70.

70. Севастьянов, Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами / Б. А. Севастьянов // Теория вероятностей и ее применения – 1957. – Т. 2, № 1. – С. 106 – 116.

71. Семенова, И. А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов / А. А. Назаров, И. А. Семенова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. - №3 (12). – С. 85 – 96.

72. Семенова, И. А. Исследование систем массового обслуживания с повторными вызовами методом асимптотического анализа. / А. А. Назаров, И. А. Семенова // Автометрия. – 2011. – Т. 47. – №4. – С. 104 – 113.

73. Семенова, И. А. Сравнение асимптотических и допредельных характеристик системы MAP|M|∞ / А. А. Назаров, И. А. Семенова / Доклады ТУСУР. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – №2 (42). Ч. 3. – С. 202 – 209.

74. Судыко, Е. А. Исследование математической модели сети случайного доступа методом асимптотических семиинвариантов третьего порядка / Судыко Е. А., Назаров А. А. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 2(7). – С. 52 – 64.

75. Фёдорова, Е. А. Вычисление моментов в RQ-системе MMPP|M|1 // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 4(29). – С. 41 – 50.

76. Хинчин, А. Я. Математическая теория стационарной очереди / А. Я. Хинчин // Мат. сб. – 1932. – 39, № 4. – С. 73 – 84.

77. Хинчин, А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. / А. Я. Хинчин – М.: Изд-во Академии наук СССР. 1955. – 120 с.

78. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М: Физмат-лит. – 1963. – 236 с.

79. Яровицкий, Н. В. Выходящие потоки и многоэтапное обслуживание. Дис. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1962. – В надзаг.: Ин-т математики, кибернетики и гл. астроном, обсерватория АН УССР. – 112 с.

80. Яровицкий, Н. В. О выходящем потоке однолинейной системы обслуживания с потерями. «Доклады АН УССР» / Н. В. Яровицкий // № 1. – 1961. – С. 1251 – 1254.

81. Armony, M. Queueing Dynamics and Maximal Throughput Scheduling in Switched Processing Systems / M. Armony, N. Bambos // Queueing Systems. – 2003. Vol. 44. Issue 3. - P. 209 - 252.

82. Arnold, O. Allen Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications Second Edition / O. Arnold // Academic press, Inc. – 1990. – 768 p.

83. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: A computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. – Springer, Berlin. – 2008. – 318 p.

84. Bailey, N. T. J. A Continuous Time Treatment of a Simple Queue Using Generating Functions / N. T. J. Bailey // J. Roy. Statist. Soc. – 1954. – ser. B, vol. 16. – P. 228 – 291.

85. Bailey, N. T. J. Some Further Results in the Non-equilibrium Theory of a Simple Queue / N. T. J. Bailey // J. Roy. Statist. Soc., ser. B, vol. 19, 1957. – P. 326 – 333.

86. Bambos, N. Queueing Networks of Random Link Topology: Stationary Dynamics of Maximal Throughput Schedules / N. Bambos, G. Michailidis // Queueing Systems. – 2005. Vol. 50. Issue 1. - P. 5 – 52.

87. Baum, D. The infinite server queue with Markov additive arrivals in space / D. Baum // Proceedings of the international conference "Probabilistic analysis of rare events" – Riga, Latvia. – 1999. – P. 136 – 142.

88. Breuer, L. The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue / L. Breuer., D. Baum // Proceedings of the 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB–2001) – Aachen, Germany, 2001. – P. 209 – 223.

89. Burke, P. J. The Output of Queueing Systems / P.J. Burke // Operations Research. 1956. V. 4. – P. 699 – 704

90. Clarke, A. B. A Waiting Line Process of Markov Type / A. B. Clarke // Ann. Math. Statist., vol. 27, 1956. – P. 452 – 459.

91. Clarke, A. B. On time-dependent waiting line processes / A. B. Clarke // Annals of Mathematical Statistics – 1953. – Vol.24. – P. 491 – 492.

92. Cox, D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the in-elusion of supplementary variables / D. R. Cox // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. –Vol. 51. – № 3. – P. 433 – 441.

93. D’Avignon, G.R. Queues with instantaneous feedback. / G. R. D’Avignon, R. L. Disney // Manag. Sci. – 1977. – 24(2). – P. 168 – 180.

94. Dalay, D. J. Notes on Queueing Output Processes // Lect. Notes in Econ. And Math. Systems / Math. Models in Queueing Theory, ed. A.B. Clarke. – 1974. – V.8 – P. 351 – 358.

95. Dalay, D. J. Queueing Output Processes / D. J. Dalay // Adv. Appl. Probab. – 1976. – V.8 – P. 395 – 415.

96. Down, D. G. Multi-layered round robin routing for parallel servers / D. G. Down, R. Wu // Queueing Systems. – 2006. Vol. 53. Issue 4. - P. 177- 188.

97. Duffield, N. G. Queueing at large resources driven by long-tailed M/G/∞-modulated processes / N. G. Duffield // Queueing Systems. – 1998. – Vol. 28. Issue 1-3. - P. 245 – 266.

98. Finch, P. D. The Output Process of the Queueing System M|G|1 / P. D. Finch // J. Roy. Statist. Soc. – 1959. – V. 21. No. 2. – P. 375 – 380.

99. Foley, R. D. Queues with delayed feedback. / R. D. Foley, R. L. Disney // Adv. Appl. Probab. – 1983. – 15(1), – P. 162 – 182.

100. Foster, F. G. On the Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Problems / F. G. Foster // Ann. Math. Statist., vol. 24, 1953. – P. 355 – 360.

101. Fricker, C. On the fluid limit of the M/G/∞ queue / C. Fricker, M. R. Jaïbi // Queueing Systems. – 2007. – Vol. 56 Issue 3-4. - P. 255 – 265.

102. Gelenbe, E. Fundamental concepts in computer science / E. Gelenbe, J.-P. Kahane. – Imperial College Press. 2009. – 159 p.

103. Glynn, P. W. A new view of the heavy-traffic limit theorem for the infinite-server queue / P. W. Glynn, W. Whitt. // Advances in Applied Probability – 1991. – Vol. 23. – P. 188 – 209.

104. Homma, T. On a Certain Queueing Process / T. Homma // Repts. Statist. Appl. Research, Union Japan, Scientist end Engrs., vol. 4, 1955. – P. 14 – 32.

105. Homma, T. On the Many Server Queueing Process with a Particular Tupe of queue Discipline / T. Homma // Repts, Statist. Appl. Research, Union. Scientists and Engrs., vol. 4, 1956. – P. 90 – 101.

106. Homma, T. On the Theory of Queues with Some Type of Queue Discipline / T. Homma // Yokohama Math. J., vol. 4, 1956. – P. 56 – 64.

107. Iglegart, D. L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem / D. L. Iglegart // J. Appl. Prob. – 1965. – V. 2. – P. 429 – 441.

108. Jayawardene, A. K. M/G/∞ with alternating renewal breakdowns / A. K. Jayawardene, O. Kella // Queueing Systems. – 1996. Vol. 22. Issue 1-2. - P. 79 – 95.

109. Kaplan, N. Limit theorems for a GI/G/∞ queue / N. Kaplan // The Annals of Probability. – 1975. – P. 780 – 789.

110. Kargahi, M. Utility Accrual Dynamic Routing in Real-Time Parallel Systems / M. Kargahi, A. Movaghar // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems (TDPS). - December 2010 - Vol. 21. No. 12. - P. 1822 – 1835.

111. Karlin, S. ang McGregor J., Many Server Queueing Processes with Poisson Input and Exponential Serice / S. Karlin, J. McGregor // Times, Pacific J., Math., vol. 8, 1958. – P. 87 – 118.

112. Kawata, T. A. Problem in Theory of Queues, Repts. Statist. Appl. Research / T. A. Kawata // Union Japan. Scientists end Engrs., vol. 3, 1955. – P. 122 – 129.

113. Kendall, D. G. Some Problems in Theory of queues / D. G. Kendall // J. Roy. Statist. Soc., ser. B, vol. 3, 1952. – P. 151 – 185.

114. Kendall, D. G. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by Means of the Imbedded Markov Chain / D. G. Kendall // Ann. Math. Statist., vol. 24, 1954. – P. 338 – 354.

115. Klemm, A. Modeling IP Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extendend version) / A. Klemm, C. Lindemann, M. Lohmann // Performance Evaluation. – 2003. – V. 54. – P. 149 – 173.

116. Knessl, C. Heavy Traffic Analysis of Two Coupled Processors / C. Knessl, J. A. Morrison // Queueing Systems. – 2003. Vol. 43. No. 3. - P. 173 – 220.

117. Knessl, C. Heavy Traffic Analysis of Two Coupled Processors / C. Knessl, J. A. Morrison // Queueing Systems. – 2003. Vol. 43. No. 3. - P. 173 – 220.

118. Kolmogorov, A. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // Giornale dell' Intituto Italiano degli Attuari. – 1933. – V. 4. – P. 83 – 91.

119. Leland, W. E. On the self-similar nature of Ethernet traffic / Leland W. E., Willinger W., Taqqu M. S., Wilson D. V. // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 1995. – V. 25. – P. 202 – 213

120. Luchak, G. The Distribution of Time Required to Reduce of Some Preassigned Level a Single-channel Queue Characterized by a Time-dependend Poisson-distributed Arrival Rate and a General Class of Holding Times / G. Luchak // Operations Research, vol. 5, 1957. – P. 205 – 209.

121. Luchak, G. The Solution of the Single Channel Queueing Equation Characterized by a Time-dependent Poisson-distributed Arrival Rate and a General Class of Holding Times / G. Luchak // Operations Research, vol. 4, 1956. – P. 711 – 732.

122. Melikov, A. Z. Calculation of the characteristics of multichannel queuing system with pure losses and feedback / A. Z. Melikov, L. A. Ponomarenko, K. H. N. Kuliyeva //. J. Autom. Inf. Sci. – 2015. – 47(5). – P. 19 – 29.

123. Morse, P. M. Queues, Inventories and Maintenance / P. M. Morse // John Wiley&Sons, Inc., New York, 1958.

124. Movaghar, A. Analysis of a Dynamic Assignment of Impatient Customers to Parallel Queues / A. Movaghar // Queueing Systems. – 2011. Vol. 67. No. 3. - P. 251 – 273.

125. Movaghar, A. Analysis of a Dynamic Assignment of Impatient Customers to Parallel Queues / A. Movaghar // Queueing Systems. – 2011. Vol. 67. No. 3. - P. 251 – 273.

126. Neuts, F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach. / F. Neuts. – John Hopkins University Press, Baltimore. 1981. – 332 p.

127. Parulekar, M. Tail probabilities for M/G/∞ input processes (I): Preliminary asymptotics / M. Parulekar, A. M. Makowski // Queueing Systems. – 1997. – Vol. 27. Issue 3-4. - P. 271 – 296.

128. Pekoz, E. A., Joglekar, N.: Poisson traffic flow in a general feedback. / E. A. Pekoz, N. J. Joglekar // Appl. Probab. – 2002. – 39(3). – P. 630 – 636.

129. Pujolle, G. Management, Control and Evolution of IP Networks / G. Pujolle. – Great Britain by Antony Rowe Ltd, Chippenham, Wiltshire. 2006. – 642 p.

130. Reich, E. Waiting Times When Queues are in Tandem / E. Reich // Ann. Math. Statist. – 1957. – V. 28. No. 3. – P. 768.

131. Renyi, A. Sur les processus d'événements dérivés par- un processus de Poisson et sur leurs applications techniques et physiques / A. Renyi, L. Takács // Maguar Tudomanyos Akad. Alkalm. Mat. Inst. Közleményei – 1952. – vol. 1, P. 139 – 146 (Hungarian; French and Russian summaries).

132. Reynolds, J. F. Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue / J. F. Reynolds // Oper. Res. V.16, 1968. – 186 p.

133. Semenova, I. Asymptotic analysis of retrial queueing systems / I. Semenova, A. Nazarov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, DOI 10.3103/S8756699011040121, 2011. Vol. 47. – Num. 4. – P. 406 – 413.

134. Sinyakova, I. Investigation of output flows in the system with parallel service of multiple requests / I. Sinyakova, S. Moiseeva // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI'2012) : IV International Conference. Baku, Azerbaijan, September 12-14, 2012. – Baku, 2012. – P. 180 – 181. DOI: 10.1109/ICPCI.2012.6486413.

135. Schneps-Schneppe, M. Call Admission Control in Cellular Networks / M. Schneps-Schneppe, V. B. Iversen // Mobile Networks, InTech, Zagreb. – 2012. – P. 111 – 136.

136. Takács, L. On Erlang's formula / L. Takács // Annals of Mathematical Statistics. – 1969. – Vol. 40. – P. 71 – 78.

137. Willinger, W. Self-similarity through high variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level / W. Willinger, M.S. Taqqu, R.

Sherman and D.V. Wilson // in: SIGCOMM Symp. on Commun. Arch. and Protocols, 1995. – P. 100 – 113.

138. Wishart, D. M. G. A Queueing System with Service-time Distribution / D. M. G. Wishart // Ann. Math. Statist., vol. 27, 1956. – P. 768 – 779.

139. Zaryadov, I. S. Time characteristics of queuing system with renovation and reservice. / I. S. Zaryadov, A. A. Scherbanskaya // Bulletin of PFUR. Serires Mathematics. Information Sciences. Physics. – 2014. – № 2. – P. 61 – 65.